קבועים:

תיאור	ערך
קבוע פלנק h	$[Joul\cdot Sec]$ 6.626E-34
$\hbar$	$[Joul\cdot Sec]$ 1.054E-34
מהירות האור	$[Meter/Sec]$ C=3E8
מטען אלקטרון	$[C]$ q_e =-1.602E-19
מסת אלקטרון	$[Kg]$ m_e =9.11E-31
מסת פרוטון	$[Kg]$ m_p =1.672E-27
מסת נויטרון	$[Kg]$ m_n =1.674E-27
עבודה / אנרגיה	$1eV=1.602\cdot10^{-19}\,Joul$
הספק	$1Watt=1Joul/Sec$
hc	$[\dot{A}\cdot eV]$ hc=12,400
$\hbar c$	$[\dot{A}\cdot eV]$ ħc=1,973
אורך גל קומפטון	$[\dot{A}]$ $\lambda_c=\frac{h}{m_e c}=0.024$
קבוע המבנה הדק	$\alpha=1/137$
רדיוס בוהר	$[\dot{A}]$ $a_0=0.529$
קבוע רידברג למימן	$[eV]$ $R_H=13.6$
מסת מנוחה אלקטרון	$[MeV]$ $m_ec^2=0.511$
מסת מנוחה פרוטון	$[MeV]$ $m_pc^2=938.3$
מסת מנוחה נויטרון	$[MeV]$ $m_nc^2=939.6$

קומוטטורים:

1) הגדרה: $[A,B]=AB-BA=-[B,A]$

2) תכונות:
$$[A,(B+C)]=[A,B]+[A,C]$$
$$[A,B]^\dagger=[B^\dagger,A^\dagger]$$
$$[AB,C]=A[B,C]+[A,C]B$$
$$[A,BC]=B[A,C]+[A,B]C$$

3) זהות יעקובי: $[A,[B,C]]+[B,[C,A]]+[C,[A,B]]=0$

4) אם A,B **מתחלפים עם** $[A,B]$ **אזי:** א) $[A,f(B)]=[A,B]f'(B)$

ב) $e^Ae^B=e^{A+B}e^{0.5[A,B]}$

5) התפתחות אופרטור בזמן: $\frac{d}{dt}\langle A\rangle=\frac{i}{\hbar}\langle[H,A]\rangle+\left\langle\frac{dA}{dt}\right\rangle$

6) פיתוח לטור: $e^ABe^{-A}=B+[A,B]+\frac{1}{2!}[A,[A,B]]+\dots$

טרנספורם פורייה:

$$f(x)\to\tilde f(p)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-\frac{i}{\hbar}px)f(x)dx$$
$$\tilde f(p)\to f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(\frac{i}{\hbar}px)\tilde f(p)dp$$
$$\frac{\partial^n f(x)}{\partial x^n}\to\left(\frac{i}{\hbar}p\right)^n\tilde f(p)\quad;\quad\frac{\partial^n\tilde f(p)}{\partial p^n}\to\left(\frac{-i}{\hbar}x\right)^n f(x)$$
$$f(x+x_0)\to\exp(\frac{i}{\hbar}px_0)\tilde f(p)$$
$$\tilde f(p-p_0)\to\exp(\frac{i}{\hbar}p_0x)f(x)$$
$$f(ax)\to\frac{1}{|a|}\tilde f(\frac{p}{a})$$

טנסור לוי צ'יויטה:

$$(\vec A\times\vec B)_k=\varepsilon_{ijk}A_iB_j\ ;\ \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{mnk}=\delta_{im}\delta_{jn}-\delta_{in}\delta_{jm}\ ;\ \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{mjk}=2\delta_{im}$$

כתיב דיראק:

1) ייצוג וקטור: $|\varphi\rangle-Ket$
$$|a\varphi\rangle=a|\varphi\rangle$$
$$|T\varphi\rangle=T|\varphi\rangle$$

2) "וקטור צמוד": $\langle\psi|\equiv|\psi\rangle^\dagger-Bra$
$$\langle a\psi|=a^*\langle\psi|$$
$$\langle T\psi|=T^\dagger\langle\psi|$$

3) מכפלה: $\langle\psi|\varphi\rangle\equiv(|\psi\rangle,|\varphi\rangle)-BraKet$
$$\langle\psi|\varphi\rangle=\langle\varphi|\psi\rangle^*$$
$$\langle\psi|T|\varphi\rangle=(|\psi\rangle,T|\varphi\rangle)\to\langle\psi|T^\dagger|\varphi\rangle=\langle\varphi|T|\psi\rangle^*$$

4) אופרטור הרמיטי: $\langle\psi|T|\varphi\rangle^*=\langle\varphi|T|\psi\rangle\ |_{T^\dagger=T}$

5) ייצוג מטריצוני של אופרטור בבסיס $\{|U_n\rangle\}$: $T_{ij}=\langle U_i|T|U_j\rangle$

6) שלמות הבסיס $\{|U_n\rangle\}$: $\sum_n|U_n\rangle\langle U_n|=I$

מרחבי מכפלה פנימית:

1) $(u,v)=(v,u)^*=u^\dagger v$

2) ליניאריות באיבר השני: $(u,\alpha v_1+\beta v_2)=\alpha(u,v_1)+\beta(u,v_2)$

אנטי ליניאריות משמאל: $(\alpha u_1+\beta u_2,v)=\alpha^*(u_1,v)+\beta^*(u_2,v)$

3) אופרטור צמוד: $(u,Tv)=(T^\dagger u,v)\quad,\ (T^\dagger)_{ij}=T_{ji}^*$

4) תכונות צמוד הרמיטי:
$$(T^\dagger)^\dagger=T\qquad(\alpha T^\dagger)=\alpha^*T^\dagger$$
$$(T+S)^\dagger=T^\dagger+S^\dagger\quad(TS)^\dagger=S^\dagger T^\dagger$$

5) סיווג אופרטורים: א) נורמלי: $TT^\dagger=T^\dagger T$

ב) הרמיטי: $T^\dagger=T$ (ואז iT הוא אנטי הרמיטי)

ג) אנטי הרמיטי: $T^\dagger=-T$

ד) אוניטרי: $T^\dagger=T^{-1}$ (ווקטורי העמודות א"נ).

6) תכונות ספקטראליות של אופרטורים:

א) אופרטור נורמלי תמיד לכסין והו"ע שלו א"נ.

ב) עבור אופרטור הרמיטי הע"ע תמיד ממשיים.

ג) עבור אופרטור אנטי הרמיטי הע"ע מדומים טהורים.

ד) עבור אופרטור אוניטרי הע"ע נמצאים על $|z|=1$.

פונקצית דלתא $\delta(x)$:

1) הגדרה:
$$\delta^\varepsilon(x)=\begin{cases}1/\varepsilon, x\in[-\varepsilon/2,\varepsilon/2]\\0, otherwise\end{cases}$$

2) אינטגרציה:
$$\int_a^b\delta^\varepsilon(x)=\begin{cases}1, a\le-\varepsilon/2, b\ge\varepsilon/2\\0, a\le b\le-\varepsilon/2 \text{ or } b\ge a\ge\varepsilon/2\end{cases}$$

3)
$$\int_a^b\delta^{(n)}(x-x_0)\cdot f(x)dx=\begin{cases}(-1)^n f^{(n)}(x_0), x_0\in[a,b]\\0, x_0\notin[a,b]\end{cases}$$

4) $\delta(cx)=\frac{1}{|c|}\delta(x)\qquad\delta(x)=\delta(-x)$

5) $\delta(g(x))=\sum_i\frac{1}{|g'(x_i)|}\delta(x-x_i)\ \ |g(x_i)=0, g'(x_i)\ne0$

6)
$$\Theta(x)=\int_{-\infty}^{x}\delta(x-x_0)dx=\begin{cases}0, x<x_0\\1, x>x_0\end{cases}\quad\to\quad\frac{d\Theta(x)}{dx}=\delta(x)$$

7) התמרת פורייה:
$$\delta(x-x_0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(ik(x-x_0))dk$$

מדידות קוונטיות:

1) A אופרטור הרמיטי (מדיד) עם ע"ע (ממשיים - גדלים פיזיקאליים)

ו- $\{|\varphi_n\rangle\}$ (כאשר $A|\varphi_n\rangle=a_n|\varphi_n\rangle$ א"נ).

עבור $|\psi\rangle$ שאינו מ"ע של A מתקיים $|\psi\rangle=\sum_n\alpha_n|\varphi_n\rangle$ אזי נמדוד a_n

בהסתברות $|\alpha_n|^2$ ($\sum_n|\alpha_n|^2=1$) ולאחר המדידה יש קריסה לערך הנמדד.

2) ערך תוחלת של מדידות: $\langle\psi|A|\psi\rangle=\langle A\rangle_\psi=\sum_n|\alpha_n|^2a_n$

3) הטלה: אם נמצאים במצב $|A\rangle$ מה ההסתברות למדוד מצב $|B\rangle$?

מגדירים אופרטור הטלה על מצב $|B\rangle$: $P_B=BB^\dagger=|B\rangle\langle B|$

ואז לפי 2) מתקיים: $\langle P_B\rangle_A=\langle A|P_B|A\rangle=\langle A|B\rangle\langle B|A\rangle=|\langle A|B\rangle|^2$

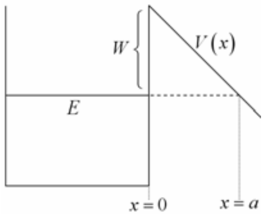
4) **אופרטורי סיבוב והזזה:** $\hat{D}(\vec r)=\exp\left(i\frac{\vec r\cdot\vec p}{\hbar}\right)$; $\hat R(\vec\phi)=\exp\left(i\frac{\vec\phi\cdot\vec L}{\hbar}\right)$

5) **אופרטורי מדידת מיקום ותנע:** $\hat x=-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial p}$; $\hat p=\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}$

6) **עקרון אי הודאות:** $\Delta A\cdot\Delta B\ge\frac12\left|\langle\psi|[A,B]|\psi\rangle\right|\Rightarrow[p,x]=\frac{\hbar}{i}\to\Delta p\cdot\Delta x\ge\frac{\hbar}{2}$

7) **מנהור (קירוב WKB):**

$$|T|^2=\exp\left(\frac{-2}{\hbar}\int_{V(x)>E}dx\sqrt{2m(V(x)-E)}\right)$$



סטטיסטיקה:

1) **סכום כל ההסתברויות שווה 1:** $\Pr(X=x_i)=p_i\quad,\sum_i p_i=1$

2) **ממוצע/ערך תוחלת:** $\bar X=\langle X\rangle=\sum_i p_i x_i$

3) **סכום ממוצעים = ממוצע סכומים:** $\langle A+B\rangle=\langle A\rangle+\langle B\rangle$

4) **מומנט מסדר n :** $\langle X^n\rangle=M_n(X)=\sum_i p_i x_i^n$

5) **שונות/** $Variance$: $(\Delta x)^2=(stdev(x))^2=\langle(x-\langle x\rangle)^2\rangle=\langle x^2\rangle-\langle x\rangle^2$

6) **פונקציה סופרת ניסיונות:** T הסתברות להצלחה אזי $T(1-T)^{k-1}$ פונקצית הסתברות להצלחה בפעם ה-K **וערך התוחלת** נתון ע"י $1/T$.

7) **משתנה רציף:** א) צפיפות הסתברות: $f(x)$

ב) $\Pr(X\in[a,b])=\int_a^b f(x)dx$

ג) תנאי נרמול: $\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx=1$

ד) מומנט: $\langle X^n\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}x^n f(x)dx$

רקע ניסיוני לתורת הקוונטים (פיסיקה 3ח'):

0) **חישובי אנרגיות:** א) ביטוי "יחסותי": $E_0{}^2=m^2c^4=E^2-P^2c^2$

ב) ביטוי "ניוטוני": $E_k=p^2/2m$

ג) נשתמש בניוטון כאשר: $E_k\ll E_0$

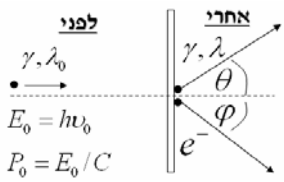
1) **אפקט פוטו אלקטרי** (קרינה א"מ גורמת לפליטת אלקטרון ממתכת):

א) W - פונקצית עבודה (אנרגיה דרושה לפליטת אלקטרון).

ב) תדירות סף: $W=E=h\upsilon$

2) **פיזור קומפטון** (אור כחלקיק – פוגע בחומר ומתפזר):

א) $\Delta\lambda=\lambda-\lambda_0=\lambda_c(1-\cos\theta)$



* לרוב פיזור מהאלקטרונים כי "מטרה קלה".

ב) משימור תנע קווי מקבלים: $\tan(\varphi)=\frac{\lambda_0\sin(\theta)}{\lambda-\lambda_0\cos(\theta)}$

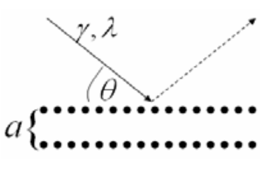
ג) שימור אנרגיה: $h\upsilon_0+m_ec^2=h\upsilon+\sqrt{(m_ec^2)^2+(p_ec)^2}$

ד) כשפותרים פיזור קומפטון, נתונה אנרגיית קשר שעלייה צריך להתגבר. ונתון אורך גל של האור. האנרגיה המכסימלית שהאור יעביר:

$$E_k=hc[1/\lambda_0-1/(\lambda_0+\Delta\lambda)]\ \Big|_{\Delta\lambda:\theta=180^\circ}$$

3) **פיזור בראג** (פיזור קרינת X מגביש):

א) החזרה בזווית מסוימות מוגברת עפ"י



תנאי בראג: $\sin(\theta)=n(\frac{\lambda}{2a})$

ב) אורך גל דה-ברולי: $\lambda=h/p$

ג) בנוסף: $\lambda=\frac{2\pi}{k}\to k=\frac{p}{\hbar},p=\frac{h\upsilon}{c}=\frac{h}{\lambda}\to\lambda=\frac{c}{\upsilon}\to E=\frac{hc}{\lambda}$

4) **מודל אטום של בוהר:**

א) קווינטות של תנ"ז: $L=mvr=n\hbar,n=1,2,3,...$

ב) אנרגיה נפלטת במעברי רמות: $E_n=-(\frac{2\pi^2 m_e{}^4}{h^2})\frac{1}{n^2}=-13.6eV\cdot\frac{1}{n^2}$

פונקצית גל:

1) **פונקצית גל:** $\psi(x):\mathbb{R}\to\mathbb{C}$

2) **פונקצית צפיפות ההסתברות:** $\psi^*(x)\psi(x)=|\psi(x)|^2$

3) **משוואת שרדינגר (מ"ש):** $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t)=\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+V(x,t)\right)\psi(x,t)$

א) בהינתן ת"ה $\psi(x,t=0)$ אזי הפתרון נתון ע"י $\psi(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}g(k)e^{i(kx-wt)}dk$

כאשר $g(k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\psi(x,0)e^{-ikx}dx$ הוא טרנספורם פוריה מרחבי של ת"ה $\psi(x,0)$

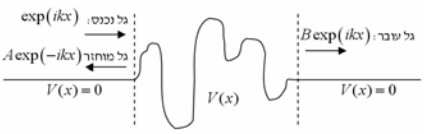
ב) יחס הדיספרסיה $\hbar w(k)=\frac{\hbar^2k^2}{2m}$ נותן את האנרג' הקינטית, ו- $V_{ph}=\frac{w}{k},V_g=\frac{dw}{dk}$

4) **אופרטור הזרם:** $\begin{cases}J(x)\equiv\frac{\hbar}{2mi}\left[\psi^*(x)\frac{\partial}{\partial x}\psi(x)-\psi(x)\frac{\partial}{\partial x}\psi^*(x)\right]=\frac{\hbar}{m}\mathrm{Im}\left\{\psi^*\frac{\partial}{\partial x}\psi\right\}\\ \frac{\partial}{\partial t}|\psi|^2+\nabla J=0\end{cases}$

(פונקצית גל חייבת להיות מרוכבת כדי שיהיה זרם)*

5) **מומנט:** $\langle X^n\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}\psi^*(x)x^n\psi(x)dx$

בעיות פיזור לפוטנציאלים בת"ל בזמן $(E>0)$:



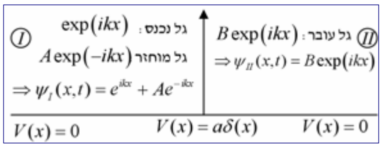
1) **כללי:** א) אנרגיה קינטית: $E-V=\frac{\hbar^2k^2}{2m}$

ב) מקדם העברה: $T=\frac{J_T}{J_{in}}=|B|^2\frac{q}{k}$ מקדם החזרה: $R=\frac{J_R}{J_{in}}=|A|^2$

ג) שימור הסתברות: $1=T+R$

2) **פיזור מפונקצית $\delta(x)$:**

(לא משנה אם a חיובי/שלילי)*



"תפירת" פתרונות ב- $x=0$:

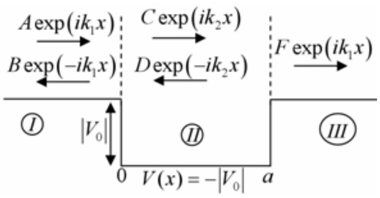
א) רציפות $\psi(x)$: $\psi_I(x=0_-)=1+A=B=\psi_{II}(x=0_+)$

ב) דרישה על הנגזרות מקבלים מאינטגרציה על מ"ש:

$$\psi'(0_+)-\psi'(0_-)=\frac{2ma}{\hbar^2}\psi(0)\to ik(B-1+A)=\frac{2ma}{\hbar^2}B$$

3) **פיזור מבור מלבני:**

דורשים רציפות $\psi(x)$ ו- $\psi'(x)$ ב-3 התחומים.



מצבים קשורים:

1) **הנורמה מוגדרת:** $1=\int_{-\infty}^{\infty}|\psi(x)|^2dx\Rightarrow\psi(x)\underset{|x|\to\infty}{\to}0$

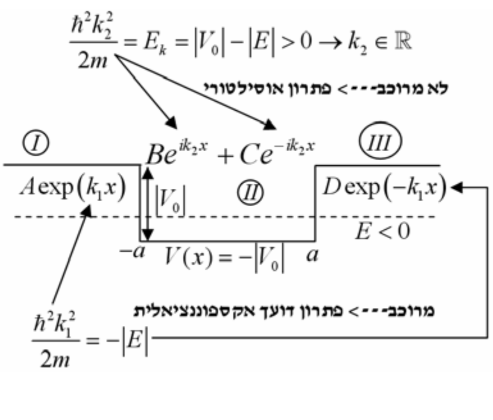
2) מצבים קשורים הם מ"ע של מ"ש בת"ל בזמן $H\varphi_n=E_n\varphi_n$ והם מוגדרים ודיסקרטיים (סופיים או אינסופיים).

3) **פתרון כללי תלוי בזמן:** $\psi(x,t)=\sum a_n\varphi_n\exp(-\frac{it}{\hbar}E_n)\ |\ a_n=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_n^*(x)\psi(x,0)dx$

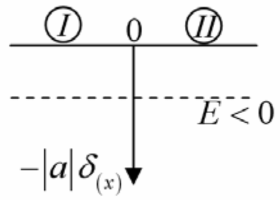
4) **א"ג של מצבים עצמיים:** $\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_m^*(x)\varphi_n(x)dx=\delta_{mn}$

5) **בור מלבני סופי:**

ע"מ לפתור את הבעיה יש לדרוש רציפות פונקציה ונגזרת ("תפירה").



6) פונקצית $\delta_{(x)}$:



א) דעיכה אקספוננציאלית :

$$\tilde{k} = \pm ik \mid k = \frac{1}{\hbar}\sqrt{2m\left(-|E|\right)}$$

$$\begin{cases} \varphi_1(x) = Ae^{\tilde{k}x} \underset{x\to-\infty}{\to} 0 \\ \varphi_2(x) = Be^{-\tilde{k}x} \underset{x\to\infty}{\to} 0 \end{cases}$$

ב) "תפירת" פתרונות (רציפות פוני וקפיצה בנגזרת):

$$\begin{cases} \varphi(0_-) = \varphi(0_+) \to A = B \\ \varphi'(0_+) - \varphi'(0_-) = -\frac{2m|a|}{\hbar^2}\varphi(0) \to \tilde{k} = \frac{m|a|}{\hbar^2} \end{cases}$$

ג) מקבלים תנאי על האנרגיות :

$$\begin{cases} E = -\frac{ma^2}{\hbar^2} \\ \varphi(x) = Ae^{-k|x|} \end{cases}$$

פוטנציאל מרכזי:

1) המילטוניאן בהצגה כדורית:

$$H\psi = \left(-\frac{\hbar^2}{2\mu r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}r + \frac{L^2}{2\mu r^2} + V(r)\right)\psi$$

2) הפרדת משתנים:

$$\psi(r) = \frac{1}{r}u(r)Y_{lm}(\theta,\varphi) \mid u(r) = r\cdot R(r)$$

$$\int_0^\infty |u(r)|^2 dr = 1 \ , \ \lim_{r\to0} u(r) = 0$$ *+תנאי שפה*

3) מ"ש הרדיאלית:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{d^2}{dr^2} + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu r^2} + V(r)\right)u(r) = Eu(r)$$

אוסילטור הרמוני חד מימדי:

1) אופרטור העלאה(/יצירה):

$$a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\hat{x} - \frac{i}{\sqrt{m\omega\hbar}}\hat{p}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\xi - \frac{\partial}{\partial\xi}\right)$$

2) אופרטור הורדה(/השמדה):

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\hat{x} + \frac{i}{\sqrt{m\omega\hbar}}\hat{p}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\xi + \frac{\partial}{\partial\xi}\right)$$

3) הפעלת אופרטור על מ"ע:

$$a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle \qquad a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$$

*(*האופרטורים לא הרמיטיים : $a^\dagger \neq a \leftarrow \left[a^\dagger, a\right] = 1$ **כל שאר הקומוטטורים מתאפסים)*

4) אופרטור ספירת מצב:

$$N = a^\dagger a \to N|n\rangle = n|n\rangle$$

5) המילטוניאן:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2} = \hbar\omega\left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right)$$

6) אופרטור מיקום ותנע:

$$\hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(a^\dagger + a\right) \ ; \ \hat{p} = i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}\left(a^\dagger - a\right)$$

7) הצגת מצב עצמי:

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}\left(a^\dagger\right)^n|0\rangle$$

8) מצב קוהרנטי: א) הגדרה :

$$|\alpha\rangle|_{\alpha\in\mathbb{C}} = \exp(-\frac{|\alpha|^2}{2})\exp\left(\alpha a^\dagger|0\rangle\right) =$$

$$= \exp(-\frac{|\alpha|^2}{2})\sum_0^\infty \frac{1}{n!}\left(\alpha a^\dagger\right)^n|0\rangle = \exp(-\frac{|\alpha|^2}{2})\sum_0^\infty \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle$$

ב) $\left|\langle\alpha|\alpha\rangle\right|^2 = 1 \quad , a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$

9) פולינומי הרמיט:

א) החלפת משתנים לחסרי יחידות :

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}\xi \ , \ \varepsilon_n = \frac{E_n}{\hbar\omega} = (\frac{1}{2} + n)$$

ב) מ"ש :

$$U_n'' + (2\varepsilon_n - \xi^2)U_n = 0 \qquad \to \qquad U_n(x) = C_n H_n(\xi)e^{-\xi^2/2}$$

$$C_n = \frac{1}{\sqrt{2^n n!}}\sqrt[4]{\frac{m\omega}{\pi\hbar}} \ , C_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2(n+1)}}C_n \ , H_n = (-1)^n e^{\xi^2}\frac{d^n}{d\xi^n}e^{-\xi^2} \ , H_{n+1} = (2\xi - \frac{d}{d\xi})H_n$$

ג) רקורסיות :

$$a_{k+2} = \frac{2k+1-\varepsilon_n}{(k+1)(k+2)}a_k \quad , \quad \begin{cases} H_{n+1} = 2\xi H_n - H_n' = 2\xi H_n - 2nH_{n-1} \\ H_n' = 2nH_{n-1} \end{cases}$$

ד) דוגמאות :

$$H_0 = 1 \ , \ H_1 = 2\xi \ , \ H_2 = 4\xi^2 - 2 \ , \ H_3 = 8\xi^3 - 12\xi$$

$$H_4 = 16\xi^4 - 48\xi^2 + 12 \qquad , \qquad H_5 = 32\xi^5 - 160\xi^3 + 120\xi$$

ה) פונקציה יוצרת :

$$\exp\left(2t\xi - t^2\right) = \sum_{n=0}^\infty \frac{H_n(\xi)}{n!}t^n$$

אוסילטור הרמוני $3D$ איזוטרופי:

1) הפרדה קרטזית:

$$H = \frac{1}{2\mu}\vec{P}^2 + \frac{1}{2}\mu\omega\vec{r}^2 = H_x + H_y + H_z$$

כאשר מתקיים $H_i = \frac{1}{2\mu}p_i^2 + \frac{1}{2}\mu\omega r_i^2$ ו- $H_x X_{n_x}(x) = E_{n_x}X_{n_x}(x)$

2) רמות אנרגיה:

$$E = E_{n_x} + E_{n_y} + E_{n_z} = \hbar\omega\left(n + 3/2\right)$$

3) מצבים עצמיים:

$$\psi_{n_x,n_y,n_z} = X_{n_x}(x)Y_{n_y}(y)Z_{n_z}(z)$$

$$\Rightarrow \left|\psi_{n_x,n_y,n_z}\right\rangle = \frac{\left(a_x^\dagger\right)^{n_x}\left(a_y^\dagger\right)^{n_y}\left(a_z^\dagger\right)^{n_z}}{\sqrt{n_x!}\sqrt{n_y!}\sqrt{n_z!}}\left|\psi_{0,0,0}\right\rangle$$

4) רמת ניוון: $(n+1)(n+2)/2$

תנע זוויתי:

1) מדידת מצבים עצמיים: א) $L^2|l,m\rangle = l(l+1)\hbar^2|l,m\rangle \qquad l = 0,1,2,\ldots$

ב) $L_z|l,m\rangle = m\hbar|l,m\rangle \qquad m = -l,-l+1,\ldots,l-1,l$

2) אופרטורים סקלריים: $\left[L_i, r^2\right] = \left[L_i, p^2\right] = \left[L_i, L^2\right] = 0$

3) אופרטורים וקטוריים: $\left[L_i, B_j\right] = i\hbar\varepsilon_{ijk}B_k \quad | \vec{B} = \left\{\vec{L}, \vec{p}, \vec{r}\right\}$

4) אופרטורי העלאה/הורדה: א) הגדרה :

$$L_+ = L_x + iL_y$$

$$L_- = L_x - iL_y$$

ב) $L_\pm|l,m\rangle = \hbar\sqrt{l(l+1) - m(m\pm1)}\,|l,m\pm1\rangle$

ג) $L_x = \frac{1}{2}\left(L_+ + L_-\right) \ , \ L_y = \frac{1}{2i}\left(L_+ - L_-\right)$

ד) $L^2 = L_+L_- + L_z^2 - \hbar L_z$

5) יחסי חילוף: $\left[L_+, L_-\right] = 2\hbar L_z \quad , \quad \left[L_z, L_\pm\right] = \pm\hbar L_\pm \quad , \quad \left[L^2, L_\pm\right] = 0$

6) ייצוג מטריצוני (עבור $l=1$):

$$L_x = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} & 1 & \\ 1 & & 1 \\ & 1 & \end{pmatrix}\begin{array}{l} \text{(m=1)} \\ \text{(m=0)} \\ \text{(m=-1)} \end{array} \quad L_y = \frac{i\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} & -1 & \\ 1 & & -1 \\ & 1 & \end{pmatrix} \quad L_z = \hbar\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$$

$$L_x^2 = \frac{\hbar^2}{2}\begin{pmatrix} 1 & & 1 \\ & 2 & \\ 1 & & 1 \end{pmatrix} \quad L_y^2 = \frac{\hbar^2}{2}\begin{pmatrix} 1 & & -1 \\ & 2 & \\ -1 & & 1 \end{pmatrix} \quad L^2 = 2\hbar^2\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

7) פולינומי לג'נדר Y_{lm} , $\left(0 \le \theta \le \pi, 0 \le \varphi \le 2\pi\right)$:

א) א"ג : $\langle l,m|l'm'\rangle = \int_0^\pi d\theta\sin(\theta)\int_0^{2\pi}d\varphi Y_{lm}^*(\theta,\varphi)Y_{l'm'}(\theta,\varphi) = \delta_{mm'}\delta_{ll'}$

ב) הסתברות : $\Pr(l,m) = \left|\langle lm|\psi\rangle\right|^2 = \int_0^\infty r^2dr\left|\int_{4\pi}d\Omega Y_{lm}^*(\theta,\varphi)\psi(r,\theta,\varphi)\right|^2$

ג) הגדרת מ"ע $|l,-l\rangle$: $Y_{l,-l} = \frac{1}{2^l l!}\sqrt{\frac{(2l+1)!}{4\pi}}\sin^l(\theta)\exp(-il\varphi)$

ד) קשר בין מצבים : $Y_{l,-m} = (-1)^m Y_{lm}^*$

ה) סימטריה : $Y_{lm}(\pi-\theta, \pi+\varphi) = (-1)^l Y_{lm}$

ו) דוגמאות : $l = 0: \ Y_{00} = \sqrt{\frac{1}{4\pi}}$

$$l = 1: \ Y_{1,\pm1} = \mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin(\theta)e^{\pm i\varphi} \ , \ Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos(\theta)$$

$$\Rightarrow \vec{r} = \left(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos(\theta)\right) = r\sqrt{\frac{4\pi}{3}}\left(\frac{Y_{1,-1} - Y_{11}}{\sqrt{2}}, i\frac{Y_{11} - Y_{1,-1}}{\sqrt{2}}, Y_{10}\right)$$

8) ייצוג דיפרנציאלי:

$$L_x = \frac{\hbar}{i}\left(-\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{\cos\varphi}{\tan\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right) \quad L_y = \frac{\hbar}{i}\left(\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{\sin\varphi}{\tan\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right) \quad L_z = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial\varphi}$$

$$L_\pm = \hbar e^{\pm i\varphi}\left(\pm\frac{\partial}{\partial\theta} + i\cot\theta\frac{\partial}{\partial\varphi}\right) \qquad L^2 = -\hbar^2\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{1}{\tan\theta}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)$$

9) לפלסיאן בקואורדינאטות כדוריות: $\nabla^2 = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}r - \frac{L^2}{\hbar^2 r^2} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{L^2}{\hbar^2 r^2}$

10) ע"ע וו"ע של L_x ו- L_y בבסיס המ"ע של L_z :

$$L_x: \begin{cases} 0: \ \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|U_1\rangle - |U_3\rangle\right) \\ \hbar: \ \frac{1}{2}\left(|U_1\rangle + \sqrt{2}|U_2\rangle + |U_3\rangle\right) \\ -\hbar: \frac{1}{2}\left(|U_1\rangle - \sqrt{2}|U_2\rangle + |U_3\rangle\right) \end{cases} \quad L_y: \begin{cases} 0: \ \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|U_1\rangle + |U_3\rangle\right) \\ \hbar: \ \frac{1}{2}\left(-i|U_1\rangle + \sqrt{2}|U_2\rangle + i|U_3\rangle\right) \\ -\hbar: \frac{1}{2}\left(i|U_1\rangle + \sqrt{2}|U_2\rangle - i|U_3\rangle\right) \end{cases}$$

אטום מימן (ודמוי אטום מימן):

1) פוטנציאל מרכזי: $V(r)=\frac{ze^2}{r}$

2) מצבים עצמיים: א) $\psi(r,\theta,\varphi)=\varphi_{nlm}=R_{nl}(r)Y_{lm}(\theta,\varphi)$

ב) מספרים קוונטיים:

$E_n:\quad n=1,2,3,...$

$L^2:\quad l=0,1,2,...,n-1=s,p,d,f,g,....$

$L_z:\quad m=-l,-l+1,...,l-1,l$

ג) המ"ע מנורמלים:

$$1=\langle n,l,m|n,l,m\rangle=\int_{4\pi}d\Omega\int_0^\infty r^2dr\varphi^*_{nlm}\varphi_{nlm}=\int_0^\infty r^2dr\left|R_{nl}(r)\right|^2$$

ד) א"ג של מ"ע: $\langle n',l',m'|n,l,m\rangle=\delta_{n'n}\delta_{l'l}\delta_{m'm}$

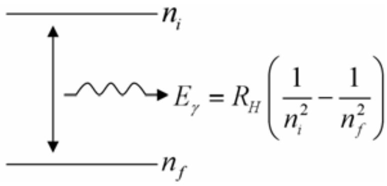
בפרט עבור l-ים שווים: $\int_0^\infty r^2drR_{n'l}(r)R_{nl}(r)=\delta_{n'n}$

*** לשים לב:** עבור $l\neq l'$ לא מתקבלת א"ג של $\langle R_{nl}|R_{n'l'}\rangle$!!!

3) רמות אנרגיה: $\mu=\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\qquad E_n=\frac{-\mu\left(ze^2\right)^2}{2\hbar^2}\frac{1}{n^2}$

בפרט עבור מימן: $E_n=-R_H\frac{1}{n^2}\quad,\quad R_H=\frac{m_em_p}{m_e+m_p}\frac{e^4}{2\hbar^2}$

4) מעברים בין רמות אנרגיה:



** בהתאם לכללי הברירה:*

$\Delta l=\pm1$

$\Delta m=\pm1,0$

5) פונקציות שימושיות:

$$R_{10}=\frac{2}{a_0^{3/2}}\exp\left(\frac{-r}{a_0}\right)$$

$$R_{20}=\frac{2}{\left(2a_0\right)^{3/2}}\left(1-\frac{r}{2a_0}\right)\exp\left(\frac{-r}{2a_0}\right)$$

$$R_{21}=\frac{1}{\sqrt{3}\left(2a_0\right)^{3/2}}\frac{r}{a_0}\exp\left(\frac{-r}{2a_0}\right)$$

$$a_0=\frac{\hbar^2}{\mu e^2}=0.53\dot{A}$$

(באטומים דמויי מימן מחליפים* $a_0\to\frac{a_0}{z}$)

תורת הפרעות בת"ל בזמן ולא מנוונת:

1) א) נתון המילטוניאן שאנו יודעים את פתרונותיו + הפרעה:

$$H=H_0+W\quad,W=\lambda H_1\quad \lambda\ll1$$

ב) הפתרונות הידועים: $H_0\left|\varphi_n^{(0)}\right\rangle=E_n^{(0)}\left|\varphi_n^{(0)}\right\rangle$

2) פיתוח בחזקות של λ: $E_n(\lambda)=E_n^{(0)}+\sum_{i=1}^{\infty}\lambda^iE_n^{(i)}\quad,\varphi_n(\lambda)=\varphi_n^{(0)}+\sum_{i=1}^{\infty}\lambda^i\varphi_n^{(i)}$

((i) אינדקס הפרעה.)*

3) תיקון למצבים: $\left|\psi_n\right\rangle=\left|\varphi_n^{(0)}\right\rangle+\sum_{n\neq k}\frac{\left\langle\varphi_k^{(0)}\right|W\left|\varphi_n^{(0)}\right\rangle}{E_n^{(0)}-E_k^{(0)}}\left|\varphi_k^{(0)}\right\rangle$

4) תיקון לאנרגיה (סדר 1): $E_n=E_n^{(0)}+\left\langle\varphi_n^{(0)}\right|W\left|\varphi_n^{(0)}\right\rangle$

5) תיקון לאנרגיה (סדר 2): $E_n=E_n^{(0)}+\left\langle\varphi_n^{(0)}\right|W\left|\varphi_n^{(0)}\right\rangle+\sum_{n\neq k}\frac{\left|\left\langle\varphi_k^{(0)}\right|W\left|\varphi_n^{(0)}\right\rangle\right|^2}{E_n^{(0)}-E_k^{(0)}}$

6) תנאי תקפות: $\left|\left(W\right)_{kn}\right|\equiv\left|\left\langle\varphi_k^{(0)}\right|W\left|\varphi_n^{(0)}\right\rangle\right|\ll\left|E_n^{(0)}-E_k^{(0)}\right|$

$\left|\left(W\right)_{nn}\right|\equiv\left|\left\langle\varphi_n^{(0)}\right|W\left|\varphi_n^{(0)}\right\rangle\right|\ll\left|E_n^{(0)}\right|$

תורת הפרעות בת"ל בזמן מנוונת:

1) לאחר ליכסון של H_0 מקבלים ע"ע וו"ע (חלק עם ניוון).

2) מחברים את המטריצה הנ"ל עם מטריצת ההפרעה.

3) זורקים איברים עם צימוד חלש (בלוקים ללא ניוון, ומקבלים אותה תוצאה לתורת הפרעות ללא ניוון).

4) לבלוקים עם ניוון מלכסנים את הבלוק המתאים של מטריצת ההפרעה ומקבלים: ע"ע וו"ע (והם מהווים את התיקונים מסדר 1 לאנרגיה ומסדר 0 למ"ע).

5) מטריצת ההפרעה: $h_{ij}^{(n)}=\left\langle\varphi_n^{(i)}\right|W\left|\varphi_n^{(j)}\right\rangle$

6) חישוב ע"ע: $\det\left(h-\Delta E_n^{(1)}(k)I\right)=0$

7) מומנט דיפול מגנטי (אפקט זימן): $\vec{M}_L=\left(\frac{-q}{2\mu c}\right)\vec{L}$

בעיית 2 המצבים:

1) תוספת הפרעה קטנה להמילטוניאן שע"ע וו"ע שלו ידועים:

$$H=H_0+W=\begin{pmatrix}E_1 & W_{12}\\ W_{12} & E_2\end{pmatrix}$$

2) ע"ע חדשים: $E_\pm=\frac{E_1+E_2}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{E_1-E_2}{2}\right)^2+W_{12}^2}$

3) מ"ע חדשים: $\begin{pmatrix}|\psi_+\rangle\\ |\psi_-\rangle\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}|\varphi_+\rangle\\ |\varphi_-\rangle\end{pmatrix}$

4) תקפות (הפרעה קטנה): $\tan(2\theta)=\frac{2W_{12}}{E_1+E_2}$

תוספות:

1) גאוסיאן חד מימדי (חבילת גלים):

א) רוחב גאוסיאן: $\exp\left(-\frac{\left(x-x_o\right)^2}{b^2}\right)\to\Delta x=\frac{b}{\sqrt{2}}$

ב) נתבונן במודל חד מימדי של חלקיק חופשי:

$\psi(x,0)=\frac{\sqrt{a}}{(2\pi)^{\frac{3}{4}}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{a^2\left(k-k_o\right)^2}{4}\right)\exp\left(ikx\right)dk$ כלומר על טרנס'

פורייה של: $g(k,0)=\frac{\sqrt{a}}{(2\pi)^{\frac{1}{4}}}\exp\left(-\frac{a^2\left(k-k_o\right)^2}{4}\right)$.

נחשב את ההתמרה ע"י השלמה לריבוע ונקבל:

$$\psi(x,0)=\sqrt[4]{\frac{2}{\pi a^2}}\exp(ik_0x)\exp\left(-\frac{x^2}{a^2}\right)\to\left|\psi(x,0)\right|^2=\sqrt{\frac{2}{\pi a^2}}\exp\left(-\frac{2x^2}{a^2}\right)\Rightarrow\Delta x=\frac{a}{2}$$

ג) ניתן לראות גם שמקבלים: $\Delta k=\frac{1}{a}\Rightarrow\Delta p=\frac{\hbar}{a}\Rightarrow\Delta x\cdot\Delta p=\frac{\hbar}{2}$

ד) התפתחות בזמן: $\psi(x,t)=\frac{\sqrt{a}}{(2\pi)^{\frac{3}{4}}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{a^2\left(k-k_o\right)^2}{4}\right)\exp\left(ikx-\omega(k)t\right)dk$

(מחשבים גם ע"י השלמה לריבוע)*

2) פתרון מ"ש לפוטנציאל בת"ל בזמן:

מבצעים הפרדת משתנים: $\frac{-\hbar^2}{2\mu}U''_{(x)}+VU_{(x)}=EU_{(x)}$

$$\psi(x,t)=U_{(x)}\cdot T_{(t)}\qquad|\ T_{(t)}=\exp\left(-\frac{i}{\hbar}Et\right)$$

3) מקרה פרטי של פיזור פוט' מדרגה:

מקדמי העברה/החזרה נתונים ע"י: $R=\left(\frac{k-q}{k+q}\right)^2\quad;\quad T=\frac{4kq}{\left(k+q\right)^2}$

4) ערכי תצפית רדיאליים: $\left\langle r^k\right\rangle=\int_0^\infty r^{k+2}\,|R_{nl}|^2\,dr$

$$\langle r\rangle=\frac{a_0}{2z}\left[3n^2-l\left(l+1\right)\right]\quad;\quad\left\langle r^2\right\rangle=\frac{a_0n^2}{2z^2}\left[5n^2+1-3l\left(l+1\right)\right]$$

$$\left\langle\frac{1}{r}\right\rangle=\frac{z}{n^2a_0}\quad;\quad\left\langle\frac{1}{r^2}\right\rangle=\frac{z^2}{n^3a_0^2\left(l+0.5\right)}$$

5) אינטגרלים שימושיים: $\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-a(\xi+\beta)^2)d\xi=\sqrt{\pi/a}$

$\int_0^\infty x^ne^{-ax}dx=\frac{n!}{a^{n+1}}$ *(* n שלם ו-a אי שלילי)*

6) קשרים טריגונומטריים:

$\sin(2\alpha)=2\sin\alpha\cos\alpha$	$\sin\alpha\cos\beta=1/2\left(\sin(a+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right)$
$\cos(2\alpha)=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$	$\sin\alpha\sin\beta=1/2\left(\cos(a-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right)$
$\tan(2\alpha)=2\tan\alpha/(1-\tan^2\alpha)$	$\cos\alpha\cos\beta=1/2\left(\cos(a+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right)$
$\sin(3\alpha)=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$	$\tan(\alpha\pm\beta)=(\tan\alpha\pm\tan\beta)/(1\mp\tan\alpha\tan\beta)$
$\cos(3\alpha)=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$	$\sin\alpha\pm\sin\beta=2\sin(a/2\pm\beta/2)\cos(a/2\mp\beta/2)$
$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$	$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos(a/2+\beta/2)\cos(a/2-\beta/2)$
$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$	$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin(a/2+\beta/2)\sin(a/2-\beta/2)$