הפתק הסגול
www.technion.co.il

פונקציות מרוכבות

104215

סיכום הקורס

תכונות של מספרים מרוכבים

1. $\mathrm{Re}(z)=\dfrac{z+\overline{z}}{2}$
2. $\mathrm{Im}(z)=\dfrac{z-\overline{z}}{2i}$
3. $|z|^2=z\overline{z}$
4. $z=x+iy=r\left(\cos\theta+i\sin\theta\right)=re^{i\theta}$, $r=\sqrt{x^2+y^2}$, $\theta=\arctan\dfrac{y}{x}$
5. $z^n=r^n\left(\cos n\theta+i\sin n\theta\right)=r^ne^{in\theta}$
6. $\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\dfrac{\theta+2\pi k}{n}\right)+i\sin\left(\dfrac{\theta+2\pi k}{n}\right)\right)=\sqrt[n]{r}e^{i\frac{\theta+2\pi k}{n}}\Big|_{k=0,1,\dots n-1}$

<u>גבול של סדרה מרוכבת – הגדרה:</u>

$\lim\limits_{n\to\infty}z_n=L$ אם לכל $\varepsilon>0$ קיים N כך שלכל $n>N$ מתקיים $|z_n-L|<\varepsilon$.

אם $L=A+iB$, ו $z_n=x_n+iy_n$, אז צריך להתקיים $\sqrt{(x_n-A)^2+(y_n-B)^2}<\varepsilon$.

מסקנות:

1. $z_n\to L$ שקול ל $x_n\to A$ וגם $y_n\to B$.

או בצורה פורמלית: $\lim\limits_{n\to\infty}z_n=L\Leftrightarrow\begin{cases}\lim\limits_{n\to\infty}\mathrm{Re}(z_n)=\mathrm{Re}(L)\\ \lim\limits_{n\to\infty}\mathrm{Im}(z_n)=\mathrm{Im}(L)\end{cases}$

2. כל המשפטים וכללי העבודה עם גבולות ממשיים תקפים עבור גבולות מרוכבים.

<u>גבול של פונקציה מרוכבת – הגדרה:</u>

$\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=L$ אם לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta=\delta(\varepsilon,z_0)$ כך שלכל $0<|z-z_0|<\delta$ מתקיים $|f(z)-L|<\varepsilon$.

מסקנות זהות לסדרות: $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=L\Leftrightarrow\begin{cases}\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}u(x,y)=\mathrm{Re}(L)\\ \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}v(x,y)=\mathrm{Im}(L)\end{cases}$

כאשר $f(z)=f(x+iy)=u(x,y)+iv(x,y)$ ו $z_0=x_0+iy_0$.

<u>רציפות של פונקציה מרוכבת – הגדרה:</u>

$f(z)$ רציפה בנקודה z_0 אם $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=f(z_0)$.

כלומר, לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta=\delta(\varepsilon,z_0)$ כך שלכל $0<|z-z_0|<\delta$ מתקיים:

$$|f(z)-f(z_0)|=\sqrt{\left(u(x,y)-u(x_0,y_0)\right)^2+\left(v(x,y)-v(x_0,y_0)\right)^2}<\varepsilon$$

מסקנה: $f(z)$ רציפה בנקודה z_0 שקול לדרישה ש $u(x,y)$ ו $v(x,y)$ רציפות בנקודה (x_0,y_0).
הרכבת פונקציות מרוכבות רציפות, בדומה לפונקציות ממשיות, גם רציפה.

גזירות

לפונקציה $f(z)$ יש נגזרת בנקודה z_0 אם קיים הגבול $f'(z_0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}$

כאשר $h=h_1+ih_2$ ומשמעות $h\to 0$ היא $(h_1,h_2)\to(0,0)$, בכל צורה שהיא.

כללים מוכרים מחשבון דיפרנצאלי ממשי:

1. אם $f(z)$ גזירה, אז היא רציפה.
2. חוקי אריתמטיקה של פונקציות גזירות מתקיימים כמו חוקי אריתמטיקה של גבולות.
3. הרכבת פונקציות מרוכבות גזירות, בדומה לפונקציות ממשיות, גם גזירות.
4. כלל השרשרת: אם $f(z)$ ו $g(w)$ גזירות, אז $g(f(z))$ גזירה ונגזרתה:

$$g(f(z_0))'=g'(f(z_0))\cdot f'(z_0)$$

משוואות קושי-רימן – הגדרה:

תהי $f(z)=f(x+iy)=u(x,y)+iv(x,y)$ פונקציה מרוכבת.

אם מתקיימות שתי המשוואות: $\begin{cases}u_x=v_y\\ u_y=-v_x\end{cases}$ אז $f(z)$ מקיימת את משוואות קושי-רימן.

<u>משפטים:</u>

1. אם $f(z)$ גזירה בנקודה z_0 אז היא מקיימת משוואות קושי-רימן שם ומתקיים $f'(z)=u_x+iv_x$.
2. תהי $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$. u,v דיפרנציאביליות ב (x_0,y_0) ומקיימות שם את משוואות קושי-רימן אס"ם $f(z)$ גזירה ב $z_0=x_0+iy_0$.
3. $f(z)=u+iv$ אנליטית אס"ם u,v הרמוניות צמודות.
4. בתחום פשוט-קשר, לכל פונקציה הרמונית קיימת הרמונית צמודה.
5. $f(z)$ מקיימת את משוואות קושי-רימן בתחום D אס"ם $\dfrac{\partial f}{\partial \bar z}=0$ בכל התחום ואז

$$\frac{\partial f}{\partial z}=f'(z)=u_x+iv_x$$

כאשר מגדירים: $\dfrac{\partial f}{\partial \bar z}\triangleq\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}+i\dfrac{\partial f}{\partial y}\right),\quad \dfrac{\partial f}{\partial z}\triangleq\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}-i\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)$

אנליטיות של פונקציה מרוכבת

<u>אנליטיות – הגדרה</u>

$f(z)$ נקראת אנליטית בנקודה z_0 אם יש לה נגזרת ב z_0 ובסביבה מסוימת של z_0.

סכום, הפרש, מכפלה, חילוק והרכבה של פנקציות אנליטיות היא פונקציה אנליטית.

<u>משפטים</u>

1. אם $f(z)=u+iv$ אנליטית ב z_0, אז ל u,v יש נגזרות חלקיות רציפות בסביבת z_0.
2. $f(z)$ אנליטית בנקודה z_0 אס"ם היא מקיימת את משוואות קושי-רימן בסביבה של z_0.
3. אם $f(z)$ אנליטית בנקודה z_0 וגם $f'(z_0)\neq 0$ אז $f(z)$ קונפורמית ב z_0.

פונקציות הרמוניות

פתרונות של משוואת לפלס: $\Delta u=u_{xx}+v_{yy}=0$ נקראות פונקציות הרמוניות.

אם $f(x+iy)=u+iv$ מקיימת את משוואות קושי-רימן אז $u_{xx}+u_{yy}=0$ וגם $v_{xx}+v_{yy}=0$. u,v נקראות פונקציות הרמוניות צמודות.

בתחום פשוט קשר, ל u הרמונית יש v הרמונית צמודה.

נגזרת חלקית של פונקציה הרמונית – גם היא הרמונית.

העתקה קונפורמית

העתקה (פונקציה) נקראת קונפורמית אם היא שומרת, תחת ההעתקה, על זוויות חיתוך ועל מגמת הזווית בין עקומים.

אם $f(z)$ פונקציה אנליטית בנקודה z_0 וגם מתקיים $f'(z_0)\neq 0$, אז f קונפורמית בנקודה z_0.

העתקות מביוס

צורה כללית של העתקת מביוס: $w=\dfrac{az+b}{cz+d}$

הטרנספורמציה ההפוכה במקרה זה: $z=\dfrac{-wd+b}{cw-a}$, וזו גם העתקת מביוס.

העתקת מביוס מעבירה מעגלים וישרים אל מעגלים וישרים.

כל העתקת מביוס היא חח"ע וקונפורמית.

ניתן לקבוע העתקה מביוס יחידה ע"י 3 נקודות תחת ההעתקה:

$$\frac{w-w_1}{w-w_3}\cdot\frac{w_2-w_3}{w_2-w_1}=\frac{z-z_1}{z-z_3}\cdot\frac{z_2-z_3}{z_2-z_1}$$

<u>נקודות אינברסיות – הגדרה:</u>

שתי נקודות נקראות אינברסיות לגבי מעגל אם הן על אותה הקרן דרך ראשית המעגל, ומכפלת מרחקיהן ממרכז המעגל שווה לרדיוס בריבוע.

נקודה אינברסית לנקודה על שפת המעגל היא הנקודה עצמה.

נקודה אינברסית למרכז המעגל היא ∞.

נקדה אינברסית לגבי ישר היא הסימטרית לה ביחס לישר (מעגל שרדיוסו ∞).

משפט:

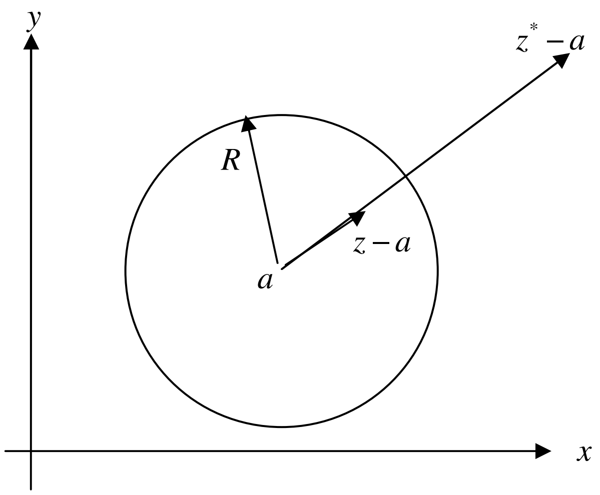
אם z_1,z_2 אינברסיות ביחס למעגל/ישר,

ו T טרנספורמצית מביוס, אז $T(z_1),T(z_2)$ אינברסיות לגבי התמונה של אותו מעגל/ישר.

<u>הנוסחה למציאת נקודה אינוורסית שנייה ביחס למעגל מוכלל:</u>

בהינתן מרכז של מעגל מוכלל a ונק' z, z^* (אינוורסית של z ביחס למעגל a) תקיים את התנאי הבא:

$$\left(z^*-a\right)\overline{\left(z-a\right)}=r^2$$



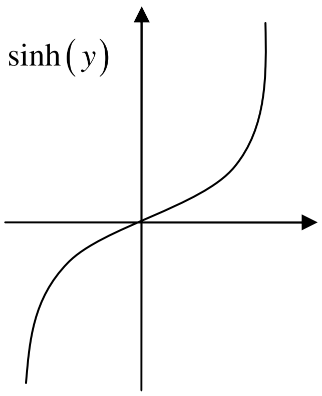
<u>תזכורת: פונקציות היפרבוליות ממשיות</u>

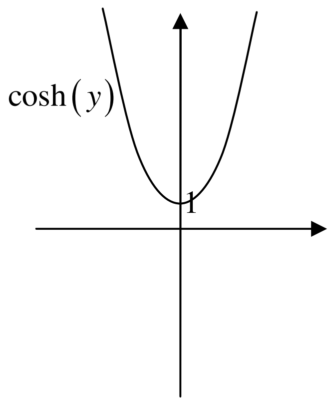
עבור $y\in\mathbb{R}$, מגדירים

$$\sinh(y)\triangleq\frac{e^{y}-e^{-y}}{2}\quad,\quad\cosh(y)\triangleq\frac{e^{y}+e^{-y}}{2}$$

זהויות/תכונות:

$$\sinh'(y)=\cosh(y)$$
$$\cosh'(y)=\sinh(y)$$
$$\cosh^{2}(y)-\sinh^{2}(y)=1$$





<u>העתקות אלמנטריות</u>

1. הפונקציה המעריכית:
הגדרה: $\exp(z)=e^{z}=e^{x+iy}\equiv e^{x}(\cos y+i\sin y)$
תכונות הפונקציה המעריכית:
   א. התכונות הידועות מחשבון ממשי: $\left(e^{z}\right)'=e^{z}$, $e^{z_1}\cdot e^{z_2}=e^{z_1+z_2}$
   ב. $\overline{e^{z}}=e^{\overline{z}}$
   ג. $\left|e^{z}\right|=\left|e^{x+iy}\right|=e^{x}$
   ד. מחזוריות. מהגדרת הפונקציה המעריכית נובע מחזור בחלק המדומה:
   $e^{x+iy}=e^{x+i(y+2\pi k)}$, כלומר $e^{z}=e^{z+i2\pi k}$ - מחזוריות של $i2\pi k$

2. ההפוכה לפונקציה המערכיתי – הלוגריתם:
הגדרה: $\log(z)\equiv\ln|z|+i\arg(z)$.
$\log(z)$ היא פונקציה רב ערכית, כי e^{z} היא פונקציה מחזורית. כלומר:
$\log(z)=\ln|z|+i\left(\arg(z)+2\pi k\right)$, כי $\arg(z)$ רב ערכית.
$\log(z)$ אנליטית ב $\{\mathbb{C}\setminus\{0\}\}$.
$Log(z)=\ln|z|+iArg(z)$ הוא הענף העיקרי של $\log(z)$, כאשר $Arg(z):\mathbb{C}\setminus\{0\}\mapsto[-\pi,\pi]$ הוא הארגונמט העיקרי.
תכונות: $\left(\log(z)\right)'=\frac{1}{z}$
קשר בין אקספוננט ללוגריתם:

$$e^{\log(z)}=e^{Log|z|+i(\theta+2\pi k)}=e^{Log|z|}\left(\cos(\theta+2\pi k)+i\sin(\theta+2\pi k)\right)=r(\cos\theta+i\sin\theta)=z$$
$$\log\left(e^{z}\right)=\log\left(e^{x+iy}\right)=\log\left(e^{x}(\cos y+i\sin y)\right)=Log\left(e^{x}\right)+i(y+2\pi k)=x+iy+i2\pi k=z+i2\pi k$$

3. פונקציות טריגונומטריות.
הגדרת פונקציות טריגונומטריות והיפרבוליות מרוכבות:

$$\sin(z) \triangleq \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} \qquad \sinh(z) \triangleq \frac{e^{z}-e^{-z}}{2}$$

$$\cos(z) \triangleq \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} \qquad \cosh(z) \triangleq \frac{e^{z}+e^{-z}}{2}$$

תכונות/זהויות:

$$\sin(z)=\sin(x+iy)=\sin(x)\cosh(y)+i\cos(x)\sinh(y)$$

$$\cos(z)=\cos(x+iy)=\cos(x)\cosh(y)-i\sin(x)\sinh(y)$$

$$\cosh^2(z)-\sinh^2(z)=1$$

$$\sin^2(z)+\cos^2(z)=1$$

$$\sin(z)'=\cos(z) \qquad ; \qquad \cos(z)'=-\sin(z)$$

$$\sinh(z)'=\cosh(z) \qquad ; \qquad \cosh(z)'=\sinh(z)$$

$$\sin(z_1+z_2)=\sin(z_1)\cos(z_2)+\cos(z_1)\sin(z_2)$$

$$\overline{\sin(z)}=\sin(\overline{z})$$

4. חזקות מרוכבות:

הגדרה: לכל $z,a\in\mathbb{C}$: $z^a \triangleq e^{a\log(z)}$

נפתח: $z^a = e^{a\log(z)} = e^{a(\log|z|+i(\theta+2\pi k))} = e^{aLog(r)}\cdot e^{ia\theta}\cdot e^{ia2\pi k}$

וכך רואים שאם $a\in\mathbb{Z}$, נקבל תוצאה אחת, אחרת נקבל ∞ ערכים שונים.

ענפים אנליטיים

תהי $F(z)$ פונקציה רב-ערכית בתחום D. הפונקציה $f(z)$ תיקרא ענף אנליטי של $F(z)$ ב D אם $f(z)$ אנליטית ב D ולכל $z\in D$ מתקיים $f(z)\in F(z)$

דוגמאות לפונקציות

$f(z)=\overline{z}$	לא גזירה בשום נקודה	לא אנליטית ב $\mathbb{C}$	
$f(z)=\lvert z\rvert^2$	גזירה רק ב $z=0$, ושם $f'(0)=0$	לא אנליטית ב $\mathbb{C}$	
$f(z)=\arg(z)$		לא אנליטית כי $\arg(z)=\arctan\left(\frac{y}{x}\right)+0i$	
העתקת מביוס $w=\dfrac{az+b}{cz+d}$			
פולינום		פונקציות שלמות	
מנת פולינומים		הכל אנליטי בתחום ההגדרה	
$u(x,y)=\ln\left(x^2+y^2\right)$	ב $\{\mathbb{C}\setminus(0,0)\}$ הרמונית ההרמונית הצמודה שלה צריכה להיות $v=\arctan\dfrac{y}{c}$ אבל זו לא חד-ערכית ולכן אין לה צמודה		
$f(z)=z+(a+ib)$	העתקת הזזה		
$f(z)=r(\cos\theta+i\sin\theta)z$	סיבוב ב θ וניפוח פי r		
$f(z)=z^2$	אנליטית וקונפורמית לכל $z\neq 0$	מעתיקה את מעגל היחידה לעצמו, פעמיים.	מכפילה זווית פי 2
$f(z)=z^{\frac{1}{2}}$	יש לה 2 ענפים		מכווצת זווית פי 2
$f(z)=e^z$	אנליטית בכל המישור		

אינטגרלים

אינטגרל של פונקציה מרוכבת, התלויה במשתנה ממשי $f(t)=u(t)+iv(t)$:

$$\int_a^b f(t)dt=\int_a^b\left[u(t)+iv(t)\right]dt=\int_a^b u(t)dt+i\int_a^b v(t)dt$$

אינטגרל של פונקציה מרוכבת, לאורך עקום חלק :

$$\gamma:[a,b]\mapsto\mathbb{C}:\begin{cases}z(t)=x(t)+iy(t)\\ a\le t\le b\end{cases}$$

$$\int_\gamma f(z)dz=\int_a^b f(z(t))\frac{dz}{dt}dt=\int_a^b\left[u\left(x(t),y(t)\right)+iv\left(x(t),y(t)\right)\right]\left[\frac{dx}{dt}+i\frac{dy}{dt}\right]dt$$

$$=\int_a^b\left[u\frac{dx}{dt}-v\frac{dy}{dt}\right]dt+i\int_a^b\left[v\frac{dx}{dt}+u\frac{dy}{dt}\right]dt$$

ובכתיב סמלי :

$$\int_\gamma f(z)dz=\int_\gamma udx-vdy+i\int_\gamma vdx+udy$$

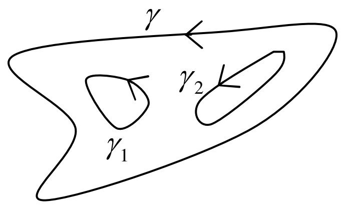
<u>הערה</u> : בעזרת משפט גרין מוכיחים שאינטגרל על מסלול סגור של פונ' שלמה הוא אפס.

תזכורת משפט גרין :

$$\oint_\gamma Pdx+Qdy=\iint_D\left(Q_x-P_y\right)dxdy$$

משפטים :

1. אם $f(z)$ אנליטית בתחום פשוט קשר D, אז $F(z)=\int_{z_0}^{z}f(z)dz$ אנליטית בתחום, ו $F'(z)=f(z)$
2. אם $f(z)$ אנליטית בתחום D ו $\gamma:[a,b]\mapsto D$ עקום חלק בתחום,
אז : $\int_\gamma f'(z)dz=f\left(z(b)\right)-f\left(z(a)\right)$
3. משפט קושי-גורסה :
יהי תחום D ששפתו γ חלקה למקוטעין,
עם מספר סופי של חורים, אזי
$$\int_\gamma f(z)dz=\int_{\gamma_1}f(z)dz+\int_{\gamma_2}f(z)dz$$



4. משפט מוררה :
תהי $f(z)$ רציפה בתחום פשוט קשר D. אם $\oint_\gamma f(z)dz=0$
לכל מסלול סגור γ ב D, אז $f(z)$ אנליטית.
5. נוסחת קושי :
אם $f(z)$ אנליטית על עקום פשוט וסגור γ ובפנימו D, ו z_0 נקודה בפנים התחום D, אזי
$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma\frac{f(z)}{z-z_0}dz$$
6. נוסחת קושי המורחבת :
$$f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_\gamma\frac{f(z)}{\left(z-z_0\right)^{n+1}}dz$$
7. לפונקציה אנליטית בתחום D יש נגזרות מכל סדר, וכולן אנליטיות בתחום.

8. משפט הערך הממוצע של גאוס: אם $f(z)$ אנליטית ב z_0 ובסביבתה, אז $f(z_0)$ שווה לממוצע של ערכי f על מעגלים סביב z_0, ברדיוס כלשהו: $f(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(z_0+re^{i\theta}\right)d\theta$.

הערה: בעזרת משפט (6) מוכיחים את משפט ליוביל ותרגילים שמבוקש להוכיח שפוננקציה מסויימת היא פולינום ממעלה מסויימת לכל היותר (רצוי לדעת להוכיח).

<u>תכונות האינטגרל המרוכב:</u>

1. תכונה שנובעת מאי שיוויון המשולש: $\left|\int_a^b f(t)dt\right| \le \int_a^b |f(t)|dt$
2. $-\int_\gamma f(z)dz=\int_{-\gamma} f(z)dz$, כאשר $-\gamma$ הוא עקום במגמה הפוכה לזה של γ.
3. $\int_{\gamma_1\cup\gamma_2} f(z)dz=\int_{\gamma_1} f(z)dz+\int_{\gamma_2} f(z)dz$
4. $\left|\int_\gamma f(z)dz\right|\le M\cdot L$, כאשר $|f(z)|\le M$ ואורך העקום הוא L.

עקרון המכסימום המקומי:

תהי $f(z)$ אנליטית בתחום D. אם (z) אינה קבועה ב D, אז אין ל $|f(z)|$ מכסימום מקומי ב D.

עקרון המכסימום:

אם D תחום חסום, ו $f(z)$ אנליטית בפנים D ורציפה על שפת D (נסמן ∂D) (סה"כ f רציפה ב $D\cup\partial D$, קבוצה סגורה וחסומה), אזי המכסימום $\max_D|f(z)|$ מתקבל בנקודה/נקודות על ∂D.

עקרון המינימום:

אם D תחום חסום, ו $f(z)$ אנליטית ב D ורציפה על ∂D (שפת D) ו $f(z)\ne 0$ לכל $z\in D$, אז $\min_D|f(z)|$ מתקבל ב ∂D

משפט ליוביל:

תהי $f(z)$ שלמה (אנליטית בכל $\mathbb{C}$). אם f חסומה בכל המישור אז היא קבועה.

משפט (הכללה של ליוביל):

תהי $f(z)$ שלמה. $f(\mathbb{C})$ התמונה של f. אם $\mathbb{C}\setminus f(\mathbb{C})$ מכילה קבוצה סגורה, אזי $f(z)$ קבועה.

משפט:

תהי $f(z)$ אנליטית. אם $|f(z)|$ קבועה, אז $f(z)$ קבועה.

<u>טורי פונקציות</u>

משפט:

אם $f_n(z)$ סדרת פונקציות אנליטיות בתחום D, ו $f_n(z)$ מתכנסות במידה שווה לפונקציה $f(z)$, בסביבת נקודה $z_0\in D$, אזי $f(z)$ אנליטית ב z_0.

הכללה:

באותם תנאי המשפט, עם סדרת הפונקציות $f_n^{(k)}(z)$ מתכנסת ל $f^{(k)}(z)$.

טור חזקות סביב z_0: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$

תכונות טור חזקות:

1. לטור חזקות רדיוס התכנסות: $R=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$. הטור מתכנס עבור $|z-z_0|<R$.

   נוסחת קושי-אדמר: $R=\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$
2. טור חזקות מתכנס בהחלט עבור $|z-z_0|<R$ (גם $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n||z-z_0|^n$ מתכנס עבור $|z-z_0|<R$).
3. לכל $0<r<R$, טור חזקות מתכנס במידה שווה בתחום $|z-z_0|\le r$.
4. מותר לגזור ולבצע אינטגרציה איבר-איבר בטור. כלומר: $\frac{d}{dz}\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{d}{dz}\left(a_n(z-z_0)^n\right)$

   וגם $\int\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\int\left(a_n(z-z_0)^n\right)$
5. מבחן המנה: טור יתכנס כאשר $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|<1$.

טור טיילור

טור טיילור של $f(z)$ אנליטית ברדיוס r_0 סביב $z=z_0$:

$$f(z)=f(z_0)+f'(z_0)(z-z_0)+\ldots+\frac{f^{(n-1)}(z_0)}{(n-1)!}(z-z_0)^{n-1}+R_n$$

כאשר השארית $R_n=\frac{1}{2\pi i}\left(\oint_c\frac{f(s)}{(s-z_0)(s-z)}ds\right)(z-z_0)^n$

משפט:

השארית $R_n=\frac{1}{2\pi i}\left(\oint_c\frac{f(s)}{(s-z_0)(s-z)}ds\right)(z-z_0)^n\xrightarrow[n\to\infty]{}0$ לכל נקודה פנימית ברדיוס r_0.

משפט:

אם $f(z)$ אנליטית בתחום D, ו $z_0\in D$ נקודה פנימית, אז ל $f(z)$ יש טור טיילור שמתכנס בעיגול מכסימלי סביב z_0 שמוכל ב D. טור טיילור מתכנס במידה שווה בפנים העיגול.

אפסים של פונקציה

אם $f(z)$ אנליטית בתחום D ו $z_0\in D$ ונניח $f^{(n-1)}(z_0)=\ldots=f'(z_0)=f(z_0)=0$ אזי ל $f(z)$ אפס מסדר n בנקודה z_0.

לפונקציה אנליטית יש אפסים מבודדים בלבד.

משפט היחידות:

יהיו $f(z)$, $g(z)$ אנליטית בתחום D. יש סדרת נקודות $\{z_n\}\xrightarrow[n\to\infty]{}z_0\in D$ כך ש $g(z_n)=f(z_n)$. אזי $f\equiv g$.

ניסוח שקול:

קיימת $f(z)$ יחידה המקבלת את כל הערכים של הסדרה המתכנסת $\{z_n\}\xrightarrow[n\to\infty]{}z_0\in D$, בתחום D.

נקודות סינגולריות של פונקציה (נקודות יוצאות דופן)

נתעסק בנקודות z_0 שבהן $f(z)$ לא אנליטית, אבל היא אנליטית בסביבה של z_0.

סוגי סינגולריות:

1. סינגולריות סליקה:

אם $\lim_{z\to z_0} f(z)=A$ קיים וסופי:

נגדיר $\tilde{f}(z)=\begin{cases} f(z) & z\neq z_0 \\ A & z=z_0 \end{cases}$ וזו אנליטית.

2. קוטב:

אם $\lim_{z\to z_0} f(z)=\infty$. נסמן $g(z)=\frac{1}{f(z)}$, ואז $\lim_{z\to z_0} g(z)=0$. z_0 נקודה סינגולרית סליקה עבר $g(z)$.

נגדיר את: $\tilde{g}(z)=\begin{cases} \frac{1}{f(z)} & z\neq z_0 \\ 0 & z=z_0 \end{cases}$ וזו אנליטית ב z_0. ל $\tilde{g}(z)$ אפס ב z_0 מכפילות מסוימת m, ואז נית

לכתוב את $g(z)$ כך: $g(z)=(z-z_0)^m h(z)$, $h(z_0)\neq 0$.

אז, עבור $f(z)$: $f(z)=\frac{1}{g(z)}=(z-z_0)^{-m}\frac{1}{h(z)}$. z_0 נקרא קוטב מסדר m עבור $f(z)$.

3. סינגולריות עיקרית:

אם $\lim_{z\to z_0} f(z)$ לא קיים.

טורי לורן

צורה כללית, בהכללה עם טור טיילור: $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n=\sum_{m=1}^{\infty} a_{-m}(z-z_0)^{-m}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$

החלק עם החזקות החיוביות: טור טיילור המוכר, מתכנס עבור $|z-z_0|<R_1$

החלק עם החזקות השליליות: החלק העיקרי, מתכנס עבור $\frac{1}{|z-z_0|}<R_2$, או $|z-z_0|>R_2$

טור לורן יתכנס בטבעת: $R_2<|z-z_0|<R_1$.

איבר כללי בטור לורן: $a_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz$, כאשר C מעגל ברדיוס $R_2<r<R_1$.

אם $f(z)$ אנליטית גם בפנים $|z-z_0|\le r_0$, הטור יצתמצם לטור טיילור.

תוצאות:

1. פיתוח טור לורן הוא יחיד (סביב אותו z_0).
2. אם ב z_0 נקודת סינגולריות סליקה, לא נראה חזקות שליליות בטור לורן, בהקשר של נקודה זו.
3. אם ל $f(z)$ קוטב מסדר m בנקודה z_0, לטור לורן של $f(z)$ סבוב z_0 יהיו לכל היותר m חזקות שליליות, כשהשלילית ביותר חייבת להיות $a_{-m}(z-z_0)^{-m}$.
4. אם ל $f(z)$ נקודה סינגולרית עיקרית ב z_0, יהיו אינסוף חזקות שליליות בפיתוח לטור לורן סביב z_0.

משפט:

אם ל $f(z)$ יש נקודה סינגולרית עיקרית ב z_0, אז לכל $a+ib$ יש סדרת נקודות $\{z_n\}\xrightarrow[n\to\infty]{} z_0$ כך ש $\lim_{n\to\infty} f(z_n)=a+ib$.

שארית

הגדרה:

אם $f(z)$ אנליטית בסביבת z_0, אז השארית של $f(z)$ בנקודה z_0 היא:

$\text{Res}(f,z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_c f(z)dz$, כאשר c מסלול המקיף את z_0 ואף לא נקודה סינגולרית אחרת.

משפט:

$\mathrm{Res}(f,z_0)=a_{-1}$, כאשר a_{-1} הוא מקדם לורן של $(z-z_0)^{-1}$, בפיתוח של $f(z)$ בסביבתו המיידית של z_0.

משפט השארית:

אם ל $f(z)$ יש m נקודות סינגולריות מבודדות, בפנים של עקום סגור ופשוט c, אז:

$$\oint_c f(z)dz=2\pi i\sum_{k=1}^{m}\mathrm{Res}(f,z_k).$$

דרכים לחישוב שארית:

1. אם $f(z)=\frac{p(z)}{q(z)}$ ול $q(z)$ אפס פשוט ב z_0, אז $\mathrm{Res}(f,z_0)=\frac{p(z_0)}{q'(z_0)}$.
2. אם ל $f(z)$ קוטב פשוט ב z_0, אז $\mathrm{Res}(f,z_0)=a_{-1}=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)$.
3. אם ל $f(z)$ קוטב מסדר m: $\mathrm{Res}(f,z_0)=\frac{1}{(m-1)!}\cdot\lim_{z\to z_0}\left((z-z_0)^m\cdot f(z)\right)^{(m-1)}$.

משפט:

אם c עקום סגור שמקיף מספר סופי של אפסים וקטבים של $f(z)$, ופרט לקטבים $f(z)$ אנליטית בתוך c, אז:

$\oint_c \frac{f'(z)}{f(z)}dz=2\pi i(N-P)$, כאשר N מספר האפסים הכולל ו P מספר הקטבים הכולל של $f(z)$ בתוך c.

עקרון הארגומנט:

יהי c עקום במישור z, ו Γ תמונתו ע"י $f(z)$ במישור w. אז Γ מקיף את הראשית במישור w בדיוק $N-P$ פעמים.

משפט רושה:

יהיו $f(z)$, $g(z)$ שתי פונקציות אנליטיות על ובפנימו של עקום פשוט וסגור c, אשר מקיימות $|f(z)|>|g(z)|$ על c, אזי ל $f(z)$ ול $f(z)+g(z)$ יש בדיוק אותו מספר אפסים בתוך העקום c, כולל כפילויות.

טיפים למבחן

- אם נתון ש $f=u+iv$, f שלמה. אם u חסום או v חסום - f קבועה. (e^{f} או e^{-if})
- בפיתוח טור לורן של פונקציה זוגית סביב $z=0$, יופיעו רק חזקות זוגיות (בפרט $a_{-1}=0$)
- בפיתוח טור לורן של פונקציה אי-זוגית סביב $z=0$, יופיעו רק חזקות אי-זוגיות
- בסימון תשובה בשאלה אמריקאית, לקרוא טוב את התשובות – לפעמים פריטם קטנים מאוד גורמים לבזבוז זמן, לדוגמא קשה להבחין ב $\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}(z-1)^{-n}$, כשהתשובה שיצאה היא $\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z-1}\right)^{n+1}$.
- לפני שהולכים להשתמש במשפט לצורך פתרון (לא משנה אם שאלה פתוחה או אמריקאית), רשמו את הניסוח המדוייק של המשפט ובדקו שתנאיו מתקיימים.
- הוכחת טענות: לנסות בדרך השלילה, לנסות להגדיר פונקציה חדשה, שימוש במשפטים: משפט היחידות, משפט ליוביל, נוסחת קושי לנגזרת, משפט מוררה דורש רציפות.
- כשמסתכלים על פונקציה, לבדוק את כל התכונות שלה:
  i. זוגית / אי-זוגית
  ii. אנליטיות בתחום
  iii. באיזה תחום מדובר? תחום פשוט קשר? תחום מקיף את הראשית?
  iv. חסומה
  v. חד ערכית? פונקציה הפוכה של פונקציה מחזורית חייבת להיות רב-ערכית
  vi. חד-חד ערכית? חד-חד ערכית בתחום חלקי?
- ל $f(z)$ יש קוטב מסדר m בנקודה z_0 אמ"מ $\lim_{z\to z_0}(z-z_0)^m f(z)=A\neq 0$ וסופי.
- בחישוב אינטגרלים, לא לשכוח לבדוק את עקרון הארגומנט.
- מציאת תמונות של העתקות מוזרות: לנסות לשנות את הביטוי: השלמה לריבוע, גורם משותף, לפרק לכמה העתקות.