סיכום חדו"א 2מ': מתוך התרגולים במת'נט

כל הזכויות שמורות ל-לידיה הרי, ולמי שעזר לה לכתוב את התרגולים המצויינים האלה.

חומר שלא מופיע בסיכום (אולי אני אוסיף יותר מאוחר, אולי לא):

- גבולות של פונקציות במספר משתנים
- מציאת נקודות קיצון תחת אילוצים
- שדה משמר במישור ובמרחב

(החמור, 5.7.2005)

נגזרות חלקיות, מישור משיק ודיפרנציאביליות:

<u>הגדרת הנגזרת החלקית:</u>

$$f_x\left(x_0,y_0\right)=\frac{\partial f}{\partial x}\left(x_0,y_0\right)=\lim_{h\to 0}\frac{f\left(x_0+h,y_0\right)-f\left(x_0,y_0\right)}{h}$$

<u>משפט:</u>

למשטח $z=f\left(x,y\right)$ קיים מישור משיק בנקודה $\left(x_0,y_0,f\left(x_0,y_0\right)\right)$ אם ורק אם הפונקציה $f\left(x,y\right)$ דיפרנציאבילית בנקודה $\left(x_0,y_0\right)$.

<u>מישור משיק:</u>

עבור $f\left(x,y\right)$ דיפרנציאבילית בנקודה $\left(x_0,y_0\right)$, המישור המשיק למשטח $z=f\left(x,y\right)$ בנקודה $\left(x_0,y_0,z_0\right)$ נתון על-ידי:

$$z-z_0=f_x\left(x_0,y_0\right)\left(x-x_0\right)+f_y\left(x_0,y_0\right)\left(y-y_0\right)$$

(כאשר $z_0=f\left(x_0,y_0\right)$.)

<u>וקטור ניצב:</u>

לכן, עבור $f\left(x,y\right)$ דיפרנציאבילית בנקודה $\left(x_0,y_0\right)$, הוקטור הניצב למשטח $z=f\left(x,y\right)$ בנקודה $\left(x_0,y_0,z_0\right)$ נתון על-ידי:

$$\vec{N}=\left(f_x,f_y,-1\right)$$

כאשר הנגזרות מחושבות בנקודה $\left(x_0,y_0\right)$.

__הגדרת דיפרנציאביליות:__

תהי $f\left(x,y\right)$ מוגדרת בסביבת $\left(x_0,y_0\right)$. אזי $f\left(x,y\right)$ דיפרנציאבילית ב- $\left(x_0,y_0\right)$ אם ורק אם קיימים שני קבועים A,B וקיימת פונקציה $\varepsilon\left(x,y\right)$ שמקיימת $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\varepsilon\left(x,y\right)=0$ כך שלכל $\left(x,y\right)$ בסביבת $\left(x_0,y_0\right)$ מתקיים:

$$f\left(x,y\right)=f\left(x_0,y_0\right)+A\cdot\left(x-x_0\right)+B\cdot\left(y-y_0\right)+\varepsilon\left(x,y\right)\cdot\sqrt{\left(x-x_0\right)^2+\left(y-y_0\right)^2}$$

__שלבים בבדיקת דיפרניציאביליות של פונקציה:__

0. אם הפונקציה לא רציפה ב- $\left(x_0,y_0\right)$ -- היא לא דיפרנציאבילית.

   אם לפונקציה יש נגזרות חלקיות רציפות -- כי כן דיפרנציאבילית.

1. מחשבים נגזרות חלקיות f_x,f_y בנקודה, בדרך כלל לפי הגדרה.

   אם אחת הנגזרות לא קיימות – הפונקציה לא דיפרנציאבילית.

2. מציבים את הנגזרות החלקיות בנוסחה לבדיקה דיפרנציאביליות ומבודדים את $\varepsilon\left(x,y\right)$.

3. בודקים את הגבול $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\varepsilon\left(x,y\right)=0$, והפונקציה דיפרנציאבילית אס״ם הגבול יוצא אפס.

<u>דיפרנציאביליות ורציפות הנגזרות החלקיות:</u>

<u>בדיקת רציפות של הנגזרות החלקיות:</u>

0. לכל הפונקציה האלמנטריות (פולינומים, אקספוננטים, פונקציות טריגונומטריות, סכומים, הרכבות וכו') יש נגזרות חלקיות רציפות בכל תחום ההגדרה.
1. בודקים שקיים הערך $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$.
2. מחשבים את הנגזרת החלקית בנקודה כללית $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ ובודקים את קיום הגבול $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$.
3. כדי להבטיח רציפות חייב להתקיים: $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$.

<u>משפטי דיפרנציאביליות:</u>

אם f דיפרנציאבילית ב-(x_0, y_0) אזי f רציפה בנקודה.

(אם f לא רציפה ב-(x_0, y_0) אזי f לא דיפרנציאבילית בנקודה.)

אם f דיפרנציאבילית ב-(x_0, y_0) אזי f בעלת נגזרות חלקיות בנקודה.

(אם אחת מן הנגזרות החלקיות של f ב-(x_0, y_0) לא קיימות אזי f לא דיפרנציאבילית בנקודה.)

אם f בעלת נגזרות חלקיות רציפות ב-(x_0, y_0) אזי f דיפרנציאבילית בנקודה.

<u>שלבים בפיתרון שאלה:</u>

בודקים האם הפונקציה...

1. רציפה בנקודה (x_0, y_0).
2. בעלת נגזרות חלקיות רציפות בנקודה (x_0, y_0).
3. דיפרנציאבילית בנקודה (x_0, y_0).
4. בעלת נגזרות חלקיות רציפות בנקודה (x_0, y_0).

כלל השרשרת:

משפט:

תהי $f\left(x,y\right)$ דיפרנציאבילית בנקודה $\left(x_0,y_0\right)$ ותהיינה $x\left(t\right),y\left(t\right)$ פונקציות גזירות בנקודה t_0 כך ש-

$$x\left(t_0\right)=x_0,\ \ y\left(t_0\right)=y_0$$

אזי הפונקציה המורכבת $F\left(t\right)=f\left(x\left(t\right),y\left(t\right)\right)$ גזירה ב- $t=t_0$ ומתקיים:

$$\frac{dF}{dt}\left(t_0\right)=\frac{\partial f}{\partial x}\left(x_0,y_0\right)\cdot\frac{dx}{dt}\left(t_0\right)+\frac{\partial f}{\partial y}\left(x_0,y_0\right)\cdot\frac{dy}{dt}\left(t_0\right)$$

בשלושה משתנים:

באופן דומה (ועם אותם תנאים), מתקיים עבור $F\left(t\right)=f\left(x\left(t\right),y\left(t\right),z\left(t\right)\right)$:

$$\frac{dF}{dt}\left(t_0\right)=\frac{\partial f}{\partial x}\left(x_0,y_0\right)\cdot\frac{dx}{dt}\left(t_0\right)+\frac{\partial f}{\partial y}\left(x_0,y_0\right)\cdot\frac{dy}{dt}\left(t_0\right)+\frac{\partial f}{\partial z}\left(x_0,y_0\right)\cdot\frac{dz}{dt}\left(t_0\right)$$

וקצת יותר מסובך:

נציב פונקציה $u\left(x,y\right)$ בפונקציה במשתנה יחיד $f\left(u\right)$. ההרכבה תיתן פונקציה בשני משתנים:

$$F\left(x,y\right)=f\left(u\left(x,y\right)\right)$$

במקרה זה הכלל דורש ש- f תהיה גזירה ו- u תהיה דיפרנציאבילית, ומתקיים:

$$\frac{\partial F}{\partial x}\left(x_0,y_0\right)=\frac{df}{du}\left(u_0\right)\cdot\frac{\partial u}{\partial x}\left(x_0,y_0\right)$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}\left(x_0,y_0\right)=\frac{df}{du}\left(u_0\right)\cdot\frac{\partial u}{\partial y}\left(x_0,y_0\right)$$

ועכשיו קטסטרופה:

נטפל בפונקציות מהצורה $F\left(u,v\right)=f\left(x\left(u,v\right),y\left(u,v\right)\right)$. כעת נדרוש כי f,x,y יהיו דיפרנציאביליות, נקבל כי הפונקציה המורכבת $F\left(u,v\right)$ גם כן דיפרנציאבילית ומתקיים:

$$\frac{\partial F}{\partial u}\left(u_0,v_0\right)=\frac{\partial f}{\partial x}\left(x_0,y_0\right)\cdot\frac{\partial x}{\partial u}\left(u_0,v_0\right)+\frac{\partial f}{\partial y}\left(x_0,y_0\right)\cdot\frac{\partial y}{\partial u}\left(u_0,v_0\right)$$
$$\frac{\partial F}{\partial v}\left(u_0,v_0\right)=\frac{\partial f}{\partial x}\left(x_0,y_0\right)\cdot\frac{\partial x}{\partial v}\left(u_0,v_0\right)+\frac{\partial f}{\partial y}\left(x_0,y_0\right)\cdot\frac{\partial y}{\partial v}\left(u_0,v_0\right)$$

כלל לייבניץ לגזירה תחת סימן האינטגרל:

עבור גבולות קבועים:

אם $f\left(x,y\right)$ ו- $\frac{\partial f}{\partial y}\left(x,y\right)$ רציפות במלבן $\left\{a\le x\le b,\ c\le y\le d\right\}$,

אזי הפונקציה $F\left(y\right)=\int_a^b f\left(x,y\right)dx$ גזירה לכל $c<y<d$ ומתקיים:

$$F'\left(y\right)=\int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}\left(x,y\right)dx$$

עבור גבולות משתנים:

אם $f\left(x,y\right)$ ו- $\frac{\partial f}{\partial y}\left(x,y\right)$ רציפות במלבן $\left\{a\le x\le b,\ c\le y\le d\right\}$,

ואם $u\left(y\right),v\left(y\right)$ פונקציות גזירות שערכיהן נמצאים בתחום $\left[c,d\right]$,

אזי הפונקציה $F\left(y\right)=\int_{u(y)}^{v(y)} f\left(x,y\right)dx$ גזירה לכל $c<y<d$ ומתקיים:

$$F'\left(y\right)=\int_{u(y)}^{v(y)} \frac{\partial f}{\partial y}\left(x,y\right)dx+v'\left(y\right)\cdot f\left(v\left(y\right),y\right)-u'\left(y\right)\cdot f\left(u\left(y\right),y\right)$$

משפט הפונקציות הסתומות:

<u>עבור משוואה יחידה בשני משתנים :</u>

תהי $F(x,y)$ פונקציה שמוגדרת בנקודה (x_0,y_0) ובסביבתה. נניח שמתקיים :

א. $F(x_0,y_0)=0$,

ב. F בעלת נגזרות חלקיות רציפות בנקודה (x_0,y_0) ובסביבתה,

ג. $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)\neq 0$.

אזי קיימת סביבה של (x_0,y_0) שבה המשוואה $F(x,y)=0$ מגדירה פונקציה יחידה $f(x)$ שמקיימת :

1. $F(x,f(x))\equiv 0$ לכל x בסביבת x_0 ,

2. $y_0=f(x_0)$,

3. f רציפה ב- x_0 ובסביבתה,

4. f גזירה ברציפות ב- x_0 ובסביבתה, ומתקיים :

$$f'(x_0)=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)}$$

<u>עבור משוואה אחת בשלושה משתנים :</u>

תהי $F(x,y,z)$ פונקציה שמוגדרת בנקודה (x_0,y_0,z_0) ובסביבתה. נניח שמתקיים :

א. $F(x_0,y_0,z_0)=0$,

ב. F בעלת נגזרות חלקיות רציפות בנקודה (x_0,y_0,z_0) ובסביבתה,

ג. $\frac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)\neq 0$.

אזי קיימת סביבה של (x_0,y_0,z_0) שבה המשוואה $F(x,y,z)=0$ מגדירה פונקציה יחידה $f(x,y)$ שמקיימת :

1. $F(x,y,f(x,y))\equiv 0$ לכל (x,y) בסביבת (x_0,y_0) ,

2. $z_0=f(x_0,y_0)$,

3. f רציפה ב- (x_0,y_0) ובסביבתה,

4. f בעלת נגזרות חלקיות רציפות ב- (x_0,y_0) ובסביבתה, ומתקיים :

$$\frac{\partial f}{\partial x}\left(x_0,y_0\right)=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}\left(x_0,y_0,z_0\right)}{\frac{\partial F}{\partial z}\left(x_0,y_0,z_0\right)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}\left(x_0,y_0\right)=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}\left(x_0,y_0,z_0\right)}{\frac{\partial F}{\partial z}\left(x_0,y_0,z_0\right)}$$

<u>משפט:</u>

אם $F\left(x,y,z\right)$ בעלת נגזרות חלקיות רציפות עד לסדר k בסביבת $\left(x_0,y_0,z_0\right)$, אז גם לפונקציה הסתומה $z\left(x,y\right)$ (במידה ותנאי המשפט שלעיל מתקיימים) יש נגזרות חלקיות רציפות עד לסדר k.

<u>מישור משיק למשטח שנתון על־ידי משוואה:</u>

תהי $F\left(x,y,z\right)$ בעלת נגזרות חלקיות רציפות ב-$M_0\left(x_0,y_0,z_0\right)$, ונניח שמתקיים:

א. $F\left(M_0\right)=0$,

ב. $\vec{\nabla}F\left(M_0\right)\neq\vec{0}$.

אזי המישור המשיק למשטח הנתון על־ידי המשוואה $F\left(x,y,z\right)=0$ בנקודה M_0 הוא המישור:

$$F_x\left(M_0\right)\cdot\left(x-x_0\right)+F_y\left(M_0\right)\cdot\left(y-y_0\right)+F_z\left(M_0\right)\cdot\left(z-z_0\right)=0$$

והוקטור הניצב למשטח בנקודה M_0 הוא:

$$\vec{N}=\vec{\nabla}F\left(M_0\right)=F_x\left(M_0\right)\hat{i}+F_y\left(M_0\right)\hat{j}+F_z\left(M_0\right)\hat{k}$$

<u>ובאופן דומה:</u>

אם $f\left(x,y\right)$ בעלת נגזרות חלקיות רציפות ב-$\left(x_0,y_0\right)$, ואם $\vec{\nabla}f\left(x_0,y_0\right)\neq\vec{0}$,

אזי הישר המשיק לקו הגובה של $f\left(x,y\right)$ שעובר דרך $\left(x_0,y_0\right)$ הוא הישר:

$$f_x\left(x_0,y_0\right)\cdot\left(x-x_0\right)+f_y\left(x_0,y_0\right)\cdot\left(y-y_0\right)=0$$

והגרדיאנט $\vec{\nabla}f\left(x_0,y_0\right)$ ניצב לקו גובה זה בנקודה $\left(x_0,y_0\right)$.

<u>עקום על פני משטח:</u>

יהי C עקום חלק המוכל כולו במשטח נתון על־ידי המשוואה $F\left(x,y,z\right)=0$. נניח ש-C עובר בנקודה $\left(x_0,y_0,z_0\right)$ שעל המשטח, ונניח ש-F בעלת נגזרות חלקיות רציפות ב-$\left(x_0,y_0,z_0\right)$ ובסביבתה.

אזי הישר המשיק ל-C בנקודה $\left(x_0,y_0,z_0\right)$ מוכל במישור המשיק למשטח ב-$\left(x_0,y_0,z_0\right)$.

מערכות של פונקציות סתומות:

<u>משפט - ניסוח עבור 2 משוואת ב-3 נעלמים:</u>

תהיינה $F(x,y,z),G(x,y,z)$ מוגדרות בנקודה (x_0,y_0,z_0) ובסביבתה. נניח שמתקיים:

א. $F(x_0,y_0,z_0)=0,\ G(x_0,y_0,z_0)=0$,

ב. F,G בעלות נגזרות חלקיות רציפות בנקודה (x_0,y_0,z_0) ובסביבתה,

ג. היעקוביאן:

$$\det\begin{bmatrix}\frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y}\\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y}\end{bmatrix}\neq 0$$

לא מתאפס בנקודה (x_0,y_0,z_0).

אזי קיימת סביבה של (x_0,y_0,z_0) שבה מוגדרות 2 פונקציות יחידות $x(z),y(z)$ שמקיימות:

1. $\begin{cases}F(x(z),y(z),z)=0\\ G(x(z),y(z),z)=0\end{cases}$ לכל z בסביבה של z_0,

2. $x_0=x(z_0),\ \ y_0=y(z_0)$,

3. $x(z),y(z)$ רציפות ב- z_0 ובסביבתה,

4. $x(z),y(z)$ גזירות ברציפות ב- z_0 ובסביבתה.

<u>הערה לגבי נגזרות:</u>

המשפט נותן ביטויים עבור הנגזרות של $x(z),y(z)$ בנקודה z_0:

$$\begin{pmatrix}x'(z_0)\\ y'(z_0)\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}F_x & F_y\\ G_x & G_y\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}F_z\\ G_z\end{pmatrix}\Bigg|_{(x_0,y_0,z_0)}$$

אבל אין לנו צורך בנוסחה הזו – הוקטור $(x'(z_0),y'(z_0),1)$ משיק לעקום $(x(z),y(z),z)$ בנקודה (x_0,y_0,z_0) העקום $(x(z),y(z),z)$ הוא עקום החיתוך של שני המשטחים $F(x,y,z)=0$ ו- $G(x,y,z)=0$, ואנו כבר יודעים את וקטור הכיוון של העקום הזה: $\vec{\nabla}F\times\vec{\nabla}G$, ולכן $(x'(z_0),y'(z_0),1)=\vec{\nabla}F\times\vec{\nabla}G$.

<u>משפט - ניסוח עבור 2 משוואת ב-4 נעלמים:</u>

תהיינה $F(x,y,u,v),G(x,y,u,v)$ מוגדרות בנקודה $M_0(x_0,y_0,u_0,v_0)$ ובסביבתה. נניח שמתקיים:

א. $F(M_0)=0,\ G(M_0)=0$,

ב. F,G בעלות נגזרות חלקיות רציפות בנקודה M_0 ובסביבתה,

ג. היעקוביאן:

$$\det\begin{bmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{bmatrix} \neq 0$$

לא מתאפס בנקודה M_0.

אזי קיימת סביבה של M_0 שבה מוגדרות שתי פונקציות יחידות $u(x,y), v(x,y)$ שמקיימות:

1. $\begin{cases} F(x,y,u(x,y),v(x,y)) = 0 \\ G(x,y,u(x,y),v(x,y)) = 0 \end{cases}$ לכל (x,y) בסביבה של (x_0,y_0),

2. $u_0 = u(x_0,y_0),\ v_0 = v(x_0,y_0)$,

3. $u(x,y), v(x,y)$ רציפות ב-(x_0,y_0) ובסביבתה,

4. $u(x,y), v(x,y)$ בעלות נגזרות חלקיות רציפות ב-(x_0,y_0) ובסביבתה ומתקיים:

$$\begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}\Bigg|_{(x_0,y_0)} = -\begin{pmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{pmatrix}\Bigg|_{(x_0,y_0,u_0,v_0)}$$

<u>כלל אצבע:</u>

בבדיקת היעקוביאן תמיד גוזרים רק לפי המשתנים שרוצים לחלץ!

<u>היפוך מערכת משוואת:</u>

נתבונן במערכת של 2 משוואת ב-4 נעלמים:

$$\begin{cases} u - f(x,y) = 0 \\ v - g(x,y) = 0 \end{cases}$$

ברור שניתן לחלץ ממערכת זו את המשתנים u,v. אך האם ניתן לחלץ גם את המשתנים x,y ולקבל זוג פונקציות $x(u,v), y(u,v)$? אם כן, נאמר כי מערכת משוואת זו הפיכה, שכן הפכנו את המערכת:

$$\begin{cases} u = f(x,y) \\ v = g(x,y) \end{cases}$$

למערכת:

$$\begin{cases} x = h(u,v) \\ y = k(u,v) \end{cases}$$

(נשים לב שניתן להפוך רק מערכות של n משוואת ב-$2n$ נעלמים.)

<u>היפוך מטריצה 2x2:</u>

כדאי לזכור:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

נגזרות מסדר גבוה ומשפט טיילור:

שיוויון הנגזרות המעורבות:

בפרק זה נניח כי לכל הפונקציות יש נגזרות חלקיות רציפות מכל סדר, ולפיכך נוכל לגזור כל פונקציה לפי כל משתנה ובאיזה סדר שנבחר. בפרט יתקיים, למשל:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial y} = \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x}$$

חישוב נגזרות חלקיות מסדר גבוה בנקודה:

אם נרצה לחשב את הנגזרת $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)$ נוכל להציב כבר בהתחלה $y=0$ ולגזור פעמיים לפי x.

אך אם רוצים לחשב את הנגזרת $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ לא ניתן להציב $y=0$ ואז לגזור לפי x, כי עוד נרצה לגזור לפי y לאחר מכן. סיסמת הנגזרות היא אם כן: אין מציבים ערך למשתנה שמתכוונים לגזור לפיו בעתיד, ולאחר שסיימנו לגזור לפי משתנה מסויים אפשרי וכדאי להציב את ערכו.

פיתוח טיילור בשני משתנים עד לסדר 3:

תהי $f(x,y)$ בעלת נגזרות חלקיות רציפות עד לסדר 4 בנקודה (x_0,y_0). אזי:

$$f(x_0+h,y_0+k) = f(x_0,y_0) + \frac{1}{1!}\left[f_x \cdot h + f_y \cdot k\right] + \frac{1}{2!}\left[f_{xx}\cdot h^2 + 2f_{xy}\cdot hk + f_{yy}\cdot k^2\right] + \frac{1}{3!}\left[f_{xxx}\cdot h^3 + 3f_{xxy}\cdot h^2k + 3f_{xyy}\cdot hk^2 + f_{yyy}\cdot k^3\right] + R_3$$

כאשר הנגזרות מחושבות כולן בנקודה (x_0,y_0), ו-R_3 היא השארית.

כתיב מקוצר של פיתוח טיילור:

$$f(x_0+h,y_0+k) = f(x_0,y_0) + \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^j f(x_0,y_0) + R_n$$

כאשר $\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x_0,y_0)$, למשל, משמעותו:

$$f_{xx}\cdot h^2 + 2f_{xy}\cdot hk + f_{yy}\cdot k^2$$

(כאילו פותחים סוגריים ומפעילים את אופרטור הנגזרת על הפונקציה.)

ובשלושה משתנים:

$$f(x_0+h,y_0+k,z_0+l) = f(x_0,y_0,z_0) + \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y} + l\frac{\partial}{\partial z}\right)^j f(x_0,y_0,z_0) + R_n$$

טענה:

יהי $P(x,y)$ פולינום מסדר n, ותהי $f(x,y)$ פונקציה בעלת נגזרות חלקיות רציפות עד לסדר $n+1$ בנקודה $(0,0)$. אזי P הוא פיתוח טיילור של f בסביבת $(0,0)$ עד לסדר n אם ורק אם:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{f(x,y)-P(x,y)}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^n}=0$$

טענה:

נניח ש-$F(x,y)$ הוא פיתוח טיילור של $f(x,y)$, ו-$G(x,y)$ פיתוח טיילור של $g(x,y)$, כך ששני הפיתוחים הם מסדר n לפחות וסביב אותה נקודה (x_0,y_0).

אזי החלק מתוך המכפלה $F(x,y)\cdot G(x,y)$ שהוא פולינום מסדר n, הוא פיתוח טיילור (מסדר n) של הפונקציה $f(x,y)\cdot g(x,y)$ סביב הנקודה (x_0,y_0).

בעיות קיצון:

אלגוריתם למיון נקודות קיצון בשני משתנים:

0. בודקים ש- f בעלת נגזרות חלקיות עד לסדר 2.
1. מוצאים את כל הנקודות הקריטיות שבהן $\vec{\nabla} f = \vec{0}$ (תנאי הכרחי).
2. רושמים את הביטוי:

$$\Delta(x,y) = f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2 = \det \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix}$$

ובודקים את סימנו בכל אחת מן הנקודות שמצאנו.

3. מיון הנקודות:

אם $\Delta > 0$ וגם $f_{xx} > 0$ אזי זוהי נקודת מינימום.

אם $\Delta > 0$ וגם $f_{xx} < 0$ אזי זוהי נקודת מקסימום.

אם $\Delta < 0$ אזי זוהי נקודת אוכף.

אם $\Delta = 0$ אנחנו לא יודעים מה הולך.

ועבור פונקציה בשלושה משתנים:

0. בודקים ש- f בעלת נגזרות חלקיות עד לסדר 2.
1. מוצאים את כל הנקודות הקריטיות שבהן $\vec{\nabla} f = \vec{0}$ (תנאי הכרחי).
2. רושמים את הביטוי:

$$H_1 = f_{xx}$$

$$H_2 = \det \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix}$$

$$H_2 = \det \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{bmatrix}$$

ובודקים את סימנם בכל אחת מן הנקודות שמצאנו.

3. מיון הנקודות:

$$\begin{cases} H_1 > 0 \\ H_2 > 0 \\ H_3 > 0 \end{cases} \Leftarrow$$ זוהי נקודת מינימום.

$$\begin{cases} H_1 < 0 \\ H_2 > 0 \\ H_3 > 0 \end{cases} \Leftarrow$$ זוהי נקודת מקסימום.

בכל מצב אחר שבו $H_3 \neq 0$ זוהי נקודת אוכף.

אם $H_3 = 0$ שוב לא יודעים.

<u>ערך קיצון לוקלי וגלובלי:</u>

נקודת מינימום מקומית של f היא נקודה (x_0, y_0) שעבורה קיימת סביבה כך ש-$f(x,y) \geq f(x_0, y_0)$ לכל (x,y) בסביבה.

נקודת מינימום כללית של f בתחום D היא נקודה (x_0, y_0) כך ש-$f(x,y) \geq f(x_0, y_0)$ לכל (x,y) ב-D.

<u>אלגוריתם למציאת ערכי קיצון גלובליים:</u>

1. מוצאים את כל הנקודות החשודות של הפונקציה בתחום (נקודות שבהן $\vec{\nabla} f = \vec{0}$ או לא קיים).
2. מוצאים את כל הנקודות החשודות של הפונקציה על שפת התחום.
3. מצרפים לרשימה גם את הנקודות שנמצאות ב"פינות" של התחום, אם קיימות כאלה.
4. מחשבים את ערך הפונקציה בכל הנקודות ומוצאים איפה המינימום ואיפה המקסימום.

<u>מציאת קיצון עם אילוץ:</u>

לא מופיע בתרגול, תחפשו במחברת.

אינטגרל כפול ואינטגרל נשנה:

תחומים פשוטים:

תחום יקרא פשוט ביחס לציר Y אם ניתן לתאר אותו על־ידי אי-השיוויונים:

$$\begin{cases} u(x) \le y \le v(x) \\ a \le x \le b \end{cases}$$

ובאופן דומה עבור תחום פשוט ביחס לציר X.

משפט (האינטגרל הנשנה):

יהי D תחום פשוט ביחס לציר Y, נציג אותו על־ידי אי-השיוויונים:

$$\begin{cases} u(x) \le y \le v(x) \\ a \le x \le b \end{cases}$$

ותהי $f(x,y)$ פונקציה רציפה בתחום D (זהו תנאי מספיק אך לא הכריח, למעשה). אזי מתקיים:

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_a^b \left[\int_{u(x)}^{v(x)} f(x,y)\,dy \right] dx$$

ונזכור: אם התחום פשוט ביחס לציר Y, קודם עושים את האינטגרל לפי y!

תרגיל / משפט:

תהי $h(x)$ רציפה בתחום $a \le x \le b$, ותהי $k(y)$ רציפה בתחום $c \le y \le d$. נסמן $f(x,y) = h(x)\cdot k(y)$, ויהי D המלבן $\{a \le x \le b,\ c \le y \le d\}$. אזי מתקיים:

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)\,dy = \left[\int_a^b h(x)\,dx \right] \cdot \left[\int_c^d k(y)\,dy \right]$$

אינטגרל כפול – נפח, שטח, העתקות לינאריות ורוק'נרול:

משמעויות גיאומטריות:

5.המשמעות הגיאומטרית של האינטגרל הכפול $\iint_D f(x,y)\,dxdy$ היא הנפח שכלוא בין המשטח $z=f(x,y)$ לבין מישור XY, בתחום D.

6.שטח התחום D במישור XY נתון על־ידי האינטגרל $\iint_D dxdy$.

העתקות לינאריות:

ההעתקה הלינארית מתחום $\tilde{D}$ במישור UV לתחום D במישור XY, הנתונה על־ידי:

$$\begin{cases} x = au + bv \\ y = cu + dv \end{cases}$$

מגדילה את התחום $\tilde{D}$ פי:

$$|J| = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \left|\det\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix}\right| = \left|\det\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right| = |ad-bc|$$

ולמעשה הדבר נכון לכל העתקה, לאו דווקא לינארית.

<u>אינטגרל כפול – קואורדינטות מעגליות ואליפטיות והחלפת משתנים:</u>

<u>קואורדינטות מעגליות:</u>

$$\begin{cases} x(r,\theta) = r\cos\theta \\ y(r,\theta) = r\sin\theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta(x,y) = \arctan\frac{y}{x} \end{cases}$$

היעקוביאן $|J| = r$ והתחום המקסימלי $r \geq 0,\ \ 0 \leq \theta \leq 2\pi$.

<u>קואורדינטות אליפטיות:</u>

$$\begin{cases} x(r,\theta) = ar\cos\theta \\ y(r,\theta) = br\sin\theta \end{cases}$$

היעקוביאן $|J| = abr$ והתחום המקסימלי $0 \leq r \leq 1,\ \ 0 \leq \theta \leq 2\pi$.

<u>החלפת משתנים באינטגרל כפול:</u>

נניח שהפונקציות $x(u,v), y(u,v)$ מקיימות:

1. x, y בעלות נגזרות חלקיות רציפות בתחום $\tilde{D}$,
2. x, y מגדירות העתקה חד-חד-ערכית מן התחום $\tilde{D}$ במישור UV על תחום D במישור XY.
3. היעקוביאן $J(u,v) = \det\begin{bmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{bmatrix}$ איננו מתאפס בתחום $\tilde{D}$. (יותר נכון, לא מתאפס יותר מדי...)

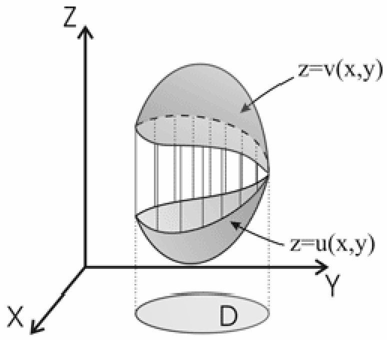
אזי:

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_{\tilde{D}} f\left(x(u,v), y(u,v)\right)\cdot\left|J(u,v)\right| dudv$$

<u>אינטגרל משולש:</u>

<u>קביעת גבולות האינטגרציה:</u>

ניתן לכתוב את האינטגרל המשולש בשתי דרכים שונות:

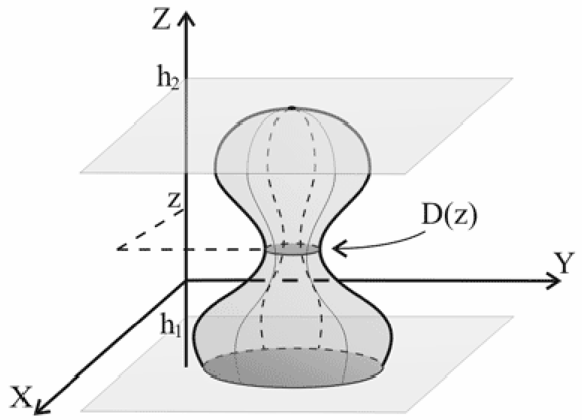


$$(1)\qquad \iint_D \left(\int_{u(x,y)}^{v(x,y)} f(x,y,z)\,dz \right) dxdy$$

$$(2)\qquad \int_{h_1}^{h_2} \left(\iint_{D(z)} f(x,y,z)\,dxdy \right) dz$$

בדרך (1) הגוף חסום מצדדיו על־ידי משטח גלילי שמקביל לציר z, וחסום מעל

ומתחת על־ידי המשטחים $z = v(x,y),\quad z = u(x,y)$.



בדרך (2) הגוף חסום מעל ומתחת על־ידי מישורים מקבילים למישור XY, והחיתוך של הגוף עם מישור כלשהו המקביל למישור XY הוא תחום דו־מימדי $D(z)$.

<u>החלפת משתנים:</u>

נניח שהפונקציות $x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)$ מקיימות:

1. x,y,z בעלות נגזרות חלקיות רציפות בתחום $\tilde{V}$,
2. x,y,z מגדירות העתקה חד-חד-ערכית מן התחום $\tilde{V}$ במרחב UVW על תחום V במישור XYZ.
3. היעקוביאן:

$$J(u,v,w) = \det \begin{bmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{bmatrix} \neq 0$$

איננו מתאפס בתחום $\tilde{V}$. (יותר נכון, לא מתאפס יותר מדי...)

אזי:

$$\iiint_V f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint_{\tilde{V}} f(\ldots u,v,w\ldots) \cdot \left| J(u,v,w) \right| dudvdw$$

<u>משמעויות פיסיקליות:</u>

הנפח של גוף V נתון על־ידי:

$$\iiint_V dxdydz$$

המסה של גוף הכלוא בנפח V ובעל צפיפות מסה $\rho(x,y,z)$ נתונה על־ידי:

$$M=\iiint_V \rho(x,y,z)\,dxdydz$$

שיעורי מרכז המסה של הגוף נתונים על־ידי:

$$\hat{x}=\frac{1}{M}\iiint_V x\rho(x,y,z)\,dxdydz$$

$$\hat{y}=\frac{1}{M}\iiint_V y\rho(x,y,z)\,dxdydz$$

$$\hat{z}=\frac{1}{M}\iiint_V z\rho(x,y,z)\,dxdydz$$

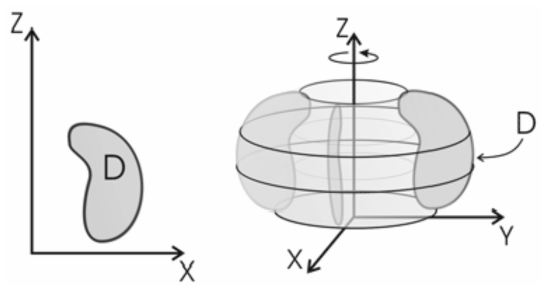
<u>קואורדינטות כדוריות:</u>

$$\begin{cases} x(r,\varphi,\theta)=r\cos\theta\sin\varphi \\ y(r,\varphi,\theta)=r\sin\theta\sin\varphi \\ z(r,\varphi,\theta)=r\cos\varphi \end{cases}$$

היעקוביאן $|J|=r^2\sin\varphi$ והתחום המקסימלי $r\ge 0,\ 0\le\varphi\le\pi,\ 0\le\theta\le 2\pi$.

<u>משפט פאפוס:</u>

יהי D תחום בחצי המישור XZ שבו $x\ge 0$, ויהי V הגוף הנוצר מסיבוב של D סביב ציר Z. אזי הנפח של הגוף V נתון על־ידי $2\pi A\hat{x}$, כאשר A זהו שטח התחום D ו-$\hat{x}$ הוא רכיב x של מרכז המסה של התחום D.



אינטגרלים קווים:

פרמטריזציה של עקום:

עקום הוא חיה חד־מימדית, ולכן הוא מתואר על־ידי פרמטריזציה שבה יש פרמטר יחיד:

$$x(t), y(t), z(t) \qquad t\in[a,b]$$

אינטגרל קווי מסוג ראשון:

יהי C עקום בעל פרמטריזציה:

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k} \qquad t\in[a,b]$$

כך ש-$x(t), y(t), z(t)$ גזירות ברציפות ב-(a,b). נסמן:

$$|\vec{r}'(t)| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}$$

אזי עבור $f(x,y,z)$ רציפה ומוגדרת על C:

$$\int_C f(x,y,z)\,ds = \int_a^b f(x(t),y(t),z(t))\cdot|\vec{r}'(t)|\,dt$$

משמעויות פיסיקליות:

אורכו של עקום נתון על־ידי $\int_C ds$, כלומר אינטגרל קווי מסוג ראשון כאשר $f(x,y,z)\equiv 1$.

מסה של עקום נתונה על־ידי $\int_C \rho(x,y,z)\,ds$ כאשר $\rho(x,y,z)$ היא צפיפות המסה ליחידת אורך.

שטח של משטח גלילי:

יהי C עקום במישור XY, ונניח כי מוגדרת עליו פונקציה $f(x,y)$. נבנה משטח גלילי המקביל לציר Z, כך שהוא יחתוך את מישור XY בזוית ישרה, וגובהו בכל נקודה על C יהיה $f(x,y)$.

במקרה הזה שטח המשטח נתון על־ידי האינטגרל: $\int_C f(x,y)\,ds$.

אינטגרל קווי מסוג שני:

יהי C עקום בעל פרמטריזציה:

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k} \qquad t\in[a,b]$$

כך ש-$x(t), y(t), z(t)$ גזירות ברציפות ב-(a,b). ויהי:

$$\vec{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\hat{i} + Q(x,y,z)\hat{j} + R(x,y,z)\hat{k}$$

שדה וקטורי רציף המוגדר על C. אזי:

$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}\left(x(t),y(t),z(t)\right)\cdot \vec{r}'(t)\,dt$$

ונהוג גם לסמן:

$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_C Pdx + Qdy + Rdz = \int_a^b \left[Px' + Qy' + Rz'\right]dt$$

<u>משמעות פיסיקלית:</u>

נו, עבודה. נשים לב כי יש חשיבות לכיוון המסלול באינטגרל קווי מסוג שני, בעוד שבאינטגרל קווי מסוג ראשון אין לכך חשיבות.

משפט גרין:

משפט:

אם $P(x,y),Q(x,y)$ שתי פונקציות בעלות נגזרות חלקיות רציפות בתחום דו־מימדי D ששפתו היא עקום חלק למקוטעין C, ואם מגדירים את כיוון העקום C כך שהתחום D נמצא משמאלו, אזי:

$$\oint_C Pdx+Qdy=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial x}\right)dxdy$$

שימושים למשפט גרין:

בשני מקרים עיקריים נרצה להשתמש במשפט גרין:

1. כאשר שפתו של תחום פשוט היא מסובכת. למשל, ריבוע זהו תחום דו־מימדי נוח מאוד, אבל שפתו מורכבת מ-4 עקומים. נעדיף לחשב אינטגרל יחיד על התחום הדו־מימדי מאשר ארבע אינטגרלים קווים על השפה.
2. כאשר השדה הוקטורי $\vec{F}=P(x,y)\hat{i}+Q(x,y)\hat{j}$ מסובך, אבל הביטוי $\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial x}$ הוא פשוט – בעיקר כאשר הוא קבוע, או אפילו אפס.

חישוב שטחים:

יהי C עקום סגור במישור XY שכולא בתוכו תחום D וכיוונו כנגד מחוגי השעון. אזי ערכו של כל אחד מן האינטגרלים הבאים שווה לשטח התחום D:

$$\oint_C xdy \qquad \oint_C -ydx \qquad \oint_C \frac{1}{2}(-ydx+xdy)$$

שיטה זו יעילה במיוחד כאשר התחום מסובך, אך שפתו פשוטה.

אינטגרל משטחי מסוג ראשון:

פרמטריזציה של משטח:

משטח הוא חיה דו־מימדית, ולכן הוא מתואר על־ידי פרמטריזציה שבה יש שני פרמטרים:

$$x(u,v),\, y(u,v),\, z(u,v) \qquad (u,v)\in D$$

אינטגרל משטחי מסוג ראשון:

יהי S משטח דו־צדדי בעל פרמטריזציה:

$$\vec{R}(u,v)=x(u,v)\hat{i}+y(u,v)\hat{j}+z(u,v)\hat{k} \qquad (u,v)\in D$$

כך ש- x,y,z גזירות ברציפות לכל (u,v) בתחום D. נסמן:

$$\vec{R}_u=\frac{\partial x}{\partial u}\hat{i}+\frac{\partial y}{\partial u}\hat{j}+\frac{\partial z}{\partial u}\hat{k}, \qquad \vec{R}_v=\frac{\partial x}{\partial v}\hat{i}+\frac{\partial y}{\partial v}\hat{j}+\frac{\partial z}{\partial v}\hat{k}$$

ותהי $f(x,y,z)$ רציפה ומוגדרת על S. אזי:

$$\iint_S f(x,y,z)\,dS=\iint_D f\left(x(u,v),y(u,v),z(u,v)\right)\cdot\left|\vec{R}_u\times\vec{R}_v\right|dudv$$

משמעויות פיסיקליות:

שטח של משטח נתון על־ידי $\int_S dS$, כלומר אינטגרל משטחי מסוג ראשון כאשר $f(x,y,z)\equiv 1$.

מסה של משטח נתונה על־ידי $\int_S \rho(x,y,z)\,dS$ כאשר $\rho(x,y,z)$ היא צפיפות המסה ליחידת שטח.

פרמטריזציה ידועה ונוחה:

אם המשטח נתון לנו בצורה $z=g(x,y)$, נוח להשתמש בדרך כלל בפרמטריזציית x,y, כלומר:

$$\vec{R}(x,y)=x\hat{i}+y\hat{j}+g(x,y)\hat{k} \qquad (x,y)\in D$$

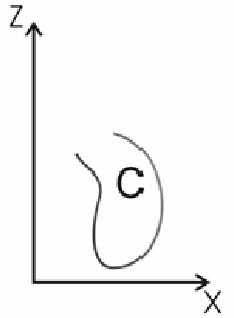
במקרה זה נקבל את האינטגרל:

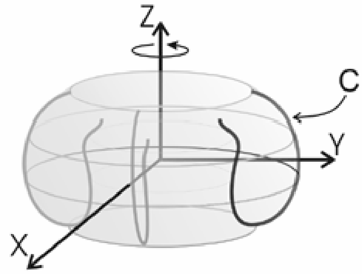
$$\iint_S f(x,y,z)\,dS=\iint_D f\left(x,y,g(x,y)\right)\sqrt{g_x^2+g_y^2+1}\,dxdy$$

כמעט תמיד עדיף להשתמש בפרמטריזציה זו, ובמידת הצורך לבצע החלפת משתנים מאוחר יותר.

משפט פאפוס:

יהי C עקום בחצי המישור XZ שבו $x\geq 0$, ויהי S המשטח הנוצר מסיבוב של C סביב ציר Z. אזי השטח של המשטח S נתון על־ידי $2\pi L\hat{x}$, כאשר L זהו אורך העקום C ו- $\hat{x}$ הוא רכיב x של מרכז המסה של העקום C.





אינטגרל משטחי מסוג שני:

<u>אינטגרל משטחי מסוג שני:</u>

יהי S משטח דו־צדדי בעל פרמטריזציה:

$$\vec{R}(u,v) = x(u,v)\hat{i} + y(u,v)\hat{j} + z(u,v)\hat{k} \qquad (u,v) \in D$$

כך ש- x, y, z גזירות ברציפות לכל (u,v) בתחום D, ויהי $\hat{n}$ וקטור יחידה הניצב למשטח בכל נקודה,

ויהי $\vec{F}(x,y,z)$ שדה וקטורי רציף ומוגדר על S. אזי:

$$\iint_S \vec{F} \cdot \hat{n} dS = \iint_D \vec{F}\left(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\right) \cdot \left(\vec{R}_u \times \vec{R}_v\right) dudv$$

כאשר הפרמטריזציה נבחרת כך ש- $\vec{R}_u \times \vec{R}_v$ מכוון באותו כיוון כמו $\hat{n}$.

<u>משמעות פיסיקלית:</u>

האינטגרל $\iint_S \vec{F} \cdot \hat{n} dS$ הוא השטף של השדה $\vec{F}$ דרך המשטח S בכיוון $\hat{n}$.

<u>פרמטריזציה ידועה ונוחה:</u>

אם המשטח נתון לנו בצורה $z = g(x,y)$, נוח להשתמש בדרך כלל בפרמטריזציית x, y, כלומר:

$$\vec{R}(x,y) = x\hat{i} + y\hat{j} + g(x,y)\hat{k} \qquad (x,y) \in D$$

במקרה זה נקבל את האינטגרל:

$$\iint_S \vec{F}(x,y,z) \cdot \hat{n} dS = \pm \iint_D \vec{F}\left(x, y, g(x,y)\right) \cdot \left(g_x, g_y, -1\right) dxdy$$

כאשר הסימן, $+$ או $-$, נבחר בהתאם לכיוון $\hat{n}$.

כמעט תמיד עדיף להשתמש בפרמטריזציה זו, ובמידת הצורך לבצע החלפת משתנים מאוחר יותר.

משפט גאוס (משפט הדיברגנץ):

הגדרת הדיברגנץ:

עבור שדה $\vec{F}\left(x,y,z\right)=P\hat{i}+Q\hat{j}+R\hat{k}$ הדיברגנץ של $\vec{F}$ מוגדר להיות:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{F}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$$

הגדרה שקולה היא שהדיברגנץ של השדה בנקודה M הוא השטף של השדה $\vec{F}$ דרך משטח כדורי קטן שמרכזו ב- M חלקי נפח הכדור, כלומר:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{F}=\lim_{R\to 0}\frac{1}{\frac{4}{3}\pi R^3}\oiint_{B_R}\vec{F}\cdot\hat{n}dS$$

משפט גאוס:

אם $\vec{F}\left(x,y,z\right)$ שדה וקטורי בעל נגזרות חלקיות רציפות בתחום תלת־מימדי חסום V ששפתו היא משטח חלק למקוטעין S, ואם מגדירים את הנורמל על המשטח S כך שיפנה החוצה מן התחום V, אזי:

$$\oiint_S\vec{F}\cdot\hat{n}dS=\iiint_V\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\,dxdydz$$

שימושים למשפט גאוס:

בשני מקרים עיקריים נרצה להשתמש במשפט גאוס:

1. כאשר שפתו של תחום פשוט היא מסובכת. למשל, קובייה זהו תחום תלת־מימדי נוח מאוד, אבל שפתו מורכבת מ-6 משטחים. נעדיף לחשב אינטגרל יחיד על התחום התלת־מימדי מאשר שישה אינטגרלים משטחיים על השפה.
2. כאשר השדה הוקטורי $\vec{F}=P\hat{i}+Q\hat{j}+R\hat{k}$ מסובך, אבל הדיברגנץ שלו $\vec{\nabla}\cdot\vec{F}$ הוא פשוט – בעיקר כאשר הוא קבוע, או אפילו אפס.

זהויות גרין:

גרין היה ממזר לא קטן שהמציא כמה זהויות שקשה מאוד לזכור... למשל:

עבור f,g פונקציות בעלות נגזרות חלקיות רציפות עד לסדר שני בתחום V ששפתו S בעל נורמל $\hat{n}$ שפונה החוצה מתקיים:

$$\iiint_V f\Delta g\,dxdydz=-\iiint_V\vec{\nabla}f\cdot\vec{\nabla}g\,dxdydz+\oiint_S f\frac{\partial g}{\partial n}dS$$

$$\iiint_V\left(f\Delta g-g\Delta f\right)dxdydz=\oiint_S\left(f\frac{\partial g}{\partial n}-g\frac{\partial f}{\partial n}\right)dS$$

החדשות הטובות הן שכנראה לא נצטרך לזכור את זה למבחן. החדשות הרעות הן שאולי נצטרך להוכיח את זה...

משפט סטוקס:

הגדרת הרוטור:

עבור שדה $\vec{F}\left(x,y,z\right)=P\hat{i}+Q\hat{j}+R\hat{k}$ הרוטור של $\vec{F}$ מוגדר להיות:

$$\vec{\nabla}\times\vec{F}=\det\begin{bmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{bmatrix}=\left(R_y-Q_z\right)\hat{i}+\left(P_z-R_x\right)\hat{j}+\left(Q_x-P_y\right)\hat{k}$$

משפט סטוקס:

אם $\vec{F}\left(x,y,z\right)$ שדה וקטורי בעל נגזרות חלקיות רציפות בסביבה של משטח חלק למקוטעין S ששפתו היא עקום חלק למקוטעין C, ואם מגדירים את הנורמל על המשטח S ואת כיוון העקום C בהתאם ל"כלל יד ימין", אזי:

$$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r}=\oiint_S\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right)\cdot\hat{n}dS$$

שימושים למשפט סטוקס:

בשני מקרים עיקריים נרצה להשתמש במשפט סטוקס:

1. כאשר שפתו של תחום פשוט היא מסובכת. למשל, ריבוע זהו תחום דו־מימדי נוח מאוד, אבל שפתו מורכבת מ-4 עקומים. נעדיף לחשב אינטגרל יחיד על התחום הדו־מימדי מאשר ארבע אינטגרלים קווים על השפה.
2. כאשר השדה הוקטורי $\vec{F}=P\hat{i}+Q\hat{j}+R\hat{k}$ מסובך, אבל הרוטור שלו $\vec{\nabla}\times\vec{F}$ הוא פשוט – בעיקר כאשר הוא קבוע, או אפילו אפס.