מד"ח

מרצה: תפארת סעדון

23 בספטמבר 2004

$Id: partial_diff_eq.lyx,v 1.19 2004/09/23 00:54:32 itay Exp $

תוכן עניינים

1 מבוא

מד"ח משוואה דיפרנציאלית חלקית המתארת קשר בין פונקציה במספר משתנים

$$u = u(x, y, z, ..)$$

לבין נגזרותיה. צורה כללית

$$F(x, y, ..., u, u_x, u_y, u_{xx}, ...)$$

.

סדר המשוואות דרגת הגזירה הגבוה ביותר, למשל $u_x^2 + u_{xt}^2 = 0$ משוואה מסדר שני.

מד"ח לינארית אם כפונקציה לינארית של u ושל נגזרותיה. דוגמא:

$$x^7 u_x + sin(xy) u_y = u$$

לינארית, $uu_x = 0$ לא לינארית.

מד"ח קוזילנאריות אם הנגזרות מהסדר הכי גבוה מופיע במעלה 1. (כשהמקדם יכול להיות פונקציה של x, y, u). למשל $uu_x + u_y^2 = 0$.

פתרונות

פתרון אמתי (קלסי) למד"ח מסדר k פונקציה u ב c^k שמקיימת את המד"ח

פתרון כללי אוסף הפתרונות למד"ר

תרגיל: פתור $u_x = xy, u = \int u_x dx = \int xy dx = \frac{x^2}{2} y + f(y)$

פתור $u_{xy} = 1, u_x = \int u_{xy} dy = y + f(x), u = \int u_x dx = xy + \widetilde{f}(x) + g(y)$

פתרון פרטי כדי לקבוע פתרון פרטי נפתור בעיה הכוללת מד"ח ותנאים נלווים.

תנאי התחלה עבור $u(x, t)$ יהיה למשל מהצורה $u(x, 0) = f(x), u_t(x, 0) = g(x)$.

תנאי שפה עבור $u(x, y)$ כאשר $(x, y) \in D$ אז אפשר להסתכל על $u(\partial D) = f(y)$.

בעיית קושי או בעיית התחלת שפה היא מד"ח + תנאים מלווים.

קיימות שתי גישות:

- לפתור
- חקירה איכותית

נבדוק לגבי בעיית התחלה

- האם קיים פתרון
- האם הוא יחיד
- האם שינוי קטן במשואה או בתנאים גורר שינוי קטן בפתרון (יציבות).

הבעיה נקראת מוצגת היטב - אם מתקיימים 3 התנאים נ"ל.

1.1 משוואות מוכרות

1.1.1 דוגמאות למשוואות ממדעי הטבע מד"ח מסדר ראשון

משוואת ההולכה חומר בעל ריכוז $u(x,y,z,t)$ (סקלר) מתפשט בתוך נוזל שזורם במהירות $\vec{v}(x,y,z,t)=(v_1,v_2,v_3)$. אם נתון שברגע מסוים $t=0$ ריכוז החומר $u_0(x,y,z)$ ריכוז יתפשט לפי המשוואה $\begin{cases} u_t+v_1u_x+v_2u_y+v_3u_z=0 \\ u(x,y,z,0)=u_0(x,y,z) \end{cases}$

משוואות קווזילינארות מסדר ראשון הצורה הכללית עבור $u=u(x,y)$ היא:

$$a(x,y,u)u_x+b(x,y,u)u_y=c(x,y,u)$$

.

מקרה פרטי משוואות לנאריות מסדר ראשון -

$$a(x,y)u_x+b(x,y)u_y+c(x,y)u=d(x,y)$$

1.1.2 מד"ח מסדר שני (נטפל רק בלינאריות)

משוואת הגלים $u(x,y)$ משרעת התנודות של מיתר c מהירות ההתפשטות הגל. $f(x)$ משרעת תחילית, $g(x)$ מהירות התחלתית. המשרעת בכל נק' בכל רגע $u(x,t)$ מתקבל כפתרון $\begin{cases} u_{tt}-c^2u_{xx}=0 \\ u(x,0)=f(x) \\ u_t(x,0)=g(x) \end{cases}$

משוואת החום נתון מוט ארו ודק. נקצה לחשב את הטמפ' במוט $a<x<b$ וכן $k>0$ מקדם הולכת החום. $f(x)$ הטמפ' ברגע נתון $t=0$, $g(x)$ טמפ' $x=a$, $h(t)$ הטמפ' $x=b$. אז $u(x,t)$ יהיה הפתרון של $\begin{cases} u_t-ku_{xx}=0 \\ u(x,0)=f(x) \\ u(a,t)=g(t) \\ u(b,t)=h(t) \end{cases}$

משוואת לפלס $\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0 \\ u(x,y)=f(x,y) \\ u_x(x,y)=g(x,y) \end{cases}$.

2 פתרון משוואות מסדר ראשון

2.1 משוואות לינאריות מסדר ראשון

$$a,b,c,d\in c^1,\{a,b\neq 0\},a(x,y)u_x+b(x,y)u_y+c(x,y)u=d(x,y)$$

2.1.1 שיטת פתרון

1. נפתור מד"ר $\frac{dy}{dx}=\frac{b}{a}$ נקבל פתרון מפורש $y=f(x)$ נרשום את הפתרון בצורה סתומה $F(x,y)=c$
2. נגדיר משתנה חדש $t(x,y)=F(x,y)$
3. נבחר משתנה נוסף $s(x,y)$ כך שהיעקוביאן שונה מ-0. $J=\frac{\partial(s,t)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix} s_x & s_y \\ t_x & t_y \end{vmatrix}$.
4. נבצע החלפת משתנים $v(s,t)=u(x,y)$. ונרשום משוואה חדשה ל v נקבל מד"ר מהצורה $v_s+Av=B$.
5. הפתרון $v=e^{-\int Ads}\left[\int e^{\int Ads}Bds\right]$

6. נבצע שינוי משתנים לקבלת $u(x,y)$

דוגמא אם הפתרון שקבלנו ל $y' = \frac{b}{a}$ הוא $y = f(x)$. נגדיר

$$t(x,y) = y - f(x), s(x,y) = x$$

ואז $J = 1 \times 1 - 0 \times t_x = 1$

דוגמא $2u_x - 3u_y + 2u = 2x$: $\frac{dy}{dx} = \frac{-3}{2}$ כלומר $u = \frac{-3}{2}x + c$ לכן $u + \frac{3}{2}x = c$.

$$\begin{aligned} t(x,y) &= y + \frac{3}{2}x \\ s(x,y) &= x \Rightarrow J = 1 \end{aligned}$$

נגדיר $v(s,t) = u(x,y)$: לפי כלל השרשרת

$$\begin{aligned} s &= x \\ t &= y + \frac{3}{2}x \\ u &= v \\ \Rightarrow u_y &= v_s s_y + v_t t_y = v_t \\ u_x &= v_s s_x + v_t t_x = v_s + \frac{3}{2}v_t \end{aligned}$$

נציב במשוואה $2(v_s + \frac{3}{2}v_t) - 2v_t + 2v = 2s \Rightarrow v_s + v = s$.
הפתרון:

$$v = e^{-\int 1ds}\left[\int se^{\int 1ds}ds + f(t)\right] = e^{-s}\left[se^s - e^s + f(t)\right] = s - 1 + e^{-s}f(t)$$

לחזור למשוואה $u(x,y) = x - 1 + e^{-x}f(y + \frac{3x}{2})$ ■

2.1.2 פיתוח הפתרון למשוואה $(*) au_x + bu_y + cu = d$

נרצה לבצע החלפת משתנים לעבור ל $s(x,y), t(x,y)$ כך ש $J \neq 0$ להגדיר

$$v(s,t) = u(x,y)$$

ולקבל מד"ר $v_s + Av = B$. לפי כלל השרשרת

$$u_x = v_s s_x + v_t t_x, u_y = v_s s_y + v_t t_y$$

נציב ב-$(*)$: $a(v_s s_x + v_t t_x) + b(v_s s_y + v_t t_y) + cv = d$. נוציא v_s, v_t מחוץ לסוגריים. $v_s(as_x + bs_y) + v_t(at_x + bt_y) + cv = d$ נרצה להגדיר $t(x,y)$ שיתקיים $at_x + bt_y = 0$. כלומר $\frac{-t_x}{t_y} = \frac{b}{a}$ מצד שני אם נסתכל על הפונקציה $t(x,y)$ שבה $t_x \neq 0$ אפשר לחלץ $y = f(x)$ ומתקיים $y' = \frac{-t_x}{t_y}$. הפתרון בצורה סתומה $t(x,y) = c$ יקיים

$$y' = \frac{-t_x}{t_y} = \frac{b}{a} \Rightarrow at_x + bt_y = 0$$

(משפט הפונקציות הסתומות $f(x,y)$ $y' = \frac{-f_x}{f_y}$) ולכן מקבלים מד"ר.

דוגמא נתונה $w(x,y) \in c^1$ נפתור $w_y u_x - w_x u_y = 0$ הפתרון הוא $w(x,y) = c$ נגדיר

$$t(x,y) = w(x,y), s(x,y) = x, v(s,t) = u(x,y), u_x = v_s + v_t w_x, u_y = v_t w_y$$

המשוואה $w_y(v_s + v_t w_x) - w_x v_t w_y = 0 \Rightarrow w_y v_s = 0 \Rightarrow v_s = 0 \Rightarrow v = f(t)$.
הפתרון $u = f(w)$.

הערה $w_y u_x - w_x u_y = 0 \Rightarrow J = \frac{\partial(w,u)}{\partial(x,y)} = 0$ לכן מראש יכלנו לפתור $u = f(x)$ למשל

$$xu_x - yu_y = 0 \Rightarrow w = xy \Rightarrow u = f(xy)$$

2.2 משוואות קוואזי-לינאריות

$a(x,y,u)u_x + b(x,y,u)u_y = c(x,y,u)$

דוגמאות

משוואות דיפ' לא מדויקות (מתחום מד"ר)

$$M(x,y) + n(x,y)y' = 0 \Rightarrow M(x,y)dx + n(x,y)dy$$

אם המשוואה המדויקת כלומר $M_y = N_x$ יודעים למצוא פתרון $f(x,y) = c$ ע"י פתרון $f_y = N, f_x = M$ אם המשוואה לא מדויקת מוסיפים גורם אינט-גרציה μ כך ש $\mu M dx + \mu N dy = 0$ מדויקת. כלומר רוציםμN_x $\mu M_y =$ או $\mu M_y + \mu_y M = \mu N_x + \mu_x N$ וזו מד"ח קווזילינארית של μ

משוואת ההולכה (מתחום הכימיה) חומר נשפך לנהר $u(x,y)$ ריכוז החומר בנקודה x בזמן t $[a(t), b(t)]$ התחום שם התפשט החומר סה"כ כמות החומר ברגע כלשהו $\int_{a(t)}^{b(t)} u(x,t)dx = c \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\int_{a(t)}^{b(t)} u(x,t)dx = 0$ (קבוע בהזנחת תהליכים מולקולרים) נסמן

$$\begin{aligned} U = \int u dx \Rightarrow 0 &= \frac{\partial}{\partial t}\left[U(b(t),t) - U(a(t),t)\right] \\ &= U_x(b(t),t)b'(t) + U_t(b(t),t) - (U_x(a(t),t)a'(t) + U_t(a(t),t)) \\ &= u(b(t),t)b'(t) - u(a(t),t)a'(t) + \int_{a(t)}^{b(t)} u_t(x,t)dx \end{aligned}$$

נסמן ב $v(x,t)$ את מהירות זרימת הנהר:

$$v(a(t),t) = a'(t), v(b(t),t) = b'(t)$$

ואז

$$\begin{aligned} 0 &= u(b(t),t)v(b(t),t) - u(a(t),t)v(a(t),t) + \int_{a(t)}^{b(t)} u_t dx \\ &= (u,v)(x,t)|_{x=a(t)}^{b(t)} + \int_{a(t)}^{b(t)} u_t(x,t)dx \\ \Rightarrow &= \int_{a(t)}^{b(t)} (u,v)_x dx + \int_{a(t)}^{b(t)} u_t dx \\ &= \int_{a(t)}^{b(t)} \left[(u,v)_x - u_t\right] dx \end{aligned}$$

כיוון שהאינטגרל לכל גבולות האינטגרציה

$$\begin{aligned} \Rightarrow (uv)_x + u_t &= 0 \\ vu_x + uv_x + u_t &= 0 \end{aligned}$$

2.2.1 פתרון בשיטת הפרמטרים או שיטת הקווים האופייניים

מחפשים פתרון $u(x,t)$ למד"ח קווזילינארית $au_x + bu_y = c$ או פתרון לבעיה הכוללת מד"ח+תנאי $u(x_0(s), y_0(s)) = u_0(s)$

הגדרה אם $u(x,t)$ פתרון למד"ח אז $z = u(x,y)$ נקרא משטח אינטגרלי של מד"ח. התנאי מסומן ע"י γ_0 $(x_0(s), y_0(s), u_0(s))$ ונקראים עקום התחלה

הרעיון נמצא רשת של קווים שכולם על המשטח האינטגרלי ונשחזר את u מהקווים האלו.
למד"ח מקבלים אוסף של משטחים אינטגרלים ולבעיית קושי מקבלים את השטח שמכיל את γ_0 ע"י כך שבוחרים את γ עם נק' התחלה ב γ_0.

שלבי_הפתרון $au_x + bu_y = c(x_0(s), y_0(s), u_0(s))$

1. רושמים מע' של 3 מד"ר

$$\begin{aligned} x_t &= a \\ y_t &= b \\ u_t &= c \end{aligned}$$

2. נציב 3 תנאי התחלה

$$\begin{aligned} x(0,s) &= x_o(s) \\ y(o,s) &= y_0(s) \\ u(0,s) &= u_0(s) \end{aligned}$$

3. פותרים ומקבלים פונקציות

$$\begin{aligned} x &= x(t,s) \\ y &= y(t,s) \\ \tilde{u} &= \tilde{u}(t,s) \end{aligned}$$

ואז $\gamma(t) = (x(t,s), y(t,s), \tilde{u}(s,t))$ נקרא עקום אופייני, קווים אופייניים,אופיין,קרקטרסטיקה

4. אם $J = \left(\frac{\partial(s,t)}{\partial(x,y)}\right) = \begin{vmatrix} s_x & s_y \\ t_x & t_y \end{vmatrix} \neq 0$ אז אפשר לחלץ

$$s = s(x,y), t = t(x,y)$$

להציב ולקבל $u = u(x,y)$

דוגמא $\begin{cases} xuu_x - u_y = 0 \\ u(s,0) = 0 \end{cases}$

1. נפתור

$$\begin{aligned} x_t &= xu \\ y_t &= -1 \\ u_t &= 0 \\ x(s,0) &= s \\ y(s,0) &= 0 \\ u(s,0) &= s \end{aligned}$$

2. נמצא את משוואה

$$\begin{aligned} y(t,s) &= -t + c_2 = -t \\ u(t,s) &= c_1 = s \\ \Rightarrow x_t(t,s) &= sx \Rightarrow ln(x) = st + c_3 \Rightarrow x = c_3 e^{st} \vee x(t=0) = c_3 = s \Rightarrow x = se^{st} \end{aligned}$$

3. נחלץ $\begin{matrix} s=u \\ t=-y \end{matrix} \Rightarrow x = ue^{-uy}$

הסבר גאומטרי לפיתוח הפתרון רוצים לפתרון

$$\begin{aligned} au_x + bu_y &= c \\ \Leftrightarrow au_x + bu_y - c &= 0 \\ \Leftrightarrow (a,b,c)\cdot(u_x,u_y,-1) &= 0 \end{aligned}$$

לכן u משטח אינטגרלי אס"ם הנורמל שלו $\hat{n} \perp (a,b,c)$ עקום אופייני

$$\gamma(t) = (x(y), y(t), \tilde{u}(t))$$

מקיים $\hat{n} \perp (x_t, y_t, \tilde{u_t}) = (a,b,c)$ כלומר המשיק ל γ ניצב לנורמל של הפתרון $z = u(x,y)$ לכן γ בכיוון של המשטח הפותר. אוספים את העקומים האופייניים שמכסים את עקום ההתחלה γ_0. $\gamma(t)$ חותך את המשטח הפותר ב $\gamma(t=0)$ וניצב לנורמל של המשטח הפותר לכן $\gamma(t)$ מוכל כולו במשטח הפותר.

הוכחה אנליטי לקו"י הפתרון

קיום הפתרון

1. למערכת של 3 מד"ר + 3 תנאים קיים פתרון יחיד בסביבה של עקום ההתחלה מקבלים

$$\begin{aligned} x &= x(t,s) \\ y &= y(t,s) \\ \tilde{u} &= u(t,s) \end{aligned}$$

אם $J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)}$ ניתן לחלץ $\begin{matrix} s=s(x,y) \\ t=t(x,y) \end{matrix}$ ולקבל

$$\tilde{u}(s(x,y), t(x,y)) = u(x,y)$$

2. נקרא $u(x,y)$ פתרון כלומר צ"ל

$$\begin{aligned} au_x + bu_y &= c \\ \Leftrightarrow x_t u_x + y_t u_y &= \tilde{u}_t \end{aligned}$$

וזה מתקיים כי $\tilde{u}(t,s) = u(x(s,t), y(s,t)) \Rightarrow \tilde{u}_t = \tilde{u_x} x_t + \tilde{u_y} y_t$

יחידות

למה אם $\gamma = (x(t), y(t), \tilde{u}(t))$ עקום אופייני של $au_x + bu_y = c$ ואם $v(x,y)$ משטח אינטגרלי של אותה בעיה אז המרחק בניהם (על ציר z) קבוע

הוכחה נסמן $d(t) = \tilde{u}(t) - v(x(t), y(t))$ אזי

$$d'(t) = \tilde{u}_t - (v_x x_t + v_y y_t) = c - (v_x x_t + v_y y_t)$$

אבל כיוון ש γ עקום אופייני כלומר פתרון $\tilde{u}_t = c$ וגם v פתרון של הד"ח אז

$$d'(t) = 0 \Rightarrow d = const$$

■

יחידות נניח $j\neq 0$ ונניח $z=u(x,y)$ הפתרון שבנינו למד"ח + תנאי התחלה γ_0. נניח ש $v(x,y)$ פתרון כלשהו של מד"ח+תנאי. u מורכב מאוסף עקומ-ים אופייניים $\gamma(t)$ ניקח פתרון שרירותי $\gamma(t)$ אז $\gamma(t)$ עובר דרך γ_0 ו γ_0 כולו מוכל ב v לכן $\gamma(t)$ חותך את v.ולפי הטענה $\gamma(t)$ מוכל ב v לכן v,u מתלכדים.

■

תרגיל בכל אחד מהסעיפים נפתור מד"ר (אם אפשר) לחשב את J ולצייר קווים אופייניים והטל עקום התחלה

1. $\begin{cases} u_x+u_y=u^2 \\ u(x,0)=1 \end{cases}$

(א) המשוואות האופייניות

$$\begin{aligned} x_t &= 1\Rightarrow x=t+c_1(s) \\ y_t &= 1\Rightarrow y=t+c_2(s) \\ u_t &= u^2\Rightarrow \int\frac{du}{u^2}=\int dt\Rightarrow -\frac{1}{u}=t+c_3(s) \end{aligned}$$

(ב) תנאי התחלה

$$\begin{aligned} x(0,s) &= s\Rightarrow c_1(s)=s\Rightarrow x(t,s)=t+s \\ y(0,s) &= 0\Rightarrow c_2(s)=0\Rightarrow y(y,s)=t \\ u(0,s) &= 1\Rightarrow 1=-\frac{1}{c_3(s)}\Rightarrow u=\frac{1}{1-t} \end{aligned}$$

(ג) נבדוק יעקובין $J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)}=\begin{vmatrix} x_t & x_s \\ y_t & y_s \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=-1\neq 0$ לכן זה נכון לכל המישור האינטגרלי.

(ד) נחלץ $t=y, s=x-y, u(x,y)=\frac{1}{1-y}$

הערה הפתרון לא מוגדר ל $y\neq 1$, כיוון שבעקום ההתחלה $y=0$ קיימת סביבה של עקום ההתחלה שבה הפתרון מוגדר.

עקום אופייני $(t+s,s,\frac{1}{1-t})$ ההיטל שלו למישור x,y הוא $(t+s,t)$ וגם $y=x-s$. ההיטל של γ_0 הוא $(x,0)$ לכן עקומים אופייניים חותכים את עקום ההתחלה.

2. $\begin{cases} u_x=u+1 \\ u(x,0)=xe^x-1 \end{cases}$

(א) עקומים אופייניים

$$\begin{aligned} x_t &= 1\Rightarrow x=t+c_1(s) \\ y_t &= 0\Rightarrow y=c_s(s) \\ u_t &= u+1\Rightarrow u=e^{-\int -1dt}\int 1e^{\int -1dt}=e^t[-e^{-t}+c_3(s)]=-1+e^tc_3(s) \end{aligned}$$

(ב) תנאי התחלה

$$\begin{aligned} x(0,s) &= c_1(s)=s\Rightarrow x(s,t)=t+s \\ y(0,s) &= c_2(s)=0\Rightarrow y(s,t)=0 \\ u(0,s) &= -1+c_3(s)=se^s-1\Rightarrow u(s,t)=-1+se^{s+t} \end{aligned}$$

(ג) יעקובין $J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)}=\begin{vmatrix} x_t & x_s \\ y_t & y_s \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}=0$ לכן אם אפשר לחלץ $s(x,y),t(x,y)$ ולכן אין פתרון.

(ד) הטל עקומים אופייניים $(t+s,0)$ והיטל ההתחלה $(s,0)$

הערה $u_x=u+1$ זה מד"ר: $u=-1+f(y)e^x$ וגם

$$-1+f(0)e^x=u(x,0)=xe^x-1$$

כלומר לא יתכן שיתקיים $f(0)=x$

3. $\begin{cases} u_x=u+1 \\ u(x,o)=2e^x-1 \end{cases}$ כמו ב-2 אבל אם אין סוף פתרונות.$f(0)=2$

(א) קוים אופייניים + תנאי התחלה:

$$\begin{aligned} x_t &= 1\Rightarrow x=t+s \\ y_t &= 0\Rightarrow y=0 \\ u_t &= u+1\Rightarrow u=-1+2e^{s+t} \end{aligned}$$

(ב) לכאורה מתקיים $u=-1+2e^x,u=0$ לכן לא קיבלנו שטח פותר אלה עקום התחלה שהוא עקום אופייני. במצב זה יש אין-סוף פתרונות. בדוגמא זאת אפשר למצוא אותם ע"י פתרון מד"ר $u=-1+f(y)e^x$ ולכל $f(0)=2$ יש פתרון לרבות $\forall n\in\mathbb{N},f(y)=2cos(nx)$

4. $\begin{cases} u_x+u_y=1-u \\ u(x,x+x^2)=\sin x,x>0 \end{cases}$

(א) קווים אופייניים

$$\begin{aligned} x_t &= 1\Rightarrow x=t+c_1\Rightarrow x=t+s \\ y_t &= 1\Rightarrow y=t+c_2\Rightarrow t+s+s^2 \\ u_t &= 1-u\Rightarrow -ln(1-u)=t+c_3\Rightarrow 1-u=c_3e^{-t}\Rightarrow u=1-c_3e^{-t}=1-(\sin s-1)e^{-t} \end{aligned}$$

(ב) יעקובין $J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)}=\begin{vmatrix} x_t & x_s \\ y_t & y_s \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1+2s \end{vmatrix}=2s$ לכן $s\neq 0\Rightarrow$ $J\neq 0$ ב $s=0$ תיתכן בעיה הבעיה שלנו מוגדרת ל $x>0$ ($s=x\neq 0$) לכן אין קיים פתרון יחיד

(ג) נחלץ

$$\begin{aligned} x &= t+s \\ y &= t+s+s^2 \\ s^2 &= y-x\Rightarrow s=\pm\sqrt{y-x} \end{aligned}$$

כיוון שנתון על עקום ההתחלה $(s,s+s^2,\sin s)$לנו $s>0$ נבחר

$$\begin{aligned} s &= \sqrt{y-x} \\ t &= x-s=s-\sqrt{y-x} \\ u &= 1+(\sin\sqrt{y-x}-1)e^{-x+\sqrt{y-x}} \end{aligned}$$

קיבלנו פתרון יחיד המוגדר כל עוד $y-x\geq 0$ ראינו שב $s=0$ $J=0$ והתקבלה סינגולריות של הפתרון בנק' $s=0$ כי $\sqrt{y-x}$ לא גזיר עבור $0=y-x$

(ד) היטלים: הטל עקום אופייני $(x,x+s^2)$ עקום התחלה $(x,x+x^2)$

2.2.2 תנאי הטרנסוורסליות (תנאי החיתוך)

משפט נתונה בעיית קושי $\left\{\begin{array}{c} au_x+bu_y+c \\ u(x_0(s),y_0(s))=u_0(s)\end{array}\right.$ אומרים שהבעיה מקיימת את תנאי הטרנסוורסליות אם התלי הקווים האופייניים של הבעיה למישור x,y חותכים את ההיטל של γ_0

הוכחה נראה שהתנאי שקול ל $J\neq 0$ אופיין נסמן $\gamma=(x(t,s),y(t,s),u(t,s))$

$$T=(x_t(0,s),y_t(0,s))$$

המשיק של ההיטל γ במפגש עם $\gamma_0(x_0(s),y_0(s),u_o(s))$. נסמן $S=(x_0'(s),y_0'(s))$ המשיק של ההיטל γ_0. S,T נחתכים כשהם לא מקבילים כלומר $T\times S\neq 0$ או $\left|\begin{array}{ccc} i & j & k \\ x_t & y_t & 0 \\ x_0' & y_0' & 0\end{array}\right|=k\left|\begin{array}{cc} x_t & y_t \\ x_0' & y_0'\end{array}\right|$ לכן בנק' המפגש $t\neq 0$ נדרוש $\left|\begin{array}{cc} x_t & y_t \\ x_0' & y_0'\end{array}\right|\neq 0$

אבל אנו יודעים ש $x_0(s)=x(0,s)\Rightarrow x_0'=x_s,y_0'=y_s$ לכן התנאי הוא $\Delta=\left|\begin{array}{cc} x_t & y_t \\ x_s & y_s\end{array}\right|\neq 0$ וזה שקול ל $J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)}=\left|\begin{array}{cc} x_t & y_t \\ x_s & y_s\end{array}\right|\neq 0$

■

הערה את התנאי ניתן לבדוק עוד לפני שמנסים לפתור $\left|\begin{array}{cc} a & b \\ x_0' & y_0'\end{array}\right|=\left|\begin{array}{cc} x_t & y_t \\ x_s & y_s\end{array}\right|\neq 0$ (כאשר a,b יחושבו על עקום ההתחלה)

כשלא מתקיים תנאי החיתוך

1. γ_0 אינו עקום אופייני - אין פתרון
2. γ_0 הוא עקום אופייני - יש ∞ פתרונות

איך נדע מה קורה? נבדוק את העקום כולו $\left|\begin{array}{ccc} i & j & k \\ x_t & y_t & u_t \\ x_s & y_s & u_s\end{array}\right|$ למעשה מספיק לבדוק $\left|\begin{array}{cc} a & c \\ x_0' & u_0'\end{array}\right|=0\wedge\left|\begin{array}{cc} b & c \\ y_0' & u_0'\end{array}\right|=0$ אז יש ∞ פתרונות. אחרת אין פתרון.

במקרה של אין-סוף פתרונות נתון γ_0 שהוא עקום אופייני. ניקח γ_1 כלשהו שחותך את γ_0 ושעבורו מתקיים $\Delta\neq 0$. נפתור את מד"ח עם γ_1. המשטח שמתקבל מהווה פתרון יחיד. γ_0 עקום אופייני שחותך את u בנק' החיתוך בין γ_0,γ_1 לכן γ_0מוכל במשטח. ומצאנו u שמכיל את γ_0. באותו אופן אפשר γ_2 שחותך את γ_0 ונפתור עם γ_2 וכך מקבלים ∞ פתרונות.

דוגמא $\left\{\begin{array}{c} u_x=0 \\ u(x,0)=1\end{array}\right.$

1. ניקח למשל $\gamma:(s,0,f(s))$ כש f מקיימת $f(0)=1$ נק' חיתוך $(0,0,0)$ ונקבל כך ∞ פתרונות.

3 משוואות לינאריות מסדר שני (בשני משתנים)

צורה כללית $Au_{xx}+2Bu_{xy}+Cu_{yy}+Du_x+Eu_y+Fu=G$
כאשר $A,...,G$ פונקציות רציפות של x,y ו A,B,C לא שלושתם 0

הגדרה **החלק** $Au_{xx}+2Bu_{xy}+Cu_{yy}$ נקרא החלק העיקרי של המד"ח

הדיסקרימיננטה $\Delta=B^2-AC$

המיון נקבע ע"פ הסימן של Δ וכל משפחה מתאימה צורה קנונית

1. אם $\Delta > 0$ היפרבולית $V_{sp} + H(s,q,v,v_s,v_q)$
2. אם $\Delta = 0$ פרבולית $V_{ss} + H(s,q,v,v_s,v_q)$
3. אם $\Delta < 0$ אליפטית $V_{ss} + V_{qq} + H(s,q,v,v_s,v_q)$

לכל אחת מהמשפחות יש אב טיפוס ממדעי הטבע שאותו נלמד לפתור

1. משוואת הגלים $u_{tt} - C^2 u_{xx} = f$. זאת משוואה היפרבולית $\Delta = 0 - 1(-c^2) > 0$
2. משוואת החום $u_t - k u_{xx} = f$. זאת משוואה פרבולית $\Delta = 0 - 0(-k) = 0$
3. משוואת לפלס $u_{xx} + u_{yy} = f$. זאת משוואה אליפטית $\Delta = -1 \cdot 1 < 0$

מקור השמות נסתכל על האופרטור שמתאם למד"ח ההומוגנית

$$l[u] = \left(A\frac{\partial}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial}{\partial y^2} + D\frac{\partial}{\partial x} + E\frac{\partial}{\partial y} + F\right)u = 0$$

ונתרגם למשוואה אלגברית

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

ידוע שקיים חילוץ משתנים שמביא את המשוואה לאחד העקומים:

1. היפרבולה $ax^2 - by^2 = 1$
2. פרבולה $y = ax^2$
3. אליפסה $ax^2 + by^2 = 1$

למשל למד"ח $V_{sp} = f$ מתאימה המשוואה $sp = f$ ניקח $s = x + y, q = x - y$ ונקבל $x^2 - y^2 = \tilde{f}$ (היפרבולה)

משפט

1. אם נבצע שינוי משתנים

$$\begin{aligned} s &= s(x,y) \\ q &= q(x,y) \\ v(s,p) &= u(x,y) \end{aligned}$$

טיפוס המשתנים נשמר. $(\Delta, \tilde{\Delta})$ שווי סימן.

2. לכל משוואה יש שינוי משתנים שמעביר את המשוואה לצורה קנונית

הוכחה

1. נבצע החלפת משתנים

$$J \neq 0, s = s(x,y), q = q(x,y), v(s,q) = u(x,y)$$

ונגזור ע"פ כלל השרשרת

$$\begin{aligned} u_x &= v_x s_x + v_q q_x \\ u_{xx} &= v_s s_{xx} + (v_{ss} s_x + v_{sq} q_x) s_x + v_q q_{xx} + (v_{qs} s_x + v_{qq} q_x) q_x \end{aligned}$$

מציבים במד"ח ומקבלים מד"ח מסדר שני עם מקדמי חדשים

$$av_{ss} + 2bv_{sq} + cv_{qq} + h(s,q,v,v_q,v_s) = 0$$

כאשר

$$\begin{aligned} a &= As_x^2 + 2Bs_xs_y + Cs_y^2 \\ b &= As_xq_x + Bs_xq_y + Bs_yq_x + Cs_yq_y \\ c &= Aq_x^2 + 2Bq_xq_y + Cq_y^2 \end{aligned}$$

הדיסקימיננטה (אחרי חשבון)

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta} &= b^2 - ab = (B^2 - AC)(s_xq_y - s_yq_x)^2 \\ \tilde{\Delta} &= \Delta J^2, J \neq 0 \end{aligned}$$

לכן הסימן נשמר.

2. נמצא לכל אחד מהצורות:

היפרבולי נתון $\Delta > 0$ נרצה להגיע לצורה $v_{sq} + H(s, q, v, v_s, v_q) = 0$ לכן נרצה $a = 0, c = 0$ נרצה שהמשתנים s, q פותרים את המשוואה

$$Aw_x^2 + 2Bw_xw_y + Cw_y^2 = 0 \qquad (1)$$

נסתכל על מספר מקרים:

- $A \neq 0$ אפשר להניח ש $w_y \neq 0$ כי אחרת מקבלים מ (1) $w_x = 0$ ולכן $w = const$ ונקבל $J = 0$ נחלק את (1) ב w_y^2

$$\begin{aligned} A\frac{w_x^2}{w_y^2} + 2B\frac{w_x}{w_y} + C &= 0 \\ \frac{w_x}{w_y} &= \frac{-2B \pm \sqrt{4B^2 - 4AC}}{2A} \end{aligned}$$

ולפי משפט הפונקציות הסתומות

$$y' = -\frac{w_x}{w_y} = \frac{B \mp \sqrt{B^2 - AC}}{A} \qquad (2)$$

הפתרונות של (2) $w(x, y) = const$ משדירים משתנים חדש-ים

$$\begin{aligned} s &= s(x, y) \\ q &= q(x, y) \end{aligned}$$

למשל אם A, B, C קבועים אז הפתרונות

$$\begin{aligned} y &= \left(\frac{B \mp \sqrt{B^2 - AC}}{A}\right)x + c \\ w_{1,2} &= y - \left(\frac{B \pm \sqrt{B^2 - AC}}{A}\right)x = const \\ s(x, y) &= y - \left(\frac{B + \sqrt{B^2 - AC}}{A}\right)x \\ q(x, y) &= y - \left(\frac{B - \sqrt{B^2 - AC}}{A}\right)x \end{aligned}$$

נשאר להראות כי $J \neq 0$

• עבור $A=0$ נרצה לפתור

$$\begin{aligned} 2Bw_xw_y + Cw_y^2 &= 0 \\ w_y(2Bw_x + Cw_y) &= 0 \\ 2Bw_x + Cw_y &= 0 \Rightarrow y' = -\frac{w_x}{w_y} = \frac{C}{2B} \to q(x,y) \\ w_y &= 0 \Rightarrow s(x,y) = x \\ J &= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ q_x & q_y \end{vmatrix} = q_y \neq 0 \end{aligned}$$

אילו $q_y = 0$ אז גם $q_x = 0, q = const$ וגם $B \neq 0$ כי אחרת

$$A = B = 0 \quad \Rightarrow \quad q = const$$

פרבולית נתון $\Delta = 0$ רוצים להגיע $w_{ss} + H(s,q,v,v_s,v_q) = 0$ לכן נרצה $c = 0, b = 0$ נשים לב כי

$$0 = \tilde{\Delta} \quad = \quad b^2 - ac$$

לכן $c = 0 \Rightarrow b = 0$ למעשה מספיק לפתור $c = 0$

$$Aq_x^2 + 2Bq_xq_y + Cq_y^2 \quad = \quad 0 \qquad (3)$$

זה פתרון ושוב לנצרך לפתור את (3). נניח $A = 0$ אחרת $B = 0$ והמשוואה הנתונה כבר קנונית לכן q יהיה הפתרון של

$$\begin{aligned} y' &= \frac{2B \pm \sqrt{4B^2 - 4AC}}{2A} \\ (\Delta = 0) \Rightarrow &= \frac{B}{A} \end{aligned}$$

את המשתנה השני נבחר שרירותית למשל $s(x,y) = x$ ומקבל-ים

$$J \quad = \quad \frac{\partial(s,t)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} s_x & s_y \\ q_x & q_y \end{vmatrix} = q_y \neq 0$$

אנו מקבלים $q_y = 0$ כי אחרת $q = const$

אליפטי $\Delta < 0$ רוצים לפתור את (1)

$$\begin{aligned} v_{ss} + v_{qq} + h(s,q) &= 0 \\ a &= c \\ b &= 0 \end{aligned}$$

נפתור את

$$y' \quad = \quad \frac{B \pm \sqrt{B^2 - AC}}{A}$$

נקבל שני משתנים מורכבים נבחר אחד מהם w ונגדיר

$$\begin{aligned} s(x,y) &= Rew \\ q(x,y) &= Imw \end{aligned}$$

למשל אם המקדמים קבועים

$$
\begin{aligned}
y &= \left(\frac{B+i\sqrt{\left|\frac{B\pm\sqrt{B^2-AC}}{A}\right|}}{A}\right)x+const \\
y-\frac{B}{A}x &= s(x,y) \\
\frac{x\sqrt{|B^2-AC|}}{A} &= q(x,y) \\
w_x &= s_x+iq_x \\
w_y &= s_y+iq_y
\end{aligned}
$$

אנו יודעים ש w מקיים את (1). אם נשווה את החלק ממשי והחלק המדומה לאפס נקבל

$$
\begin{aligned}
A(s_x-q_x)^2+2B(s_xs_y-q_xq_y)+c(s_y-q_y)^2 &= 0\Rightarrow a=c \\
As_xq_x+Bs_xq_y+Bs_yq_x+Cs_yq_y &= 0\Rightarrow b=0
\end{aligned}
$$

דוגמא משוואה ריקוני

$$
u_{xx}+xu_{yy} = 0 \tag{4}
$$

למצוא צורה קנונית $A=1,B=0,C=x$ נרצה לפתור

$$
y' = \frac{B\pm\sqrt{B^2-AC}}{A}=\frac{0\pm\sqrt{-x}}{1}
$$

1. עבור $x<0$ זאת משוואה היפרבולית

$$
\begin{aligned}
y &= \pm\int\sqrt{-x}dx+c=\mp\frac{2}{3}(-x)^{\frac{3}{2}}+c \\
w_{1,2} &= y\pm\frac{2}{3}(-x)^{\frac{3}{2}} \\
s(x,y) &= y+\frac{2}{3}(-x)^{\frac{3}{2}} \\
q(x,y) &= y-\frac{2}{3}(-x)^{\frac{3}{2}} \\
u_x &= v_s(-\sqrt{-x})+v_q\sqrt{-x} \\
u_{xx} &= v_{ss}(-x)+v_{sq}x+v_{sq}x+v_{qq}(-x)+v_s\frac{1}{2}(-x)^{-\frac{1}{2}}-v_q\frac{1}{2}(-x)^{-\frac{1}{2}} \\
u_y &= v_s+v_q \\
u_{yy} &= v_{ss}+v_{qq}+2v_{sq} \\
(5)\Rightarrow 4v_{sq}x+\frac{v_s-v_q}{1\sqrt{-x}} &= 0 \\
v_{sq} &= \frac{v_s-v_q}{-4\cdot 2x\sqrt{-x}} \\
(s-q)=\frac{4}{3}(-x)^{\frac{3}{2}}\Rightarrow &= \frac{v_s-v_q}{6(s-q)}
\end{aligned}
$$

2. אם $x=0$ המשוואה $u_{xx}=0$ קנונית (פרבולית)
3. אם $x>0$ אז

$$\begin{aligned}
y' &= \pm\sqrt{x}i \\
y &= \pm i\frac{2}{3}(|x|)^{\frac{3}{2}}+c \\
\Rightarrow s(x,y) &= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} \\
q(x,y) &= y \\
\Rightarrow u_x &= v_s\sqrt{x} \\
u_{xx} &= v_{ss}\sqrt{x}\sqrt{x}+v_s\frac{1}{2\sqrt{x}} \\
u_{yy} &= v_{qq} \\
(v_{ss}x+\frac{v_s}{2\sqrt{x}})+xv_{qq} &= 0 \\
v_{ss}+v_{tt} &= -\frac{v_s}{2x\sqrt{x}} \\
v_{ss}+v_{tt} &= -\frac{v_s}{3s}
\end{aligned}$$

3.1 משוואת הגלים ההומוגנית מיתר אין סופי-רקע פיזיקלי

מיתר אין סופי

$u(x,t)$ הזזה בכיוון ציר y מהנקודה x בזמן t

$T(x,y)$ מתיחות

$G(x,y)$ הרכיב האנכי של T

$\alpha(x,t)$ השיפוע

$\rho(x,t)$ מסה ליחידת אורך

משיקולי כוחות סה"כ הכוחות בציר y $G(x+\Delta x)-G(x,t)=\rho\Delta x u_{tt}$

מצד שני

$$\begin{aligned}
\tan\alpha &= \frac{G}{H} \\
\tan\alpha &= u_x \\
\Rightarrow u_x &= \frac{G}{H} \\
Hu_x &= G \\
\Rightarrow Hu_x(x+\Delta x,t)-Hu_x(x,t) &= \rho\Delta x u_{tt}
\end{aligned}$$

נחלק ב Δx ונקבל

$$\begin{aligned}
\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\rho}{H}u_{tt} &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{u_x(x+\Delta x,t)-u_x(x,t)}{\Delta x} \\
\frac{\rho}{H}u_{tt} &= u_{xx} \\
u_{xx}-c^2u_{tt} &= 0 \qquad (5) \\
c &= \sqrt{\frac{\rho}{H}}
\end{aligned}$$

- נרצה לעבור לצורה קנונית $v_{sp}+H(s,q,v,v_s,v_q)$ מחפשים $s(x,t),q(x,t),v(s,t)=u(x,t)$ כך שהמשוואה שתתקבל תקיים $a=c=0$ אז

$$\begin{aligned}
u_t &= v_s s_t + v_q q_t \\
u_{tt} &= v_{ss}s_t^2 + 2v_{sq}s_t q_t + v_s s_{tt} + v_{qq}q_t^2 + v_q q_{tt} \\
u_{xx} &= v_{ss}s_x^2 + 2v_{sq}s_x q_x + v_s s_{xx} + v_{qq}q_x^2 + v_q q_{xx}
\end{aligned}$$

נציב ב-(5)

$$v_{ss}(s_t^2-c^2s_x^2)+2v_{sq}(s_tq_t-c^2s_xq_x)+v_{qq}(q_t^2-c^2q_x^2)+v_s(s_{tt}^2-c^2s_{xx}^2)+v_q(q_{tt}-c^2q_{xx}) = 0$$

אנו רוצים שהמקדמים של v_{qq},v_{ss} יתאפסו כלומר

$$\begin{aligned}
s_t^2-c^2s_x^2 &= 0 \\
q_t^2-c^2s_x^2 &= 0
\end{aligned} \tag{6}$$

כלומר שניהם יהיו פתרונות ב.ת.ל של

$$\begin{aligned}
w_t^2-c^2w_x^2 &= 0 \\
w_t &= \pm cw_x \\
-\frac{w_t}{w_x} &= \mp c
\end{aligned}$$

וע"פ משפט הפונקציות הסתומות

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt}=-\frac{w_t}{w_x} &= \mp c \\
\Rightarrow \int dx &= \mp\int cdt \\
x &= \mp cx + const
\end{aligned}$$

קיבלנו אוסף של קווים שנקראים קווים אופייניים. נגדיר משתנים $s(x,t)=x+ct, q(x)=x-ct$ נגזור ונציב ב-(6)

$$\begin{aligned}
a &= s_t^2-c^2s_x=0 \\
b &= s_tq_t-c^2s_xq_x=c(-c)=c^2=-2c^2 \\
c &= q_t^2-c^2q_x^2=0
\end{aligned}$$

המקדם של v_s $d=s_{tt}-c^2s_{xx}=0$ והמקדם של v_t הוא $e=q_{tt}-c^2q_{xx}=0$ לכן מקבלים

$$\begin{aligned}
-4c^2v_{sq} &= 0 \\
v_{sq} &= 0
\end{aligned}$$

וזאת הצורה הקנונית. ולכן הפתרון הוא $v(s,q)=F(s)+G(q)$ ולכן פתרון כללי למשוואת הגלים

נדגיש בחילוץ משתנים $J=\frac{\partial(s,q)}{\partial(x,t)}=\begin{vmatrix} s_x & s_t \\ q_x & q_t \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & c \\ 1 & -c \end{vmatrix}=-2c\neq 0$ לכן הצעדים הם הפיכים u פתרון של (5) אס"ם v פתרון של (6). לכן לכל $F,G\in c^2$

$$u(x,t) = F(x+ct)+G(x-ct)$$

מהוה פתרון למשוואת הגלים. ולהפך לכל $u(x,t)$ פתרון של המשוואה קיימים $f,g\in c^2$ כך ש $u=F(x+ct)+g(x-ct)$

הערה משוואת הגלים מתארת מצב שהזזה בזמן או במקום נותנים אותו ערך. כלומר אנו אומרים ש F נסוג במהירות C. וG מתקדם במהירות C. קיבלנו את u כסופרפוזיציה של גל נסוג F וגל מתקדם G. (הקווים האופייניים הם קווי התקדמות הגל - במהירות האור קונוס האור)

בעיית קושי (למיתר אין סופי הומוגני)

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \quad &, \quad -\infty < x < \infty, t > 0 \\ u(x,0) = f(x) \quad &, \quad -\infty < x < \infty \\ u_t(x,0) = g(x) \quad &, \quad -\infty < x < \infty \end{aligned}$$

הפתרון הכללי $u(x,t) = f(x+ct) + g(x-ct)$ נציב את התנאי הראשון

$$f(x) = u(x,o) = F(x) + G(x) \tag{7}$$

כדי להשתמש בתנאי השני נגזור לפי t:

$$u_t(x,t) = cF'(x+ct) - cG'(x-ct)$$

נציב ב $t=0$:

$$u_t(x,0) = cF'(x) - cG'(x)$$

נבצע $\int_0^x$ על שני האגפים.

$$\begin{aligned} \int_0^x g(s)ds &= (cF(s) - cG(s))|_{s=0}^x \\ &= cF(x) - cG(x) + c(F(0) - G(0)) \\ (k = F(0) - G(0)) \Rightarrow &= cF(x) - cG(x) + ck \qquad (8) \\ (7) - (8)/c &= f(x) - \frac{1}{c}\int_0^x g(s)ds \\ &= 2G(x) - k \\ G(x) &= \frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{2c}\int_0^x g(s)ds + \frac{k}{2} \end{aligned}$$

קיבלנו את הנוסחה של הגל המתקדם.

$$\begin{aligned} (7) - (8)/c &= f(x) + \frac{1}{c}\int_0^x g(s)ds \\ &= 2F(x) + k \\ F(x) &= \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2c}\int_0^x g(s)ds - \frac{k}{2} \end{aligned}$$

קיבלנו את הנוסחה של הגל הנסוג. נציב בפתרון הכללי

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \left[\frac{1}{2}f(x+ct) + \frac{1}{2c}\int_0^{x+ct} g(s)ds - \frac{k}{2}\right] + \left[\frac{1}{2}f(x-ct) - \frac{1}{2c}\int_0^{x-ct} g(s)ds + \frac{k}{2}\right] \\ u(x,t) &= \frac{f(x+ct) + f(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)ds \end{aligned}$$

זאת נוסחת דלאמבר למיתר הומוגני.

משפט בעיית קושי

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= 0 \\ u(x,0) &= f(x) \\ u_t(x,0) &= g(x) \end{aligned}$$

מוצגת היטב. כלומר קיים פתרון יחיד ויציב.כיציבות פרושה שאם u^n פתרונות של סדרת בעיות

$$\begin{aligned} u^n_{tt} - c^2 u^n_{xx} &= 0 \\ u^n(x,0) &= f_n(x) \\ u^n_t(x,0) &= g_n(x) \end{aligned}$$

כאשר $f_n \to f, g_n \to g$ אז $u_n(x,t) \to u(x,t)$.

הוכחה "הוכחנו" למעשה קו"י של הפתרון (ע"י נוסחת דלאמבר). נוכיח יציבות. נתון $f_n \to f, g_n \to g$ כלומר לכל $\tilde{\varepsilon} > 0$ קיים n_o כל שלכל $n > n_0$ לכל x

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &< \tilde{\varepsilon} \\ |g_n(x) - g(x)| &< \tilde{\varepsilon} \end{aligned}$$

צ"ל: $|u^n(x,t) - u(x,t)| < \varepsilon$, $\begin{cases} \forall x \in D \\ \forall t \in [0,T] \end{cases}$

ע"פ דלאמבר:

$$\begin{aligned} |u^n(x,t) - u(x,t)| &= |\left[\frac{1}{2}f_n(x+ct) + \frac{1}{2}f_n(x-ct) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g_n(s)ds\right] \\ &\quad - \left[\frac{1}{2}f(x-ct) + \frac{1}{2}f(x+ct) - \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)ds\right]| \\ &\leq \frac{1}{2}|f_n(x+ct) - f(x-ct)| + \frac{1}{2}|f_n(x-ct) - f(x+ct)| \\ &\quad + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} |g_n(s) - g(s)|ds \\ &\leq \frac{\tilde{\varepsilon}}{2} + \frac{\tilde{\varepsilon}}{2} + \frac{1}{2c}\tilde{\varepsilon}2ct = \tilde{\varepsilon}(1+t) \leq \tilde{\varepsilon}(1+T) = \varepsilon \end{aligned}$$

■

הערה אם $f \in c^2, g \in c^1$ הראנו שקיים פתרון קלסי או אמתי $u \in c^2$ מקיימת את המשוואה והתנאים. אחרת נוכל למצוא פתרון מוכלל שמתקבל כגבול של סדרות הבעיות שבהן $g_n \to g, f_n \to f$ הרבה פעמים נקבל פתרון ע"י נוסחת דלאמבר שתהיה בו סינגולרית

דוגמא $\begin{aligned} u_{tt} - u_{xx} &= 0 \\ u(x,0) &= f(x) \\ u_t(x,0) &= g(x) \end{aligned}$ כאשר $f(x) = \begin{cases} 0 & x < -1 \cup x > 1 \\ x+1 & -1 \leq x \leq 0 \\ 1-x & 0 < x < 1 \end{cases}$ וגם $g(x) = \begin{cases} 1 & -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & x \notin [-1,1] \end{cases}$

1. חשב את $u(\frac{1}{2},1)$
2. האם הפתרון אמתי?
3. חשב את $\lim_{t\to\infty} u(x,t)$

פתרון

1. נפתור

$$\begin{aligned} u(\frac{1}{2},1) &= \frac{1}{2}\left[f(\frac{3}{2}) + f(-\frac{1}{2})\right] + \frac{1}{2}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} g(s)ds \\ &= \frac{1}{2}(0 + \frac{1}{2}) + \frac{1}{2}(\int_{-\frac{1}{2}}^{1} 1ds + \int_{1}^{\frac{3}{2}} 0ds) \\ &= 1 \end{aligned}$$

2. הפתרון לא גזיר בכל נק' (x,t) מקימות $x+ct=\pm 1,0$ (נראה בהמשך) לכן זה פתרון מוכלל

3. לכל x_0 עבור $t>1-x_0$ אז $x_0+t>1$ עבור $t>1+x_0$ אז $x_0-t<-1$ לכן

$$\begin{aligned} f(x+t) &= 0 \\ f(x-t) &= 0 \\ \int_{x-t}^{x+t} g(t)dt &= \int_{x-t}^{-1} 0 + \int_{-1}^{1} 1 + \int_{1}^{x+t} 0 = 2 \\ \Rightarrow \lim_{t\to\infty} u(x,t) &= 1 \end{aligned}$$

פתרון בשיטה הגרפית נרצה לצייר את הגל בזמנים $t=0, t=\frac{1}{2}, t=1$ נמצא את הגל הנסוג

$$F(x) = \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}\int_0^x g(s)ds$$

ואת הגל המתקדם

$$G(x) = \frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{2}\int_0^x g(s)ds$$

אח"כ נזיז את F $\frac{1}{2}$ שמאלה ואת $\frac{1}{2}$ ימינה ונסכם
$$g(x) = \begin{cases} \int_0^{-1} 1ds + \int_{-1}^{x} 0ds = -1 & x<-1 \\ \int_0^x 1ds = x & -1<x<1 \\ \int_0^1 1ds + \int_1^x 0s = 1 & x>1 \end{cases}$$

נסכם

$$F(x) = \frac{1}{2}(f(x) + \int_0^x g(s)ds) = \begin{cases} \frac{1}{2} & x>0 \\ x+\frac{1}{2} & -1\le x\le 0 \\ -\frac{1}{2} & x<-1 \end{cases}$$

וגם הגל המתקדם

$$\frac{1}{2}(f(x) - \int_0^x g(s)ds) = \begin{cases} -\frac{1}{2} & x>1 \\ -x+\frac{1}{2} & 0\le x\le 1 \\ \frac{1}{2} & x<0 \end{cases}$$

סה"כ התשובה היא $F(x)=F(x)+G(x)$.

3.1.1 תחום התלות ואזור השפעה

תחום התלות ניקח (x_0,y_0) ונבדוק איזה תחום השפעה קובע את $u(x_0,y_0)$

$$u(x_0,t_0) = \frac{1}{2}f(x_0+ct) + \frac{1}{2}f(x_0-ct) + \frac{1}{2c}\int_{x_0-ct}^{x_0+ct} g(s)ds$$

לכן $u(x_0,t_0)$ תלויה בנק' $x_0 \pm ct_0$ ובקטע (x_0-ct, x_0+ct) כלומר בקטע $[x_0-ct, x_0+ct]$. קטע זה נקרא תחום התלות של הנק' (x_0,t_0)

אזור השפעה ניקח קטע כלשהו $[a,b]$ ונבדוק על אילו נק' $u(x_0,t_0)$ ישפיע? תהיה השפעה אם

$$[a,b]\cap, [x_0-ct, x_0+ct] \neq \phi$$

לא תהיה השפעה אם $x_0+ct_0<a \wedge x_0-ct<a$. (כלומר יש מאין "אופק אירועים" בו יש השפעה)

הערה אם f,g מתאפסות זהותית מחוץ ל $[a,b]$ אז כל הנק' שמחוץ לאזור ההשפעה יקימו $u(x,t)=0$

משולש אופייני הוא המשולש שבסיסו (x_0-ct,x_0+ct) וקדקודו ב (x_0,t_0) (כמו באופק אירועים של פיזיקה יחסותית לגבי העבר). אם ניקח נק' (x,t) במשולש האופייני היא נקבעת בתוך המשולש האופייני ע"י

$$[x-ct,x+ct] \quad\subseteq\quad [x_0-ct,x_0+ct]$$

לכן הבסיס של המשולש האופייני קובע את כל ערכי $u(x,t)$ כש (x,t) נק' במשולש.

תרגיל

$$\begin{aligned} u_{tt}-4u_{xx} &= 0\\ u(x,0) &= \begin{cases} -2 & 0\le x\le 4\\ 2 & 6\le x\le 10\\ 0 & else \end{cases} \end{aligned}$$

1. צייר $u(x,1)$
2. חשב $\lim_{t\to\infty} u\left(t+2,\frac{1}{2}t\right)$
3. מתי הפתרון סינגולרי

פתרון

1. נפתור

$$\begin{aligned} u(x,1) &= \frac{1}{2}f(x+2)+\frac{1}{2}f(x-2)+\frac{1}{2\times 2}\int_{x-2}^{x+2}0ds\\ &= \frac{1}{2}\begin{cases} -2 & 0\le x+2\le 4\\ 2 & 6\le x+2\le 10\\ 0 & else \end{cases} + \frac{1}{2}\begin{cases} -2 & 0\le x-2\le 4\\ 2 & 6\le x-2\le 10\\ 0 & else \end{cases}\\ &= \begin{cases} -1 & -2\le x\le 2\\ 1 & 4\le x\le 8\\ 0 & else \end{cases} + \begin{cases} -1 & 2\le x\le 6\\ 1 & 8\le x\le 12\\ 0 & else \end{cases}\\ &= \begin{cases} -1 & -2\le x<2\\ -2 & x=2\\ -1 & 2<x<4\\ 0 & 4\le x\le 6\\ 1 & 6<x<8\\ 2 & x=8\\ 1 & 8<x\le 12\\ 0 & else \end{cases}\\ &= \begin{cases} -1 & -2\le x<4\\ 1 & 6<x\le 12\\ 0 & else \end{cases} \end{aligned}$$

כל נק' מחוץ לאזור ההשפעה של $[0,10]$ מראש יודעים

$$\left\{\begin{array}{c} \forall x\in\mathbb{R}\\ \vee\,|x|>ct \end{array}\right. ,u(x,t)=0$$

בשיטה הגרפית

$$
\begin{aligned}
F(x) &= \frac{1}{2}f(x)+\frac{1}{2c}\int_0^x g(s)ds \\
&= \frac{1}{2}f(x) \\
G(x) &= \frac{1}{2}f(x)-\frac{1}{2c}\int_0^x g(s)ds \\
&= \frac{1}{2}f(x)
\end{aligned}
$$

נרשום את הגרפים הבאים

2. נפתור

$$
\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} u\left(t+2,\frac{1}{2}t\right) &= \lim_{t\to\infty}\frac{1}{2}f\left(t+2+2\frac{1}{2}t\right)+\frac{1}{2}f\left(t+2-2\frac{1}{2}t\right) \\
&= \lim_{t\to\infty}\frac{1}{2}f\left(2t+2\right)+\frac{1}{2}f(2)=-1
\end{aligned}
$$

3. נק' סינגולריות יכולות להתקבל לאורך הישרים האופייניים $x\pm 2t=0,4,6,10$
בדוגמא $t=1$ מתקבל

$$
\begin{aligned}
x+2 &= 0,4,6,10 \\
x-2 &= 0,4,6,10
\end{aligned}
$$

בדוגמא הזו סנגולרית $-2,4,6,12$.

3.2 משוואת הגלים האי-הומוגניות

$$
\begin{cases}
u_{tt}-c^2u_{xx}=F(x,t) \\
u(x,0)=f(x) \\
u_t(x,0)=g(x)
\end{cases}
$$

(למשל מיתר שפועל עליו כוח חיצוני למשל גרביטציה)

משפט עבור $g,F\in c^1, f\in c^2$ הבעיה מוגדרת היטב כלומר קיים פתרון יחיד יציב.

יציבות מוכיחים באופן דומה לבעיה ההומוגנית אם

$$
\begin{aligned}
F_n &\to F \\
f_n &\to f \\
g_n &\to g
\end{aligned}
$$

u_n פתרון עם F_n,g_n,f_n וu פתרון עם F,f,g אז $u_n\to u$.

יחידות נניח u_1,u_2 פתרונות של אותה בעיה ונסמן $u=u_1-u_2$. u מקיים

$$
\begin{aligned}
u_{tt}-c^2u_{xx} &= 0 \\
u(x,0) &= 0 \\
u_t(x,0) &= 0 \\
(dalamber)\Rightarrow u &= 0 \\
\Rightarrow u_1 &= u_2
\end{aligned}
$$

קיום נפתח נוסחה לפתרון נסמן B הקו בו $x=0$,L הקו בו $x-ct=x_0-ct_0$ וR הקו בו $x+ct=x_0+ct_0$

נתון

$$\begin{aligned}
u_{tt}-c^2u_{xx} &= F(x,t)\\
-F(x,t) &= c^2u_{xx}-u_{tt}\\
\iint_\Delta -F(x,t)dxdt &= \iint_\Delta c^2u_{xx}-u_{tt}dxdt\\
(green)\Rightarrow &= \int_{\delta\Delta} u_tdx+c^2u_xdt
\end{aligned}$$

נחשב את האינטגרל הקווי הזה לאורך כל רכיב השפה

$$\begin{aligned}
\int_B u_tdx+c^2u_xdt &= \int_{x-ct_0}^{x_0+ct_0} g(x)dx\\
\int_R u_tdx+c^2u_xdt &= \int_B u_t(-cdt)+c^2u_x(-\frac{1}{c}dx)\\
&= -c\int_B u_tdt+u_xdx\\
&= -c\left[u(x_0,t_0)-u(x_0+ct_0,0)\right]\\
\int_R u_tdx+c^2u_xdt &= cu_x(x,t)|_\alpha^\beta\\
&= c\left[u(x_0-ct_0,0)-u(x_0,t_0)\right]\\
&= c\left[f(x_0-ct_0)-u(x_0,t_0)\right]
\end{aligned}$$

נציב חזרה

$$\begin{aligned}
\iint_\Delta F(x,t)dxdt &= \int_{x-ct_0}^{x_0+ct_0} g(x)dx-c\left[u(x_0,t_0)-u(x_0+ct_0,0)\right]+c\left[f(x_0-ct_0)-u(x_0,t_0)\right]\\
-\iint_\Delta F(x,t)dxdt &= \int_{x-ct_0}^{x_0+ct_0} g(x)dx+cf(x_0-ct)+cf(x_0+ct_0)-2cu(x_0,t_0)\\
u(x_0,t_0) &= -\frac{1}{2}\left\{f(x_0-ct)+f(x_0+ct)+\frac{1}{c}\left[\int_{x-ct_0}^{x_0+ct} g(x)dx-\iint_\Delta F(x,t)dxdt\right]\right\}
\end{aligned}$$

כיוון ש (x_0,t_0) שרירותית קיבלנו נוסחה כללית לפתרון

$$u(x,t) = \frac{1}{2c}\int_{t=0}^{t}\int_{x-ct+c\tau}^{x+ct-c\tau} F(s,t)dsdt+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)ds+\frac{1}{2}f(x+ct)+\frac{1}{2}f(x-ct)$$

זאת נוסחת דלאמבר למיתר לא הומוגני

הערה $F=0$ נוסחת דלאמבר למיתר הומוגני

דוגמא
$$\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=1\\ u(x,0)=0\\ u_t(x,0)=0\end{cases}$$

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{1}{2}\int_{\tau=0}^{t}\int_{s=x-t+\tau}^{x+t-\tau} 1dsd\tau\\
&= \frac{1}{2}\int_{\tau=0}^{t} s|_{s=x-t+\tau}^{x+t-\tau}dt\\
&= \frac{1}{2}\int_{\tau=0}^{t}(2t-2\tau)\,dt\\
&= \frac{1}{2}\left(2t^2-t^2\right)=\frac{1}{2}t^2
\end{aligned}$$

3.2.1 פתרון ע"י ניחוש

$$\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=2x-t & -\infty<x<\infty,t>0\\ u(x,0)=\sin x & -\infty<x<\infty\\ u_t(x,0)=x & -\infty<x<\infty \end{cases}$$

נחפש $v(x,t)$ שמקיים את

$$v_{tt}-v_{xx} = 2x-t$$

ע"י סכום $v_1(t)$ שמקיים

$$v_{tt}=-t\Rightarrow v_1=-\frac{x^3}{6}$$

ו-$v_2(t)$ שמקיים

$$-v_{xx}=2x\Rightarrow v_2=-\frac{x^3}{3}$$

ואז $v=v_1+v_2=-\frac{t^3}{6}-\frac{x^3}{3}$ נגדיר $w=u-v$ ונדרוש u פתרון

$$\begin{aligned}\Rightarrow w_{tt}-w_{xx} &= (u_{tt}-u_{xx})-(v_{tt}-v_{xx})\\ w(x,0) &= u(x,0)-v(x,0)=\sin x+\frac{x^3}{3}\\ w_t(x,0) &= u_t(x,0)-v_t(x,0)=x-0=x\end{aligned}$$

לפי נוסחת דלאמבר למיתר הומוגני

$$\begin{aligned} w(x,t) &= \frac{1}{2}\left[\sin(x+t)+\frac{(x+t)^3}{3}\right]\\ &+ \frac{1}{2}\left[\sin(x-t)+\frac{(x-t)^3}{3}\right]\\ &+ \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} sds\\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{(x+t)^3}{3}+\frac{(x-t)^3}{3}\right]\\ \Rightarrow u &= v+w\\ &= \frac{1}{2}\left[\sin(x+t)+\sin(x-t)\right]\\ &+ \frac{1}{6}\left[(x+t)^3+(x-t)^3\right]\\ &+ \frac{1}{4}\left[(x+t)^2+(x-t)^2\right]-\frac{x^3}{3}-\frac{t^3}{6}\\ &= \sin x\cos t+xt+xt^2-\frac{t^3}{6}\end{aligned}$$

3.2.2 תכונות של מיתר אין-סופי

1. אם f,g,h זוגית אז u זוגית
2. אם f,g,h אי-זוגיות אז u אי-זוגית

הוכחה

1. נגדיר $v(x,t)=u(-x,t)$ נראה ש $v(x,t)$ מקיים אותה בעיה ש $u(x,t)$ מקיים ואז מהיחידות

$$\begin{aligned} u &= v \\ u(x,t) &= u(-x,t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_{tt}(x,t)-C^2v_{xx}(x,t) &= * \\ u_{tt}(-x,t) &= u_{tt}(-x,t) \\ v_x(-x,t) &= -u_x(x,t) \\ v_{xx}(-x,t) &= u_x(x,t) \\ * &= u_{tt}(-x,t)-c^2u_{xx}(-x,t)=F(-x,t)=F(x,t) \\ v(x,0) &= u(-x,0)=f(-x)=f(x) \\ v_t(x,0) &= u_t(-x,0)=g(-x)=g(x) \end{aligned}$$

לכן v מקיימת את אותה בעיה של u ומהיחידות $u=v$. לכן u זוגית

2. עבור האי-זוגי נגדיר $v(x,t)=-u(-x,t)$

$$\begin{aligned} v_{tt}(x,t)-C^2v_{xx}(x,t) &= * \\ u_{tt}(-x,t) &= -u_{tt}(-x,t) \\ v_x(-x,t) &= +u_x(-x,t) \\ v_{xx}(-x,t) &= -u_x(-x,t) \\ * &= -\big(u_{tt}(-x,t)-c^2u_{xx}(-x,t)\big)=-\left(F(-x,t)\right)=F(x,t) \\ v(x,0) &= -\left(u(-x,0)\right)=-f(-x)=f(x) \\ v_t(x,0) &= -\left(u_t(-x,0)\right)=-g(-x)=g(x) \end{aligned}$$

3.2.3 מיתר חצי אין-סופי

$$\begin{aligned} (1)\, u_{tt}-C^2u_{xx} &= F(x,t), -\infty<x<\infty \\ (2)\, u(x,0) &= f(x) \\ (3)\, u_t(x,0) &= g(x) \\ (4)\, u(0,t) &= 0 \\ \wedge(4')\, u_x(0,y) &= 0 \end{aligned}$$

כיוון ש $f(0) =^{(2)} u(0,0) =^{(4)} 0$ נפתור עבור f שמקיימת $f(0)=0$

$$\begin{aligned} u_t(0,t) &=^{(4)} 0 \\ u_t(t,0) &=^{(3)} g(0) \\ \Rightarrow u_t(0,0) &= 0 \end{aligned}$$

הדרישה $f(0)=g(0)=0$ נקרא תנאי תאימות.

נרחיב את f, g, F באופן הבא

$$\begin{aligned}\tilde{F}(x,t) &= \begin{cases} F(x,t) & x \geq 0 \\ -F(-x,t) & x < 0 \end{cases} \\ \tilde{f}(x) &= \begin{cases} f(x) & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -f(-x) & x < 0 \end{cases} \\ \tilde{g}(x) &= \begin{cases} g(x) & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -g(-x) & x < 0 \end{cases}\end{aligned}$$

נפתור תנאי התחלה

$$\begin{aligned}(1)\, \tilde{u_{tt}} - C^2 \tilde{u_{xx}} &= \tilde{F}(x,t), -\infty < x < \infty, t > 0 \\ (2)\, \tilde{u}(x,0) &= \tilde{f}(x) \\ (3)\, \tilde{u_t}(x,0) &= \tilde{g}(x)\end{aligned}$$

$\tilde{u}$ מקיים את (1)-(3) לכל $-\infty < x < \infty$ לכן $u = \tilde{u}|_{x \geq 0}$ u מקיים את (1)-(3) לכל $x > 0$.
כיוון ש f, g, F אי-זוגית של x אז $u(0,t) = 0$. לכן גם (4) מתקיים.

הערה אם מחליפים את (u) ב $u_x(0,t) = 0$ ניקח $\tilde{F}, \tilde{g}, \tilde{f}$ הרחבה זוגית. לכן u זוגית של x
לכן u_x אי-זוגית של x לכן $(4')\, u_x(0,t) = 0$

דוגמא

$$\begin{aligned}u_{tt} - u_{xx} &= 0, x > 0, t > 0 \\ u(x,0) &= 0 \\ u_t(x,0) &= \begin{cases} 2 & 3 \leq x \leq 6 \\ 0 & x \in [0,3) \cup (6,\infty) \end{cases} \\ u_x(0,t) &= 0, t \geq 0\end{aligned}$$

צייר $u(x,t)$ ב $t = \frac{3}{2}, 3, 6, 10$

פתרון ניקח הרחבות זוגיות $\tilde{g} = \begin{cases} 2 & 3 \leq |x| \leq 6 \\ 0 & else \end{cases}$, $\tilde{F} = 0, \tilde{f} = 0$ פתרון גרפי:

$$\begin{aligned}\tilde{u}(x,t) &= \tilde{F}(x,t) + \tilde{G}(x,t) \\ \tilde{F}(x) &= \frac{1}{2}\tilde{f}(x) + \frac{1}{2}\int_0^x \tilde{g}(s)ds \\ \tilde{G}(x) &= \frac{1}{2}\tilde{f}(x) - \frac{1}{2}\int_0^x \tilde{g}(s)ds\end{aligned}$$

נחשב

$$\int_0^x \tilde{g}(s)ds = \begin{cases} \int_{-3}^{-6} 2ds = -6 & x < -6 \\ \int_{-3}^{x} 2ds = 2x+6 & -6 < x < -3 \\ 0 & -3 \le x \le 3 \\ \int_{3}^{x} 2ds = 2x-6 & 3 < x < 6 \\ 6 & x \ge 6 \end{cases}$$

$$\tilde{F}(x) = \begin{cases} -3 & x < -6 \\ x+3 & -6 < x < -3 \\ 0 & -3 \le x \le 3 \\ x-3 & 3 < x < 6 \\ 3 & x \ge 6 \end{cases}$$

$$\tilde{G}(x) = -\tilde{F}(x)$$

וכך נצייר פתרון.

3.2.4 כלל המקבילית לבעיה הומוגנית

ניצר מקבילית של ישרים אופייניים $(A, B = (x_0, t_0), C, D = (x_1, t_1))$ כך שקו

$$\begin{aligned} AD &= x + ct = x_1 + ct_1 \\ BC &= x + ct = x_0 + ct_0 \\ AB &= x - ct = x_0 - ct_0 \\ CD &= x - ct = x_1 - ct_1 \end{aligned}$$

נזכיר $u(x,t) = F(x+ct) + G(x-ct)$. אז הכלל אומר ש

$$u(A) + u(C) = u(B) + u(C)$$

הוכחה

$$\begin{aligned} u(A) &= F(x_1 + ct_1) + G(x_0 - ct_0) \\ u(C) &= F(x_0 + ct_0) + G(x_1 - ct_1) \\ u(A) + c(C) &= F(x_1 + ct_1) + G(x_0 - ct_0) + F(x_0 + ct_0) + G(x_1 - ct_1) \\ u(B) &= F(x_0 + ct_0) + G(x_0 - ct_0) \\ u(C) &= F(x_1 + ct_1) + G(x_1 - ct_1) \\ u(B) + u(C) &= F(x_1 + ct_1) + G(x_0 - ct_0) + F(x_0 + ct_0) + G(x_1 - ct_1) \\ \Rightarrow u(A) + u(C) &= u(B) + u(C) \end{aligned}$$

הערה תנאי תאימות

1. רציפות ב-$x = t$ רק אם רציפות ב $(0,0)$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}f(0) + \frac{1}{2}f(2x) + \frac{1}{2}\int_0^{2x} g(s)ds &= \frac{1}{2}f(2x) - \frac{1}{2}f(0) + \frac{1}{2}\int_0^{2x} g(s)ds \\ \Rightarrow f(0) &= h(0) \end{aligned}$$

2. גזירות לפי t ב-$x=t$ רק אם

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2}f^{'}(0)+\frac{1}{2}f^{'}(2x)+\frac{1}{2}\left(g(2x)+g(0)\right) &= \frac{1}{2}f^{'}(0)-\frac{1}{2}f^{'}(2x)+\frac{1}{2}g(2x)-\frac{1}{2}g(0)+h^{'}(0)\\
\Rightarrow g(0) &= h'(0)
\end{aligned}$$

דוגמא

$$\begin{array}{cc}
u_{tt}-u_{xx}=0 & x>0,t>0\\
u(x,0)=f(x) & x\geq 0\\
u_t(x,0)=g(x) & x\geq 0\\
u(0,t)=h(t) & t\geq 0
\end{array}$$

1. פתור $x-t\geq 0$
2. פתור $x-t<0$
3. הסק כלל תאימות

פתרון

1. לפי דלאמבר $u(x,t)=\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2}+\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}g(s)ds$
2. נעביר מקבילית שצלעותיה ישרים אופייניים (x_0,t_0) אחד הקדקודים ועוד 2 על הצירים.על ציר x יש $u(B)=u(x_b,0)=f(x_b)$ על ציר y יש $U(A)=u(0,t_a)=h(t)$ נראה ש $x_c-t_c>0$ ולכן $u(C)$ יחושב ע"י נוסחת דלאמבר. את $u(x_0,t_0)$ נמצא לפי כלל המקבילית.A נמצא על הישר האופייני

$$\begin{aligned}
x-t &= x_0-t_0\\
t_a &= x_0-t_0\\
u(A) &= h(x_0-t_0)
\end{aligned}$$

B נמצאת על הישר

$$\begin{aligned}
x+t &= x_a+t_a\\
x_b &= t_0-x_0>0\\
u(B) &= f(t_0-x_0)
\end{aligned}$$

C נמצאת על הישרים

$$\begin{aligned}
x-t &= x_b-t_b\\
x_c-t_c &= t_0-x_0>0\\
x_c+t_c &= x_0+t_0\\
(da'almbert)\Rightarrow u(x_c,t_c) &= \frac{f(t_0-x_0)+f(x_0+t_0)}{2}+\frac{1}{2}\int_{t_0-x_0}^{t_0+x_0}g(s)\\
u(D) &= u(A)+u(C)-u(B)\\
u(x_0,t_0) &= h(x_0,t_0)+\left(\frac{f(t_0-x_0)+f(x_0+t_0)}{2}\right)+\frac{1}{2}\int_{t_0-x_0}^{t_0+x_0}g(s)ds-f(t_0-x_0)\\
u(x_0,t_0) &= h(x_0,t_0)+\left(\frac{f(x_0+t_0)-f(t_0-x_0)}{2}\right)+\frac{1}{2}\int_{t_0-x_0}^{t_0+x_0}g(s)ds
\end{aligned}$$

4 בעיית שטורם ליוביל

דוגמא משוואת גלים הומוגנית, מיתר סופי קשור
$$\begin{cases} (1)\, u_{tt}-c^2u_{xx}=0 & 0<x<t, t>0 \\ (2)\, u(0,t)=u(\ell,t)=0 & t\geq 0 \\ (3)\, u(x,0)=f(x) & 0\leq x\leq \ell \\ (4)\, u_t(x,0)=g(x) & 0\leq x\leq \ell \end{cases}$$

נפתור בשיטת הפרדת משתנים נחפש פתרון מהצורה $u(x,t)=X(x)T(t)$ נציב ב (1)

$$\begin{aligned} XT^{''}-c^2X^{''}T &= 0 \\ XT^{''} &= c^2X^{''}T \\ (5)\,\frac{T^{''}}{c^2T} &= \frac{X^{''}}{X}=-\lambda \\ \Rightarrow X^{''}+\lambda X &= 0 \\ (2)\Rightarrow X(0)T(t) &= 0\Rightarrow X(0)=0 \\ X(\ell)T(t) &= 0\Rightarrow X(\ell)=0 \end{aligned}$$

כי אם $T\equiv 0$ אז $u\equiv 0$ ואז $(3),(4)$ לא מתקיימות. קיבלנו מד"ר מסדר שני אם שני תנאים

$$\begin{aligned} X^{''}+\lambda X &= 0 \\ X(0) &= 0 \\ X(\ell) &= 0 \end{aligned}$$

מחפשים λ שעבורו יש פתרון $X\neq 0$. λיקרא ע"ע X פונקציה עצמית.

1. אם $\lambda<0$

$$\begin{aligned} X^{''} &= -\lambda x \\ r^2 &= -\lambda \\ x &= ae^{\sqrt{-\lambda}x}+be^{-\sqrt{-\lambda}x} \\ 0 &= x(0)=a+b \\ X &= a\left(e^{\sqrt{-\lambda}x}-e^{-\sqrt{-\lambda}x}\right) \\ 0 &= x(\ell)=a\left(e^{\sqrt{-\lambda}x}-e^{-\sqrt{-\lambda}x}\right) \\ \Rightarrow e^{\sqrt{-\lambda}x} &= e^{-\sqrt{-\lambda}x} \\ \lambda &= 0 \end{aligned}$$

בסתירה להנחה $\lambda<0$ לכן אין פתרון.

2. אם $\lambda=0$

$$\begin{aligned} X^{''} &= 0 \\ X &= ax+b \\ 0 &= x(0)=b \\ X &= ax \\ 0 &= x(\ell)=aL \\ a &= 0 \end{aligned}$$

לכן אין פ"ע

3. אם $\lambda > 0$

$$
\begin{aligned}
X^{''} &= -\lambda x \\
x &= a\sin(\sqrt{\lambda}x) + b\cos\left(\sqrt{\lambda}x\right) \\
0 &= X(0) = b \\
X &= a\sin\sqrt{\lambda}x \\
0 &= X(\ell) = a\sin(\sqrt{\lambda}\ell) \\
\forall n \in \mathbb{Z}, \sqrt{\lambda}\ell &= n\pi
\end{aligned}
$$

הפתרונות של $n < 0$ מתלכדים עם $n > 0$ לכן הע"ע הם $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2$ והפ"ע $X_n = a_n \sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)$

מצאנו $u_n(x,t) = \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) T_n(t)$. אנו גם הראינו ש

$$
\begin{aligned}
\frac{T^{''}}{c^2 T} &= -\lambda \\
T^{''} &= -c^2\lambda T
\end{aligned}
$$

נתאים

$$
T_n = a_n \sin\left(\frac{cn\pi}{\ell}t\right) + b_n \cos\left(\frac{cn\pi t}{\ell}\right)
$$

לכן u_n מקיים את את $(1),(2),(5)$ ואז ע"י קומבינציה ליניארית קבלנו פתרון מה-צורה

$$
u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)\left(a_n \sin\left(\frac{n\pi ct}{\ell}\right) + b_n \cos\left(\frac{n\pi ct}{\ell}\right)\right)
$$

את a_n, b_n נמצא לפי $(3),(4)$

$$
\begin{aligned}
f(x) &= u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \\
g(x) &= u_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{n\pi c}{\ell} \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)
\end{aligned}
$$

נראה שאכן יש ∞ פ"ע שמהוות בסיס א"נ למרחב הפונקציות ולכן קיים פתרון ויש מקדמים מתאימים.

4.0.5 בעיית שטורם ליוביל כללית

$$
\begin{aligned}
\left(p(x)v^{'}(x)\right)^{'} + q(x)v(x) + \lambda\gamma(x)r(x) &= 0, a < x < b \\
\alpha v(a) + \beta v^{'}(a) &= 0 \\
\gamma v(b) + \delta v^{'}(b) &= 0
\end{aligned}
$$

בדוגמא הקודמת

$$
p(x) = 1, q(x) = 0, r(x) = 1, \alpha = 1, \beta = 0, \gamma = 1, \delta = 0
$$

מניחים:

1. $p,p^{'},q,r$ רציפות

2. $p,r>0$

3. $|\alpha|+|\beta|>0,|\gamma|+|\delta|>0$

הערה כל מד"ר מסדר שני אפשר להביא לצורה של שטורם ליוביל ע"י כפל $\frac{p}{A}=\frac{e^{\int\frac{B}{A}dx}}{A}$

הגדרה האופרטור $L\left[u\right]=\left(pv^{'}\right)^{'}+qv$ נקרא אופרטור שטורם ליוביל $r(x)$ נקראת פונקציית משקל $v(x)\neq0$ שמקיימת את תנאי השפה ו $Lv=-\lambda rv$ נקראת פונקציה עצמית ו λ שמתאים לה נקרא ערך עצמי.
בעיה הכוללת את המשוואה ושני תנאי שפה ומקיימת (1)-(3) נקראת בעיית שטורם ליוביל רגולרית

דוגמא לבעיה לא רגולרית $\begin{cases} v^{''}+\lambda v=0\\ v(0)=v(L)\\ v'(0)=v'(L)\end{cases}$תנאי מחזור מתאים לתיל מעגלי. מחפשים ע"ע ופ"ע

1. $\lambda<0$

$$\begin{aligned}
v &= ae^{\sqrt{-\lambda}x}+be^{-\sqrt{-\lambda}x}\\
v(0)=v(L)\Rightarrow a+b &= ae^{\sqrt{-\lambda}L}+e^{-\sqrt{-\lambda}L}\\
v'(0)=v'(L)\Rightarrow\sqrt{-\lambda}\left(a-b\right) &= \sqrt{-\lambda}\left(ae^{\sqrt{-\lambda}L}-be^{-\sqrt{-\lambda}L}\right)\\
\Rightarrow2a &= 2ae^{\sqrt{-\lambda}L}\\
2b &= 2be^{\sqrt{-\lambda}L}\\
\Rightarrow a=b=0 &\vee \lambda=0
\end{aligned}$$

או פ"ע שווה 0.

2. $\lambda=0$

$$\begin{aligned}
v &= ax+b\\
v(0)=v(L)\Rightarrow b &= aL+b\\
a &= 0\\
v^{'}(0)=v^{'}(L)\Rightarrow a &= a
\end{aligned}$$

לכן יש פ"ע

$$\begin{aligned}
v_0 &= b\\
\lambda_0 &= 0
\end{aligned}$$

3. $\lambda>0$

$$\begin{aligned}
V &= a\sin\sqrt{\lambda}x+b\cos\sqrt{\lambda}x\\
v(0)=v(L)\Rightarrow b &= a\sin\sqrt{\lambda}L+b\cos\sqrt{\lambda}L\\
V^{'} &= a\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}x-b\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}x\\
v^{'}(0)=v^{'}(L)\Rightarrow a\sqrt{\lambda} &= a\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}L-b\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}L
\end{aligned}$$

קיבלנו

$$
\begin{aligned}
a\sin\sqrt{\lambda}L+b\cos\sqrt{\lambda}L &= b \qquad (9)\\
a\cos\sqrt{\lambda}L-b\sin\sqrt{\lambda}L &= a\\
(a\neq 0)\Rightarrow a^2\sin\sqrt{\lambda}L+ab\cos\sqrt{\lambda}L &= ab\\
ab\cos\sqrt{\lambda}L-b^2\sin\sqrt{\lambda}L &= ab\\
\Rightarrow\left(a^2+b^2\right)\sin\sqrt{\lambda}L &= 0\\
(9)\Rightarrow b\cos\sqrt{\lambda}L &= b\\
\cos\sqrt{\lambda}L &= 1\\
\sqrt{\lambda}L &= 2n\pi\\
\lambda &= \left(\frac{2n\pi}{L}\right)^2\\
(a=0)\Rightarrow b\cos\sqrt{\lambda}L &= b\\
-b\sin\sqrt{\lambda}L &= 0\\
\Rightarrow\forall a\in\mathbb{R},\lambda &= \left(\frac{2n\pi}{L}\right)^2\\
V_n &= b_n\cos\frac{2n\pi x}{L}\\
(b=0)\Rightarrow V_n &= a_n\sin\frac{2n\pi x}{L}
\end{aligned}
$$

4.0.6 תכונות של ע"ע ופ"ע של בעיית שטורם ליוביל

זהות לגרנז' תהינה $u,v\in C^2$

$$
\begin{aligned}
L[u] &= \left(pu^{'}\right)^{'}+qu\\
uL[v]-vL[u] &= \left[p\left(uv^{'}-u^{'}v\right)\right]^{'}
\end{aligned}
$$

הוכחה

$$
\begin{aligned}
uL[v]-vL[u] &= u\left(\left(pv^{'}\right)^{'}+qv\right)-v\left(\left(pu^{'}\right)^{'}+qu\right)\\
&= u\left(pv^{'}\right)^{'}-v\left(pu^{'}\right)^{'}\\
&= \left[\left(puv^{'}\right)^{'}-u^{'}pv^{'}\right]-\left[\left(pu^{'}v\right)^{'}-u^{'}pv^{'}\right]\\
&= \left(puv^{'}\right)^{'}-\left(pu^{'}v\right)^{'}\\
&= \left[p\left(uv^{'}-u^{'}v\right)\right]^{'}
\end{aligned}
$$

נוסחת גרין תהינה $u,v\in c^2$ שמקיימות תנאי שפה רגולרי

1. $\alpha u(a)+\beta u^{'}(a)=0$
2. $\gamma v(b)+\delta v^{'}(b)=0$

אז

$$\int_a^b uL[v]\,dx = \int_a^b vL[u]\,dx$$

הוכחה

$$\begin{aligned}
\int_a^b uL[v]-vL[u]\,dx &= \int_a^b \left[p\left(uv^{'}-u^{'}v\right)\right]^{'}dx \\
&= puv^{'}-pu^{'}v\Big|_a^b \\
(10,11)\Rightarrow &= p(b)\left[u(b)v^{'}(b)-u^{'}(b)v(b)\right]- \\
& \quad p(a)\left[u(a)v^{'}(a)-u^{'}(a)v(a)\right]=0 \\
\alpha v(a)+\beta v^{'}(a) &= 0 \\
\alpha u(a)+\beta u^{'}(a) &= 0 \\
\Rightarrow u^{'}(a) &= 0 \\
v^{'}(a) &= 0 \\
u(a)v^{'}(a)-u^{'}(a)v(a) &= 0 \\
\Rightarrow u(a) &= -\frac{\beta}{\alpha}u^{'}(a) \\
v(a) &= -\frac{\beta}{\alpha}v^{'}(a) \\
\Rightarrow u(a)v^{'}(a)-u^{'}(a)v(a) &= -\frac{\beta}{\alpha}u^{'}(a)v^{'}(a)-u^{'}(a)\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)v^{'}(a)=0
\end{aligned}$$

הערה אם $p(a)=p(b)$ אז הנוסחה נכונה גם לתנאי המחזורי $u(a)=, u^{'}(a)=u^{'}(b)$ $u(b)$

אורתוגונליות אם v_n, v_m פ"ע $(L[v]=-\lambda rv)$ המתאימות לע"ע $\lambda_n \neq \lambda_m$ אז

$$\langle v_n, v_m\rangle = \int_a^b r(x)v_nv_mdx=0$$

הוכחה

$$\begin{aligned}
L[v_m] &= -\lambda_n rv_n/v_m \\
L[v_m] &= -\lambda_m rv_m/v_n \\
v_mL[v_n]-v_nL[v_M] &= -\lambda_n rv_mv_n+\lambda_m rv_mv_n \\
0 &= \int_a^b v_mL[v_n]-v_nL[v_M]=(\lambda_m-\lambda_n)\int_a^b rv_nv_mdx
\end{aligned}$$

מכאן

$$\int_a^b rv_nv_m = 0$$

זאת אינה הוכחה למקרה המחזורי אבל נכון גם אז

ע"ע ממשים כל הע"ע של בעיית שטורם ליוביל רגולרית או מחזורית הם ממשים

הוכחה נניח בשלילה $\overline{\lambda} \neq \lambda$ נשים לב שאם V פ"ע של λ אז $\overline{v}$ פ"ע של $\overline{\lambda}$

$$\begin{aligned}\left(pv^{'}\right)+qv &= -\lambda rv\\ av^{'}(a)+\beta v^{'}(a) &= 0\\ \gamma v(b)+\delta v(b) &= 0\\ \overline{(pv')+qv} &= \overline{-\lambda rv}\\ \overline{av'(a)+\beta v'(a)} &= 0\\ \overline{\gamma v(b)+\delta v(b)} &= 0\end{aligned}$$

לכן $\overline{v}$ הפ"ע של $\overline{\lambda}$ אורתוגונלית

$$\begin{aligned}\int_a^b rv\overline{v}dx &= 0\\ \int_a^b r\left|v\right|^2 dx &= 0\\ \Rightarrow v &= 0\end{aligned}$$

לכן לא פ"ע

ע"ע פשוט כל הע"ע של בעיית שטורם ליוביל רגולרית פשוטים (ר"ג 1) כלומר אם v_1, v_2 פ"ע של λ אז $v_1 = kv_2$

$$\begin{aligned}L[v_1] &= -\lambda rv_1\\ L[v_2] &= -\lambda rv_2\\ v_2L[v_1]-v_1L[v_2] &= 0\\ \Rightarrow \left(pv_2v_1^{'}-pv_1v_2^{'}\right)^{'} &= 0\\ \Rightarrow pv_2v_1^{'}-pv_1v_2^{'} &= 0\\ &= p(a)\left[v_2(a)v_1^{'}(a)-v_1(a)v_2^{'}(a)\right]\\ \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^{'} &= \frac{v_2v_1^{'}-v_1v_2^{'}}{v_1^2}\equiv 0\\ \frac{v_2}{v_1} &= k\\ v_2 &= kv_1\end{aligned}$$

יש ∞ ע"ע אוסף הע"ע של בעיית שטורם ליוביל רגולרית מקיים

$$\lambda_0 < \lambda_0 < ... < \lambda_n$$

כאשר

$$\lim_{n\to\infty}\lambda_n = \infty$$

הע"ע המינימלי λ_0 נקרא ע"ע עיקרי והפ"ע המתאימה v_0 נקראת פ"ע עיקרי

נוסחת ריילירים לחישוב λ_0 (בלי הוכחה)

$$\lambda_0 = -\inf\frac{\int_a^b uL[u]\,dx}{\int_a^b ru^2dx}$$

האינפימום על כל פונקציה u שמקיימות את תנאי השפה

הע"ע אי-שליליים אם $q \le 0$ ולכל u מקיים את תנאי השפה $0 \le \left.puu^{'}\right|_a^b$ אז הע"ע אי-שליליים

הוכחה

$$\begin{aligned}
\lambda_0 &= -\inf\frac{\int_a^b uL[u]\,dx}{\int_a^b ru^2dx}\\
&= -\inf\frac{\int_a^b u\left[\left(pu^{'}\right)^{'}+qu\right]dx}{\int_a^b ru^2dx}\\
&= -\inf\frac{\int_a^b u\left(pu^{'}\right)^{'}+qu^2dx}{\int_a^b ru^2dx}\\
&= -\inf\frac{\left[\left.upu^{'}\right|_a^b-\int_a^b u^{'}pu^{'}+qu^2dx\right]}{\int_a^b ru^2dx}\\
&\ge 0\\
(\lambda_0\ge 0)\Rightarrow\lambda>\lambda_0 &\ge 0
\end{aligned}$$

תרגיל חשב ע"ע ופ"ע של

$$\begin{aligned}
u^{''}+\lambda u &= 0\\
u^{'}(0) &= 0\\
u(1)-u^{'}(1) &= 0
\end{aligned}$$

פתרון נתון $p=1,q=0$

$$\begin{aligned}
\left.quu^{'}\right|_0^1 &= u(1)\,u^{'}(1)-u(o)\,u^{'}(0)\\
&= u^{'}(1)^2>0
\end{aligned}$$

התנאי לא מתקיים לכן יתכן $\lambda<0$. נבדוק עבור $\lambda<0$

$$\begin{aligned}
u &= ae^{\sqrt{-\lambda}x}+be^{\sqrt{-\lambda}x}\\
0 &= u^{'}(0)=\sqrt{-\lambda}(a-b)\\
\Rightarrow a=b\Rightarrow u &= a\left(e^{\sqrt{-\lambda}x}+be^{\sqrt{-\lambda}x}\right)\\
a\left(e^{\sqrt{-\lambda}x}+e^{\sqrt{-\lambda}x}\right)=u(1) &= u^{'}(1)=a\sqrt{-\lambda}\left(e^{\sqrt{-\lambda}x}-e^{\sqrt{-\lambda}x}\right)\\
\frac{e^{\sqrt{-\lambda}x}-e^{\sqrt{-\lambda}x}}{e^{\sqrt{-\lambda}x}+e^{\sqrt{-\lambda}x}} &= \frac{1}{\sqrt{-\lambda}}
\end{aligned}$$

למשוואה

$$\tanh x-\frac{1}{x} = \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}-\frac{1}{x}=0$$

יש פתרון יחיד $x>0$ הפתרון הזה נותן ע"ע שלילי $\lambda=-x^2$

תרגיל יהי $h>0$ מספר קבוע

1. מצא פ"ע וע"ע (בצורה סתומה) של $\begin{cases} u'' + \lambda u = 0 \\ u(0) = 0 \\ hu'(1) + u'(1) = 0 \end{cases}$
2. הראה שבכל קטע $\left[k\pi + \frac{\pi}{2}, (k+1)\pi + \frac{\pi}{2}\right]$ יש ע"ע יחיד (ולכן $\lambda_n \to \infty$)

פתרון

1. נבדוק $q = 0$

$$\begin{aligned} quu'\Big|_0^1 &= u(1)u'(1) - u(0)u'(0) \\ &= -hu^2(1) \le 0 \end{aligned}$$

לכן אין ע"ע שליליים.
$\lambda = 0$

$$\begin{aligned} u &= ax + b \\ 0 &= u(0) = b \\ u &= ax \\ h(a) + a &= 0 \\ a(h+1) &= 0 \\ (h > 0) \Rightarrow a &= 0 \end{aligned}$$

לכן $\lambda = 0$ אינו ע"ע
$\lambda > 0$

$$\begin{aligned} u &= a\sin\sqrt{\lambda}x + b\cos\sqrt{\lambda}x \\ 0 &= u(0) = b \\ u &= a\sin\sqrt{\lambda}x \\ ha\sin\sqrt{\lambda} + \sqrt{\lambda}a\cos\sqrt{\lambda} &= 0 \\ (a \ne 0) \Rightarrow \tan\sqrt{\lambda} &= -\frac{\sqrt{\lambda}}{h} \end{aligned}$$

לכן בכל תחום של $\tan$ יש חיתוך אם h והחיתוך הוא הע"ע והפ"ע $u_n =$
$a\sin\sqrt{\lambda_n}x$

2. נסמן

$$\begin{aligned} h(x) &= \tan x + \frac{x}{h} \\ \lim_{x \to \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)^+} f(x) &= \infty \\ \lim_{x \to \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)^-} f(x) &= -\infty \end{aligned}$$

לכן יש שורש בקטע וכיוון ש

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{h} > 0$$

השורש יחיד בכל קטע.

נסכם קיימים ∞ ע"ע ממשים ואם $puu'\Big|_a^b \le 0$ אז אי-שליליים לכל ע"ע יש פ"ע יחידה (רגולרי) או ? פ"ע (מחזורי) סדרת הפ"ע א"ג $\langle u, v\rangle = \int_a^b tuvdx = 0$ לכן ניתן להשתמש בפ"ע כבסיס למרחב הפונקציות (אם f רציפה ומקיימת את תנאי השפה) כלומר לרשום $f(x)$ בצורה יחידה $f = \sum a_n u_n(x)$ כאשר u_n פונקציות עצמיות a_n מקדמים

חישוב מקדמים $f(x)=\sum a_n u_n(x)$ **ניקח** u_n **ספציפית ונכפול את שני האגפים**

$$\begin{aligned} rf(x)u_n &= \sum a_n r u_n u_m \\ \int_a^b rf(x)u_n dx &= \int_a^b \sum a_n r u_n u_m \end{aligned}$$

לפי משפט הפיתוח התכנסות במ"ש $[a,b]$ **לכן אפשר להפוך סדר סכימה**

$$\int_a^b \sum a_n r u_n u_m = \sum \int_a^b a_n r u_n u_m$$

ומהא"ג

$$\sum \int_a^b a_n r u_n u_m = a_m \int_a^b r u_m^2 dx$$

קיבלנו

$$a_m = \frac{\int_a^b rf(x)u_n dx}{\int_a^b r u_m^2 dx}$$

משפט (בלי הוכחה) **אם** f **רציפה וגזירה למקוטעין ומקיימת את תנאי השפה של בעיית שטורם ליוביל רגולרית או מחזורית שהפ"ע הם** u_n **אז הטור** $\sum a_n u_n$ **כאשר** $a_n = \frac{\int_a^b rf(x)u_n dx}{\int_a^b r u_m^2 dx}$ **מתכנס ל** $f(x)$ **במ"ש ב** $[a,b]$

הערות

1. **אם** f **לא רציפה ב-**x_0 **אז בנקודה זאת הטור מתכנס לממוצע הקפיצה כלומר** $\frac{f_+(x_0)+f_-(x_0)}{2}$.
2. **אם מנרמלים את סדרת הפונקציות העצמיות כלומר מגדירים** $\tilde{u_n} = \frac{u_n}{\sqrt{\int_a^b r u_n^2 dx}}$ **אז** $f(x)=\sum a_n \tilde{u_n}$ **כאשר** $a_n = \int_a^b rf(x)\tilde{u_n}dx$
3. **לבעיה המחזורית לכל** λ_n **יש 2 פ"ע** $\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ **והפיתוח**

$$f(x) = \sum a_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

כאשר

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{L}\int_0^L f \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \\ b_n &= \frac{2}{L}\int_0^L f \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \\ b_0 &= \frac{1}{L}\int_0^L f dx \end{aligned}$$

לפעמים רושמים את הטור בצורה

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

זהו טור פורייה של f (טור פורייה נכון רק לבעיה המחזורית)

תרגיל $\begin{cases} \left(xv^{'}\right)^{'}+\frac{\lambda}{x}v=0 & 1<x<e\\ v\left(1\right)=v^{'}\left(e\right)=0 \end{cases}$

1. מצא ע"ע ופ"ע
2. הראה ישירות שהפ"ע א"ג
3. מצא סדרה א"נ של פ"ע
4. פתח $f(x)=(\ln x)^2-2\ln x$ לטור פוריה מוכלל של הפ"ע הנ"ל.

פתרון

1. $p\left(x\right)=x>0,q=0,r=\frac{1}{x}>0$ לכן הבעיה רגולרית. נבדוק אם יש ע"ע שליליים

$$pvv^{'}\Big|_a^b = ev\left(e\right)v^{'}\left(e\right)-1v\left(1\right)v^{'}\left(1\right)=0$$

וגם $q\leq 0$ לכן ע"ע אי-שליליים. המשוואה $\left(xv^{'}\right)^{'}+\frac{\lambda}{x}v=0$ משוואת אויילר לכן מציבים $x=e^t$ נציב $u\left(t\right)=v\left(x\right)$ וגם $v^{'}\left(x\right)=\frac{du}{dt}\frac{dt}{dx}=\frac{u^{'}}{x}$ וגם $\left(xv^{'}\right)^{'}=\left(x\frac{u}{x}\right)^{'}=\frac{u^{''}}{x}$ לכן נציב

$$\begin{aligned} \frac{u^{''}}{x}+\frac{\lambda u}{x} &= 0\\ u^{''}+\lambda u &= 0\\ \left(v\left(1\right)=v^{'}\left(e\right)=0\right)\Rightarrow u\left(0\right) &= 0\\ \frac{u^{'}\left(1\right)}{e}=u^{'}\left(1\right) &= 0 \end{aligned}$$

אם $\lambda=0$

$$\begin{aligned} u &= ax+b\\ u\left(0\right)=0 &\Rightarrow b=0\\ u^{'}\left(1\right)=0 &\Rightarrow a=0 \end{aligned}$$

כלומר אין פ"ע.
אם $\lambda>0$

$$\begin{aligned} u &= a\sin\sqrt{\lambda}t+b\cos\sqrt{\lambda}t\\ \left(u\left(0\right)=0\right)\Rightarrow b &= 0\\ u &= a\sin\sqrt{\lambda}t\\ \left(u^{'}\left(1\right)=0\right)\Rightarrow a\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda} &= 0\\ \sqrt{\lambda} &= \left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right),n=0,1,2,...\\ \lambda &= \left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right)^2\\ u_n &= \sin\left(\pi\left(\frac{1}{2}+n\right)t\right)\\ v_n &= \sin\left(\pi\left(\frac{1}{2}+n\right)\ln x\right) \end{aligned}$$

2. נראה א"ג

$$\begin{aligned}\int_1^e rv_nv_m &= \int_1^e \frac{1}{x}\sin\left(\pi\left(\frac{1}{2}+n\right)\ln x\right)\sin\left(\pi\left(\frac{1}{2}+m\right)\ln x\right)dx\\ (t=\ln x) &= \int_0^1 \sin\left(\pi\left(\frac{1}{2}+n\right)t\right)\sin\left(\pi\left(\frac{1}{2}+m\right)t\right)dt\\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 \cos\pi t\,(n-m)-\cos\pi t\,(n+m+1)=0\end{aligned}$$

3. ננרמל

$$\begin{aligned}\int_1^e rv_n &= \int_1^e \frac{1}{x}\sin^2\left(\pi\left(\frac{1}{2}+n\right)\ln x\right)dx\\ &= \int_0^1 \sin^2\left(\pi\left(\frac{1}{2}+n\right)t\right)dt\\ &= \int_0^1 \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos\left(\pi\left(1+2n\right)t\right)dt=\frac{1}{2}\\ \Rightarrow \tilde{v_n} &= \frac{v_n}{\sqrt{\int_1^e rv_n}}=2v_n=\sqrt{2}\sin\left(\pi\left(\frac{1}{2}+n\right)\ln x\right)\end{aligned}$$

4. רשום $f(x)=(\ln x)^2-2\ln x$ כטור פוריה מוכלל

$$\begin{aligned}a_n &= \int_1^e \frac{1}{x}\sqrt{2}\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\ln x\right)\left((\ln x)^2-2\ln x\right)dx\\ (t=\ln x)\Rightarrow &= \int_0^1 \sqrt{2}\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi t\right)\left(t^2-2t\right)dt\\ \ldots &= \frac{2\sqrt{2}}{\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\right)^3}\left(\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi-\cos 0\right)\\ &= \frac{-2\sqrt{2}}{\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\right)^3}\end{aligned}$$

ואז ע"פ משפט בקטע

$$(\ln x)^2-2\ln x = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{-4}{\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\right)^3}\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\ln x\right)$$

הערה ניתן לראות התכנסות במ"ש

$$|f_n(x)| \le \frac{4}{\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\right)^3}\sim\frac{1}{n^3}$$

כלומר קטן מטור מספרי מתכנס אזי לפי מבחן הM של ווירשטרס הטור מתכנס במ"ש.

4.1 משוואה החום

4.1.1 רקע פיזיקלי

נתון מוט ארוך וצר עשוי מחומר מוליך חום עם שפה מבודדת תרמית למעט אולי הקצוות. מניחים שלא נוצר חום בתוך המוט. נסמן ρ צפיפות המוט C קיבול החום $[a,b]$המיקום

על ציר x. A שטח החתך. נסתכל על פרוסה מהמוט באורך Δx סביב x_0. מסת הפרוסה $\rho A\Delta x=m$. האנרגיה הדרושה להעלות טמפרטורה אחת את הפרוסה $C\rho A\Delta X$ ועבור $u\left(x_0,t\right)$ יחידות $C\rho A\Delta xu\left(x,t\right)$. נסמן $E\left(t\right)$ האנרגיה הדרושה להעלות את הטמפרטורה של כל המוט מ-0 ל $u\left(x,t\right)$ היא

$$\begin{aligned}
E\left(t\right) &= \int_a^b C\rho Au\left(x,t\right)dx \\
\Rightarrow E^{'}\left(t\right) &= \int_a^b C\rho Au_t\left(x,t\right)dx \qquad (10)
\end{aligned}$$

קיבלנו את קצב השינוי באנרגיה הכוללת $E^{'}$. מצד שני מתצפיות ידוע שחום זורם מאזור-ים חמים לקרים. פוריה הניח שקצב זרימת החום פרופורציונלי להפרש הטמפרטורה פרו-פורציונלי הפוך למרחק. קצב זרימת החום בפרוסה באורך Δx, להלן q

$$\begin{aligned}
q &= -\tilde{k}A\left(\frac{u\left(x_0+\Delta x,t\right)-u\left(x,t\right)}{\Delta x}\right) \\
q &= -\tilde{k}Au_x
\end{aligned}$$

זה חוק פורייה. בתלת מימד $q=-\tilde{k}A\nabla u$. השינוי באנרגיה של המוט נגרם כתוצאה מחום שנכנס/יוצא דרך הקצוות

$$\begin{aligned}
E^{'} &= -\tilde{k}Au_x\left(a,t\right)+\tilde{k}Au_x\left(b,t\right) \\
&= \tilde{k}A\ u_x\left(x,t\right)\Big|_a^b \\
&= \int_a^b \tilde{k}Au_{xx}\left(x,t\right)dx \qquad (11) \\
\left(10\right),\left(11\right)\Rightarrow &= \int_a^b C\rho Au_t\left(x,t\right)dx \\
\Rightarrow C\rho Au_t\left(x,t\right) &= \tilde{k}Au_{xx}\left(x,t\right) \\
u_t-ku_{xx} &= 0\, k=\frac{k}{C\rho}
\end{aligned}$$

תנאי שפה למשל $u\left(a,t\right)=0$ הטמפרטורה בקצה תמיד 0 ואם $u_x\left(a,t\right)=0$ הקצה גם מבודד, אין מעבר חום.

4.1.2 פתרון בעיה הומוגנית בשיטת הפרדת משתנים

$$u_t-ku_{xx} = 0\, 0<x<L,t>0$$

תנאי נוימן

$$\begin{aligned}
u_x\left(0,t\right) &= 0\, t>0 \\
u_x\left(1,t\right) &= 0\, t>0
\end{aligned}$$

חום התחלתי

$$u\left(x,0\right) = f\left(x\right)$$

תנאי תאימות

$$\begin{aligned}
f^{'}\left(0\right) &= 0 \\
f^{'}\left(L\right) &= 0
\end{aligned}$$

שיטת הפתרון מחפשים $u(x,t)=X(x)T(t)$ מציבים במשוואה $XT^{'}=kX^{''}T$ ומ- קבלים

$$\begin{aligned} \frac{X^{''}}{X} &= \frac{T^{'}}{kT}=-\lambda \\ X^{''}+\lambda X &= 0 \end{aligned}$$

מהתנאי הראשון

$$\begin{aligned} X^{'}(0)T(t) &= 0 \\ \Rightarrow X^{'}(0) &= 0 \\ X^{'}(L)T(t) &= 0 \\ \Rightarrow X^{'}(L) &= 0 \end{aligned}$$

קיבלנו בעיית שטורם ליוביל

$$\begin{aligned} X^{''}+\lambda X &= 0 \\ X^{'}(0)=X^{'}(L) &= 0 \end{aligned}$$

וגם $q=0, pxx^{'}|_0^L=0$ כלומר אין ע"ע שליליים. אם $\lambda=0$

$$\begin{aligned} X &= ax+b \\ x^{'} &= a \\ x^{'}(0)=x^{'}(L) &= 0\Rightarrow a=0 \end{aligned}$$

כלומר $X_0=1, \lambda_0=0$. עבור $\lambda>0$

$$\begin{aligned} x &= a\sin\sqrt{\lambda}x+b\cos\sqrt{\lambda}x \\ x^{'} &= \sqrt{\lambda}\left(a\cos\sqrt{\lambda}x-b\sin\sqrt{\lambda}x\right) \\ X^{'}(0) &= \sqrt{\lambda}a\Rightarrow a=0 \\ X^{'}(L) &= -\sqrt{\lambda}b\sin\sqrt{\lambda}L \\ \sqrt{\lambda}L &= n\pi, n=1,2,3,... \\ \lambda_n &= \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \\ X_n &= \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \end{aligned}$$

נמצא את החלק של הטמפרטורה

$$\begin{aligned} T_n^{'}+\lambda_n kT_n &= 0 \\ T_n &= c_n e^{-\lambda_n kt} \\ T_n &= c_n e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 kt}, n=0,1,2,.. \end{aligned}$$

לבסוף

$$u_n = c_0+\sum_{n=1}^{\infty}c_n e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 kt}\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

מתנאי ההתחלה

$$f(x) = u(x,0)=c_0+\sum_{n=1}^{\infty}c_n\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

ואת המקדמים מקבלים לפי הפיתוח של f.

דוגמא $\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 & t > 0, 0 < x < \pi \\ u_x(x,0) = u_x(\pi,t) = 0 & t > 0 \\ u(x,0) = \frac{3}{4}\cos x - \frac{1}{4}\cos 3 & 0 < x < \pi \end{cases}$ **אזי**

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{3}{4} \\ c_3 &= -\frac{1}{4} \\ c_n &= 0 \end{aligned}$$

ואז $u(x,t) = \frac{4}{3}e^{-t}\cos x - \frac{1}{4}e^{-9t}\cos 3x$

דוגמא $\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 & t > 0, 0 < x < \pi \\ u_x(x,0) = u_x(\pi,t) = 0 & t > 0 \\ u(x,0) = \frac{\pi x^2}{2} - \frac{x^3}{3} & 0 < x < \pi \end{cases}$ **אזי**

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{\int_0^\pi \left(\frac{\pi x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right) 1dx}{\int_0^\pi 1dx} = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \left(\frac{\pi x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right) 1dx = \frac{\pi^3}{12} \\ c_n &= \frac{\int_0^\pi \left(\frac{\pi x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\cos(nx)\,dx}{\int_0^\pi \cos^2 nx dx} = \frac{2}{\pi}\frac{-2}{n^3}\left(\frac{-\cos nx}{n}\right)\Big|_0^\pi \\ &= \begin{cases} 0 & n = 2k \\ -\frac{8}{\pi n^4} & n = 2k+1 \end{cases} \\ u(x,t) &= \frac{\pi^3}{12} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-8}{\pi(2k+1)^4} e^{-(2k+1)^2 t}\cos(2k+1)x \end{aligned}$$

4.1.3 מד"ח לא הומוגנית

$$\begin{aligned} u_t - ku_{xx} &= F(x,t) \; 0 < x < t, t > 0 \\ u_x(0,t) &= u_x(L,t) = 0 \\ u(x,0) &= f(x) \end{aligned}$$

מחפשים פתרון מופרד $u(x,t) = XT$ **מציבים במשוואה ההומוגנית המתאימה**

$$\begin{aligned} XT' &= kx''T \\ \frac{X''}{X} &= \frac{T'}{kT} = -\lambda \end{aligned}$$

מתנאי $x'(0) = x'(L)$ **פותרים שטורם ליוביל**

$$\begin{aligned} X'' + \lambda X &= 0 \\ X'(0) &= X'(L) = 0 \end{aligned}$$

ומקבלים λ_n **ע"ע** X_n **פ"ע. רושמים צורת פתרון**

$$u(x,t) = \sum X_n T_n$$

נציב במשוואה (בהנחה שיש התכנסות במ"ש

$$\begin{aligned} \sum X_n T_n' - \sum k X_n'' T_n &= \sum X_n T_n' - \sum k(-\lambda X_n) T_n \\ &= \sum X_n \left(T_n' + k\lambda T_n\right) = F(x,t) \end{aligned}$$

נפתח את F לטור באופן הבא

$$\begin{aligned}
F(x,t) &= \sum c_n(t) X_n \\
\int_a^b X_m F &= \sum c_n(t) \int_a^b X_n X_m = c_m \int_a^b X_m^2 \\
\Rightarrow c_m &= \frac{\int_a^b X_m F}{\int_a^b X_m^2} \\
\Rightarrow \sum X_n \left(T_n^{'} + k\lambda T_n\right) &= \sum c_n(t) X_n
\end{aligned}$$

לכן נפתור

$$T_n^{'} + k\lambda T_n = c_n(t)$$

דוגמא

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = \left(2x - x^2\right) e^{-t} & t > 0, 0 < x < 1 \\ u(x,0) = \sin\frac{\pi x}{2} & 0 \le x \le 1 \\ u(0,t) = 0 \\ u_x(1,t) = 0 \end{cases}$$ בעיית שטורם ליוביל שמתקבלת

מהצבת $u = XT$ במשוואה ההומוגנית

$$\begin{aligned}
X^{''} + \lambda X &= 0 \\
X(0) = X^{'}(1) &= 0
\end{aligned}$$

וגם $pxx^{'}|_0^1 = 0$ כלומר אין ע"ע שליליים. אם $\lambda = 0$

$$\begin{aligned}
X &= ax + b \\
\Rightarrow b &= 0 \\
X &= ax \\
X^{'}(1) &= a = 0 \\
\Rightarrow X &= 0
\end{aligned}$$

אם $\lambda > 0$

$$\begin{aligned}
X &= a\sin\sqrt{\lambda}x + b\cos\sqrt{\lambda}x \\
X(0) = 0 &\Rightarrow b = 0 \\
X^{'}(1) &= -a\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda} = 0 \\
\lambda_n &= \left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right)^2 \\
X_n &= \sin\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) x
\end{aligned}$$

צורת פתרון

$$u(x,t) = \sum_0^\infty T_n \sin\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) x$$

נציב במשוואה

$$\begin{aligned}
\sum_0^\infty T_n^{'} \sin\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right)x - \sum_0^\infty T_n\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right)^2\left(-\sin\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right)x\right) &= e^{-t}\left(2x-x^2\right)\\
\Rightarrow \sum_0^\infty\left[T_n^{'}+T_n\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right)^2\right]\sin\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right)x &= e^{-t}\left(2x-x^2\right)\\
\sum_0^\infty c_n \sin\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right)x &= e^{-t}\left(2x-x^2\right)\\
c_n(t) &= \frac{\int_0^1 e^{-t}\left(2x-x^2\right)\sin x\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right)dx}{\int_0^1 \sin^2 x\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right)dx}\\
\ldots &= \frac{4e^{-t}}{\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right)^3}
\end{aligned}$$

לכל n פותרים

$$\begin{aligned}
T_n^{'}+\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right)^2 T_n &= \frac{4e^{-t}}{\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right)^3}\\
T_n &= e^{-\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right)^2 n^2 t}\left[\int \frac{4e^{-t}}{\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right)^3}e^{\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right)^2 t}\right]\\
&= e^{-\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right)^2 n^2 t}\left[\frac{4e^{\left(\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right)^2-1\right)t}+c_n}{\left(\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right)^2-1\right)\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right)^3}\right]\\
u(x,t) &= \sum_0^\infty\left[\frac{4e^{-t}}{\left(\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right)^2-1\right)\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right)^3}+c_n e^{-\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right)^2 t}\right]\sin\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right)x\\
\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) &= u(x,0)=\sum_{n=0}^\infty\left(\beta_0+c_n\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right)x,\beta_n\\
&= \left(\frac{4}{\left(\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right)^2-1\right)\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right)^3}\right)\\
1 &= \beta_0+c_0\\
0 &= \beta_n+c_n\\
c_0 &= 1-\beta_0\\
c_n &= -\beta_n
\end{aligned}$$

4.2 מד"ח עם תנאי שפה לא הומוגני

בעיה לא הומוגנית
$$\begin{cases}
u_{tt}-u_{xx}=F(x,t) & 0<x<t, t>0\\
\alpha u(0,t)+\beta u_x(0,t)=a(t) & t\geq 0\\
\gamma u(L,t)+\delta u_x(L,t)=b(t) & t\geq 0\\
u(x,0)=f(x) & 0<x<L\\
u_t(x,0)=g(x) & 0<x<L
\end{cases}$$
נחפש פונקציה $w(x,t)$

שמקיימת את תנאי השפה הנתונים ואז נגדיר $v=u-w$ ונפתור בעיה חדשה עבור v עם

תנאי שפה הומוגנים

$$\begin{aligned} v_{tt}-c^2v_{xx} &= F(x,t)-\left[w_{tt}-c^2w_{xx}\right] \\ \alpha v(0,t)+\beta v_x(0,t) &= 0 \\ \gamma u(L,t)+\delta u_x(L,t) &= 0 \\ u(x,0) &= f(x)-w(x,0) \\ u_t(x,0) &= g(x)-w_t(x,0) \end{aligned}$$

נחפש w מהצורה הכללית $w(x,t)=\left(A_1+B_1x+C_1x^2\right)a(t)+\left(A_2+B_2x+C_2x^2\right)b(t)$ כשאת המקדמים בוחרים כך שתנאי השפה מתקיימים. הפולינום נותן לנו דרגת חופש ומשחק עם מקדמים לאחר שפותרים מציבים $u=v+w$

דוגמא

$$\begin{aligned} u_{tt}-4u_{xx} &= t\sin 3x \\ u(0,t) &= 0 \\ u_t(\pi,t) &= 1 \\ u(x,0) &= \frac{X^2}{\pi^2} \\ u_t(x,0) &= 0 \end{aligned}$$

פתרון

$$\begin{aligned} w(x,t) &= \left(A+Bx+Cx^2\right)a(t)+\left(A_2+B_2x+C_2x^2\right)b(t) \\ &= \left(A_2+B_2x+C_2x^2\right) \\ 0 &= w(0,t)=A_2 \\ 1 &= \omega(\pi,t)=\left(B_2\pi+C_2\pi^2\right) \\ C_2 &= 0, B_2=\frac{1}{\pi} \\ \Rightarrow w(x,t) &= \frac{x}{\pi} \end{aligned}$$

נגדיר $v=u-w$ ונפתור בעיה חדשה

$$\begin{aligned} v_{tt}-4v_{xx} &= t\sin 3x-[0-4\cdot 0]=t\sin 3x \\ v(0,t) &= 0-0=0 \\ v(\pi,t) &= 1-1=0 \\ v(x,0) &= u(x,0)-w(x,0)=\frac{x^2}{\pi^2}-\frac{x}{\pi} \\ v_t(x,0) &= 0-0=0 \end{aligned}$$

נחפש $V=XT$ונציב במשוואה ההומוגנית

$$\begin{aligned} v_{tt} &= 4v_{xx} \\ T''X &= 4XT'' \\ \frac{X''}{X} &= \frac{T''}{4t}=-\lambda \\ X''+\lambda X &= 0 \end{aligned}$$

נציב בתנאי השפה ההומוגנית

$$\begin{aligned} X(0)T(t) &= 0 \\ X(\pi)T(t) &= 0 \\ X(0)=X(\pi) &= 0 \end{aligned}$$

הע"ע $\lambda_n = n^2, n = 1, 2,$ הפ"ע $X_n = \sin nx$. צורת הפתרון

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin nx$$

נציב במשוואה האי-הומוגנית

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} T^{''}(t)\sin(nx) + 4\sum_{n=1}^{\infty} T(t)\, n^2 \sin(nx) &= t\sin 3x \\
\sum_{n=1}^{\infty} \left(T^{''}(t) + 4T(t)\, n^2\right)\sin(nx) &= t\sin 3x \\
(n \neq 3) \Rightarrow T^{''}(t) + 4n^2 T(t) &= 0 \\
T_n &= a_n \sin 2nt + b_n \cos 2nt \\
(n = 3) \Rightarrow T^{''}(t) + 36T(t) &= t \\
T_3 &= a_3 \sin 6t + b_3 \cos 6t + \frac{t}{36}
\end{aligned}$$

נציב את הפתרון הכללי בתנאי ההתחלה

$$x(x-\pi) = v(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(0) \sin nx$$

נפתח את $x(x-\pi)$ לטור סינוסים

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\pi^2} x(x-\pi) &= \frac{1}{\pi^2} \sum C_n \sin nx \\
C_n &= \frac{\int_0^{\pi} x(x-\pi)\sin(nx)\,dx}{\int_0^{\pi} \sin^2(nx)\,dx} \\
&= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x(x-\pi)\sin(nx)\,dx \\
\ldots &= \begin{cases} \frac{8}{n^3\pi} & n = 2k-1 \\ 0 & n = 2k \end{cases} \\
\frac{x(x-\pi)}{\pi^2} &= \frac{8}{\pi^3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^3} \sin(2k-1)x = \sum T_n(0) \sin nx \\
\Rightarrow T_{2k-1}(0) &= \frac{8}{n^3\pi^3} \\
T_{2k}(0) &= 0
\end{aligned}$$

נציב בתנאי התחלה שני

$$\begin{aligned}
0 = v_t(x,0) &= \sum_{n=1}^{\infty} T_n^{'}(0) \sin nx \\
T_n^{'}(0) &= 0
\end{aligned}$$

נסכם את הפתרון

$$
\begin{aligned}
n=3 \Rightarrow T_3^{''}+36T_3 &= t\\
T_3(0) &= \frac{8}{3^3\pi^3}\\
T_3^{'}(0) &= 0\\
0 &= T_3^{'}(0)=6a_3\cos 0-6b_3\sin(0)+\frac{1}{36}=6a_3=0\\
a_3 &= -\frac{1}{6\cdot 36}\\
b_3 &= T_3(0)=\frac{8}{3^3\pi^3}\\
n\neq 3, n=2k-1 \Rightarrow T_n^{''}+4n^2T_n &= 0\\
T_n(0) &= \frac{8}{n^3\pi^3}\\
T_n^{'}(0) &= 0\\
T_n &= a_n\sin 2nt+b_n\cos 2nt\\
0 &= T_n^{'}(0)+2na_n\\
a_n &= 0\\
b_n &= T_n(0)=\frac{8}{n^3\pi^3}\\
n=2k \Rightarrow T_n^{''}+4n^2T_n &= 0\\
T_n(0) &= 0\\
T_n^{'}(0) &= 0\\
\Rightarrow T_{2k} &\equiv 0\\
v(x,t) &= \sum_{\substack{k=0\\ k\neq 0}}^{\infty}\frac{8\pi}{(2k-1)^3\pi^3}\cos 2(2k+1)t\sin(2k+1)x\\
&\quad +\left(\frac{8}{3^3\pi^3}\cos 23^3t\sin 3x\right)\\
&+\left[-\frac{1}{36\cdot 6}\sin 6t+\frac{t}{36}\right]\sin 3x\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{8\pi}{(2k+1)^3\pi^3}\cos 2(2k+1)t\sin(2k+1)x\\
&\quad +\left[-\frac{1}{36\cdot 6}\sin 6t+\frac{t}{36}\right]\sin 3x\\
u &= v+\omega\\
u &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{8\pi}{(2k+1)^3\pi^3}\cos 2(2k+1)t\sin(2k+1)x\\
&\quad +\left[-\frac{1}{36\cdot 6}\sin 6t+\frac{t}{36}\right]\sin 3x+\frac{x}{\pi}
\end{aligned}
$$

4.2.1 אינטגרל האנרגיה ויחידות הפתרון

בעיית הגלים תנאי דריכלה

$$\begin{aligned}
u_{xx}-c^2u_{xx} &= F(x,t)\\
u(0,t) &= a(t)\\
u(L,t) &= b(t)\\
u(x,0) &= f(x)\\
u_t(x,0) &= g(x)
\end{aligned}$$

משפט הפתרון יחיד

הוכחה נניח u_1,u_2 **פתרונות של אותה בעיה נגדיר** $v=u_1-u_2$ **צ"ל** $v\equiv 0$. v **מקיים**

$$\begin{aligned}
v_{tt}-c^2v_{xx} &= 0\\
v(0,t)=v(L,t) &= 0\\
v(x,0)=v_t(x,0) &= 0
\end{aligned}$$

נגדיר, אינטגרל האנרגיה

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^L \left(v_t^2+c^2v_x^2\right)dx$$

המטרה להוכיח $E=0$ **כלומר** $v\equiv 0 \Rightarrow v\equiv const$

$$\begin{aligned}
E_t(t) &= \frac{1}{2}\int_0^L\left(2v_tv_{tt}+c^22v_xv_{xt}\right)dx\\
&= \int_0^L v_tv_{tt}dx+\int_0^L c^2v_xv_{xt}dx\\
\left[(v_xv_t)_x-v_{xx}v_t=v_xv_{xt}\right]\Rightarrow &= \int_0^L\left(v_tv_{tt}+c^2\left((v_xv_t)_x-v_{xx}v_t\right)\right)dx\\
&= \int_0^L v_t\left(v_{tt}-c^2v_{xx}\right)+c^2(v_xv_t)_x\,dx\\
&= \int_0^L c^2(v_xv_t)_x\,dx\\
&= c^2v_xv_t\Big|_0^L\\
E_t(t) &= v^2\left(v_x(L)\,v_t(L)-v_x(0)\,v_t(0)\right)\\
(v(0,t)=v(L,0)=0)\Rightarrow v_t(0,t) &= 0\\
v_t(l,t) &= 0\\
\Rightarrow E_t(t) &= 0\\
\Rightarrow E(t) &= const\\
E(t) &= E(0)\\
&= \frac{1}{2}\int_0^L v_t^2(x,0)+c^2v_x^2(x,0)\,dx=0\\
\Rightarrow \frac{1}{2}\int_0^L\left(v_t^2+c^2v_x^2\right)dx &= 0\\
v_t=v_x &= 0\\
v &= const\\
v &\equiv v(x,0)=0\Rightarrow u_1=u_2
\end{aligned}$$

משפט תנאי נוימן נותן יחידות

הוכחה

$$\begin{aligned} v_{tt}-c^2v_{xx} &= 0\\ v_x(0,t)=v_x(L,t) &= 0\\ v(x,0)=v_t(x,0) &= 0 \end{aligned}$$

כל ההוכחה אותו דבר ההבדל היחיד הוא ש

$$\begin{aligned} E_t(t) &= v^2\left(v_x(L)\,v_t(L)-v_x(0)\,v_t(0)\right)\\ \Rightarrow\left(v_x(L)=v_x(0)=0\right)\Rightarrow &= 0 \end{aligned}$$

4.3 בעיית החום מוגדרת היטב

4.3.1 יחידות, בעיית החום

$$\begin{cases} u_t-ku_{xx}=F(x,t) & 0<x<L, t>0\\ u_x(0,t)=a(t)\\ u_x(L,t)=b(t)\\ u(x,0)=f(x) \end{cases}$$

משפט תנאי דריכלה ותנאי נוימן נותן יחידות

הוכחה מניחים u_1,u_2 פתרונות מגדירים $v=u_1+u_2$ צ"ל $v=0$

$$\begin{aligned} v_t-kv_{xx} &= 0\\ v_x(0,t)=v_x(L,t)=v(x,0) &= 0 \end{aligned}$$

מגדירים אינטגרל אנרגיה

$$\begin{aligned} E(t) &= \frac{1}{2}\int_0^L v^2(x,t)\,dx\\ E_t(t) &= \int_0^L vv_t dx\\ &= k\int_0^L vv_{xx}dx\\ &= k\left[(vv_x)|_0^L-\int_0^L v_xv_xdx\right]\\ &= k\left[v(L,t)\,v_x(L,t)-v(0,t)\,v_x(0,t)-\int_0^L v_x^2dx\right]\\ \left(v_x(0,t)=v_x(L,t)\wedge v(0,t)=v(L,t)\right)\Rightarrow &= -k\int_0^L v_x^2dx\le 0\\ \Rightarrow\forall x<y, E(x) &\ge E(y)\\ E(0) &= \frac{1}{2}\int_0^L v^2(x,t)\,dx=0 \end{aligned}$$

לכן לכל $t \geq 0$ מתקיים $E(t) \leq E(0) = 0$ מצד שני מהגדרת

$$\begin{aligned} E(t) &= \frac{1}{2}\int_0^L v^2(x,t)\,dx \geq 0 \\ \Rightarrow E(t) &= 0 \\ \Rightarrow v^2 &= 0 \\ \Rightarrow u_1 &= u_2 \end{aligned}$$

הערה הטענה נכונה גם לתנאי מעורב שבו $\alpha, \beta > 0$

$$\begin{aligned} v(0,t) + \alpha v_x(0,t) &= 0 \\ v(L,t) + \beta v_x(L,t) &= 0 \\ \Rightarrow v(0,t) &= -\alpha v_x(0,t) \\ \Rightarrow v(L,t) &= -\beta v_x(L,t) \\ (vv_x)|_0^L &= v(L,t)\,v_x(L,t) - v(0,t)\,v_x(0,t) \\ &= -\alpha v_x(L) + \beta v_x(0) \end{aligned}$$

4.3.2 עקרון המקסימום (החלש) לבעיית החום

משפט יהי $u \in c\left(\overline{D}\right)$ (פונקציה רציפה בתחום סגור) פתרון של

$$(\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{xx})\,; u_t - k\Delta u = 0$$

נסמן $Q_T = \{(x,y,z,t)\,|\,(x,y,z) \in D, 0 \leq t \leq T\}$ וגם

$$\partial_p Q_T = \{(x,y,z,t)\,|\,(x,y,z) \in \partial D, 0 \leq t \leq T\} \cup \{(x,y,z,0)\,|\,(x,y,z) \in D\}$$

השפה הפרבולית. אז

$$\max_{Q_T} u = \max_{\partial_p Q_T} u$$

הוכחה

1. נוכיח $u_t - k\Delta u < 0 \Rightarrow \max_{Q_T} u = \max_{\partial_P Q_T} u$. נוכיח למעשה שבהנחה $u_t - k\Delta u < 0$ המקס' מתקבל בשפה הפרבולית בלבד.

   הוכחה Q_T תחום סגור חסום u רציפה בו לכן מתקבל מקסימום.

   (א) אם המקסימום מתקבל בנקודה פנימית

$$\begin{aligned} p &= (x_1, y_1, z_1, t_1) \\ u_t(p) &= 0 \\ \Delta(p) &\leq 0 \end{aligned}$$

   כלומר

$$u_t(p) - k\Delta u(p) > 0$$

   בסתירה לנתון.

(ב) אם המקסימום מתקבל בגג

$$p_2 = (x,y,z,T)$$

אזי

$$\begin{aligned} u_t &\geq 0 \\ \Delta(p) &\leq 0 \end{aligned}$$

כי $(x,y,z) \in D$ ולא בשפה. ואז עדין

$$u_t - k\Delta u \geq 0$$

בסתירה לנתון.

2. הוכחת המשפט. נניח $u_t - k\Delta u = 0$ נגדיר $\varepsilon > 0, v = u - \varepsilon t$

$$\begin{aligned} v_t - k\Delta v &= (u-\varepsilon t)_t - k\Delta(u-\varepsilon t) \\ &= u_t - \varepsilon - k\Delta u \\ &= -\varepsilon < 0 \\ \Rightarrow \max_{Q_T} v &= \max_{\partial_P Q_T} v \\ u &= v + \varepsilon t \\ &\leq \max_{Q_t}(v+\varepsilon T) \\ &\leq \max_{Q_t}(v) + \max_{Q_t}(\varepsilon T) \\ &= \max_{\partial_P Q_T} v + \varepsilon T \\ \Rightarrow \forall\varepsilon > 0, u &\leq \max_{\partial_P Q_T} v + \varepsilon \\ \Rightarrow u &\leq \max_{\partial_P Q_T} v \\ (v = u - \varepsilon t) \Rightarrow u &\leq \max_{\partial_P Q_T}(u - \varepsilon t) \\ (t > 0, \varepsilon > 0, \max(u-\varepsilon t) \leq \max u) &\leq \max_{\partial_P Q_T} u \end{aligned}$$

הערה (שלי) יכול להתקבל בתחום הפתוח אותו מקסימום. אך בכל מקרה

$$\max_{Q_T \setminus \partial_p Q_T} u \leq \max_{\partial_p Q_T} u$$

הערה מבחינת הפיזיקה או שהמוט הכי חם בנקודה פנימית ברגע $t = 0$ או שהכי חם בקצוות.

הערה מסקנה פשוטה אם $u_t - k\Delta u = 0$ אז

$$\min_{Q_T} u = \min_{\partial_p Q_T} u$$

הסבר $v = -u$ אז $\max v = -\min u$ והראינו $v_t - k\Delta v = 0$ גורר

$$\begin{aligned} -\min_{Q_T} u &= \max_{Q_T} v \\ &= \max_{\partial_p Q_T} v \\ &= -\min_{\partial_p Q_T} u \end{aligned}$$

משפט המקסימום החזק (הכללה) אם $u_t - k\Delta u < 0$ גורר $\max u$ בשפה בלבד וגם $\min u$ בשפה בלבד

תרגיל מצא את הערך המקסימלי של u שסותרת

$$\begin{aligned} u_t - 17u_{xx} &= 0 \\ u(0,t) &= -\pi^2 \\ u(\pi,t) &= 0 \\ u(x,0) &= x^2-\pi^2 = f(x) \end{aligned}$$

כיבן ש $f(x)$ רציפה וגזירה פעמיים ומקיימת תנאי שפה הטור שמתקבל מתכנס במ"ש ל u. כלומר לפונקציית גבול רציפה ולכן המקסימום של u מתכנס בשפה (לפי המשפט הקודם). לכל T המקסימום בתחום מתקבל ב-$u(0,t) = -\pi^2$, $u(0,x) = x^2-\pi^2$ או $u(\pi,t) = 0$. סה"כ $\max u = 0$.

הוכחה אחרת ליחידות הפתרון של בעיית החום u_1, u_2 פתרונות של אותה בעיה $u = u_1 - u_2$ פותר בעיה הומוגנית עם תנאים הומוגנים.
$\max u = 0$ התקבל בשפה וגם $\min u = 0$ ולכן $u = 0 \Rightarrow u_1 = u_2$.

4.3.3 יציבות

משפט אם u_n פתרונות רציפים של סדרת הבעיות

$$\begin{aligned} u_{nt} - k\Delta u_n &= F \\ u(a,t) &= a_n(t) \\ u_n(b,t) &= b_n(t) \\ u_0(x,0) &= f_n(x) \end{aligned}$$

וגם u פתרון רציף של בעיית הגבול

$$\begin{aligned} u_t - k\Delta u &= F \\ u(a,t) &= a(t) \\ u(b,t) &= b(t) \\ u(x,0) &= f(x) \end{aligned}$$

כאשר

$$\begin{aligned} a_n(t) &\to a(t) \\ b_n(t) &\to b(t) \\ f_n(x) &\to f(x) \end{aligned}$$

אז $\lim_{n\to\infty} u_n(x,t) = u(x,t)$.

הוכחה נסתכל על

$$v_n = u - u_n$$

צ"ל $|v_n| \le \tilde{\varepsilon}$ אז אם

$$\begin{aligned} |a_n - a| &\le \varepsilon \\ |b_n - b| &\le \varepsilon \\ |f_n - f| &\le \varepsilon \end{aligned}$$

מתקיים

$$\begin{aligned} -\varepsilon < \min v_n \le \quad v_n &\le \max v_n < \varepsilon \\ \Rightarrow \quad |v_n| &\le \varepsilon \end{aligned}$$

כי עבור v_n מתקיים

$$\begin{aligned} v_{nt}-k\Delta v_n &= 0\\ -\varepsilon<v\left(a,t\right) &= a_n-a<\varepsilon\\ -\varepsilon<v\left(b,t\right) &= b_n-b<\varepsilon\\ -\varepsilon<v\left(x,0\right) &= f_n-f<\varepsilon \end{aligned}$$

קיום ע"י הפרדת משתנים ופתרון בעיית שטורם ליוביל מקבלים ע"ע λ_n פ"ע X_n ע"י הצבה של

$$u = \sum X_nT_n$$

במשוואה מקבלים

$$\begin{aligned} \sum\left(T_n^{'}+\lambda T_n\right)X_n &= F\\ ... &= \sum F_nX_n \end{aligned}$$

כלומר את T_n פתרון של

$$T_n^{'}+\lambda T_n = F_n$$

אז

$$u_n = \sum X_nT_n$$

מקיים את משוואה (בהנחה אפריורי שמיד נוכיח יש טור מתכנס). טור הנגזרות u_{nt} מתכנס טור הנגזרות u_{nxx} מתכנס.בהנחה ש u רציפה כש $a\le x\le b,0\le t\le T$ תנאי השפה ההומוגנים יהיו למעשה הצבה $x=a,x=b$

$$\alpha u\left(a,t\right)+\beta u_x\left(a,t\right) = \sum\left(\alpha X_n\left(a\right)+\beta X_n^{'}\left(a\right)\right)T_n=0$$

נציב בתנאי השפה

$$T_nX_n = f\left(x\right)=u\left(x,0\right)=\sum T_n\left(0\right)X_n$$

אם $T_n\left(0\right)=a_n$ אז גם תנאי השפה מתקיים לכן אם T_n פתרון של $= T_n^{'}+\lambda T_n$ $F_n,T_n\left(0\right)=a_n$ אז

$$u = \sum X_nT_n$$

פתרון.קיבלנו

$$u = \sum a_ne^{-k\lambda_nt}+b_ne^{k\lambda_nt}$$

מקיימים את המשוואה והתנאים בתנאי שנוכיח

1. $\sum u_n$ מתכנס במ"ש בתחום $a\le x\le b,t\ge0$ (ואז הגבול u רציף שם)
2. $\sum u_{nt},\sum u_{nxx}$ מתכנס במ"ש בתחום $a<x<b,t\ge0$ (ואז הגבול הוא הנגזרת u_{xx},u_t).

כדי להראות התכנסות הטור נראה $\left|u_n\left(x,t\right)\right|\le\tilde{M_n}$ כש $\sum M_n$ טור מספרים מתכנס (קריטריון ה M של ויישטרס).

דוגמא עבור $u_t - u_{xx} = e^{-t}\sin 3x, 0 < x < \pi, t > 0$ ש $u(0,t) = u(\pi,t)$ וגם $u(x,0) = \left(\frac{x}{\pi}\right)^2 - \left(\frac{x}{\pi}\right)$. מקבלים

$$u(x,t) = \frac{1}{8}\left(e^{-t} - e^{-9t}\right)\sin 3x - \frac{8}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin(2k+1)}{(2k+1)^2}e^{-(2k+1)^2 t}$$

איבר כלל של הטור מתכנס

$$|v_n(x,t)| \le \frac{1}{(2k+1)^3}$$

ואז ע"פ ה M של ווירשטרס $\sum v_n$ מתכנס במ"ש על $t \geq 0, 0 \leq x \leq \pi$ לכן הגבול v רציף שם. נסתכל על

$$|v_{n_t}| = \left|\frac{\sin(2k+1)x}{2k+1}e^{-(2k+1)^2 t}\right|$$

ניקח $\varepsilon > 0$ לכל $t \geq \varepsilon$. איבר כללי של טור מספרים מתכנס

$$|v_n| \le e^{-(2k+1)^2\varepsilon}$$

ואז ע"פ ה M $\sum v_{n_t}$ מתכנס במ"ש על התחום לכן יש יחידות.

משפט בעיית החום מוגדרת היטב.

הסבר כלומר לבעיה

$$\begin{aligned} u_t - ku_{xx} &= F(x,t) \\ \alpha u(a,t) + \beta u_x(a,t) &= A(t) \\ \gamma u(b,t) + \delta u_x(b,t) &= B(t) \end{aligned}$$

כאשר F, f גזירות מסדר שני ומקיימות את תנאי השפה. קיים פתרון יחיד יציב.

5 משוואת לפלאס (משוואה אליפטית)

5.1 הגדרה

$\Delta u = 0$

הגדרה u המקיימת את משוואת לפלס בתחום D $(\Delta u = 0)$ נקראת הרמונית

פירוש פיזיקלי

1. u פתרון של $u_t - k\Delta u = 0$ יצג חום אחרי זמן כשכבר אין פיזור חום $u_t = 0$ מקבלים $\Delta u = 0$. כלומר $\Delta u = 0$ מייצג את הטמפרטורה בכל נקודה אחרי שהגיע לשיווי משקל.

2. $\Delta u = 0$ מיצג משטח מינימלי שנפרש ע"י ∂D

משוואה עם תנאים

1. $\begin{cases} \Delta u = 0 & D \\ u = f & \partial D \end{cases}$ דריכלה

2. $\begin{cases} \Delta u = 0 & D \\ \partial_n u = g & \partial D \end{cases}$ נוימן. נגזרת הכיוון נורמל לשפה

הגדרה $\Delta u = f$ נקראת משוואת פואסון

משפט תנאי הכרחי לקו"י לבעיית נוימן $\int_{\partial D} gds = 0$

הוכחה צ"ל $\int_{\partial D} \partial_n u = 0$ תנאי הכרחי לקו"י.
נניח u פתרון

$$\begin{aligned} 0 &= \int_D \Delta u dxdy = \int_D \nabla \cdot (u_x, u_y) d \\ \left(\Delta u = u_{xx} + u_{yy}, \nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right), \Delta u = \nabla \cdot (u_x, u_y)\right) \Rightarrow &= \int_{\partial D} n \cdot (u_x, u_y) ds \\ \left(\int_D \nabla \cdot \phi dxdy = \int_{\partial D} \vec{n} \cdot \phi dx\right) \Rightarrow &= \int_{\partial D} \partial_n u ds \end{aligned}$$

5.2 בעיית לפלס בעיגול

$\Delta u = 0$ בעיגול B. **דריכלה** $u = f$ בשפה ∂B,**נוימן** $\partial_n u = g$ בשפה ∂B נבצע שינוי משתנים

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \\ r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta &= \arctan\frac{y}{x} \\ w(r,\theta) &= u(x,y) \end{aligned}$$

לפי כלל השרשרת $u_{xx} + u_{yy} = 0 \Leftrightarrow w_{rr} + \frac{w_r}{r} + \frac{w_{\theta\theta}}{r^2} = 0$. נחפש

$$\begin{aligned} w(r,\theta) &= R(r)\theta(\theta) \\ R^{''}\theta + \frac{R^{'}\theta}{r} + \frac{R\theta^{''}}{r^2} &= 0 \\ \left(R^{''} + \frac{R^{'}}{r}\right)\theta &= -\frac{R\theta^{''}}{r^2} \\ \frac{R^{''} + \frac{R^{'}}{r}}{\frac{R}{r^2}} &= -\frac{\theta^{''}}{\theta} \end{aligned}$$

אזי

$$\begin{aligned} \frac{r^2R^{''} + rR^{'}}{R} &= -\frac{\theta^{''}}{\theta} = \lambda \\ r^2R^{''} + rR^{'} - \lambda R &= 0 \\ \theta^{''} + \lambda\theta &= 0 \end{aligned}$$

כדי לקבל u רציפה נדרוש

$$\begin{aligned} \theta(0) &= \theta(2\pi) \\ \theta^{'}(0) &= \theta^{'}(2\pi) \end{aligned}$$

פתרון לבעיה המחזורית

$$\begin{aligned} 0<\theta<2\pi, \theta^{''}+\lambda\theta &= 0 \\ \theta(0) &= \theta(2\pi) \\ \theta^{'}(0) &= \theta(2\pi) \\ \theta_n &= a_n\sin(n\theta)+b_n\cos(n\theta) \end{aligned}$$

עבור R נפתור

$$r^2R^{''}+rR^{'}-\lambda R = 0$$

משוואת אוילר שפתרונה

$$\begin{aligned} R_n(r) &= c_nr^n+d_nr^{-n} \\ R_0(r) &= c_0+d_0\ln r \end{aligned}$$

פתרון בעיגול אם $r=0$ מחפשים פתרון רציף לכן

$$\begin{aligned} D_n &= 0 \\ w(r,\theta) &= \alpha_0+\sum_{n=1}^{\infty} r^n(\alpha_n\sin n\theta+b_n\cos n\theta) \end{aligned}$$

מציאת המקדמים ע"י תנאי השפה לתנאי דריכלה יש $f(\theta)$ (כאשר $r=R$)

$$\begin{aligned} f(\theta) &= \alpha_0+\sum R^n(\alpha_n\sin n\theta+b_n\cos n\theta) \\ \alpha_0 &= \frac{\int_0^{2\pi} f d\theta}{\int_0^{2\pi} 1 d\theta} \\ \alpha_n &= \frac{\int_0^{2\pi} f\sin n\theta}{\pi} \\ \beta_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f\cos n\theta \end{aligned}$$

דוגמא $\begin{cases} \Delta u=0 & x^2+y^2\le 1 \\ u(x,y)=y^2 & x^2+y^2=1 \end{cases}$

$$\begin{aligned} f(\theta) &= y^2=(r\sin\theta)^2=\sin^2\theta \\ &= \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos(2\theta) \end{aligned}$$

אזי

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \frac{1}{2} \\ \alpha_n &= 0 \\ \beta_2 &= -\frac{1}{2} \\ \beta_n &= 0 \\ w(r,\theta) &= \frac{1}{2}-\frac{1}{2}r^2\cos 2\theta \\ u(x,y) &= \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left(x^2-y^2\right) \end{aligned}$$

הערה

$$\begin{cases}\Delta u=0\\ u\left(R_1,\theta\right)=f_1\\ u\left(R_2,\theta\right)=f_2\end{cases}$$ בטבעת r^{-n} רציף בטבעת לכן

$$w\left(r,\theta\right)=\beta_0+\alpha_0\ln r+\sum_{n=1}^{\infty}\left[r^n\left(\alpha_n\sin n\theta+\beta_n\cos n\theta\right)+r^{-n}\left(\gamma_n\sin n\theta+\delta_n\cos n\theta\right)\right]$$

המקדמים יחושבו ע"י תנאי השפה.

5.3 נוסחת פואסון לבעיית דריכלה בעיגול ברדיוס R

$$\begin{aligned}P\in B,\Delta w&=0\\ P\in\partial B,w\left(R,\theta\right)&=f\left(\theta\right)\end{aligned}$$

נרשום

$$\begin{aligned}w\left(r,\theta\right)&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\phi)d\phi\\ &+\sum_{n=1}^{\infty}r^n\left[\left(\frac{1}{\pi R^n}\int_0^{2\pi}f\left(\phi\right)\sin n\phi d\phi\right)\sin n\theta+\left(\frac{1}{\pi R^n}\int_0^{2\pi}f\left(\phi\right)\cos n\phi d\phi\right)\cos n\theta\right]\end{aligned}$$

מכניסים $\cos n\theta,\sin n\theta$ **לאינטגרל (לא תלוי ב** ϕ **שלפיו מבצעים אינטגרציה)**

$$\begin{aligned}\Rightarrow w\left(r,\phi\right)&=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(\phi)d\phi\left[\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r^n}{R^n}\right)\left[\sin n\phi\sin n\theta+\cos n\phi\cos n\theta\right]\right]\\ &=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(\phi)\left[\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r^n}{R^n}\right)\cos\left(\phi-\theta\right)\right]d\phi\\ \left(z=\rho e^{i\alpha}=\left(\frac{r}{R}\right)e^{i(\phi-\theta)}\right)\Rightarrow&=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(\phi)\left[\frac{1}{2}+\Re\sum_{n=1}^{\infty}z_n\right]d\phi\\ &=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(\phi)\Re\left(\frac{1}{2}+\frac{z}{1-z}\right)d\phi\\ &=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(\phi)\Re\left(\frac{1}{2}\frac{R^2-r^2}{R^2+r^2-rR\cos\left(\theta-\phi\right)}\right)d\phi\end{aligned}$$

קיבלנו את נוסחת פואסון

$$w\left(r,\theta\right)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\phi)\left(\frac{R^2-r^2}{R^2+r^2-rR\cos\left(\theta-\phi\right)}\right)d\phi$$

מסקנות

1. $u\in c^{\infty}$ **גזירה לפי** r,θ **מתחת לאינטגרל**
2. **משפט הממוצע כאשר** $u\left(0,0\right)$ **הערך במרכז העיגול:**

$$w\left(0,\theta\right)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f\left(\phi\right)d\phi$$

הוא הממוצע של המעגל.

5.4 משפט המקסימום (והמינימום) החלש

אם u רציפה בתחום חסום וסגור $\overline{D}$ והרמונית ב D אז

$$\max_{\overline{D}} u = \max_{\partial D} u$$

הוכחה

1. $\Delta u > 0$ לכן ל-u אין מקסימום פנימי (כי במקסימום פנימי $\Delta u \leq 0$)
2. לכל $\varepsilon > 0$ נגדיר

$$\begin{aligned} v &= u + \varepsilon\left(x^2 + y^2\right) \\ \Delta v &= \Delta u + \varepsilon(2+2) \\ \Delta v &= 4\varepsilon > 0 \end{aligned}$$

בכל נקודה

$$\begin{aligned} u(x,y) &\leq u + \varepsilon\left(x^2+y^2\right) = v \\ &\leq \max_{\overline{D}} v = \max_{\partial D} v \\ &= \max_{\partial D}\left[u + \varepsilon\left(x^2+y^2\right)\right] \\ &\leq \max_{\partial D} u + \max_{\partial D} \varepsilon\left(x^2+y^2\right) \\ &\leq \max_{\partial D} u + \varepsilon M \end{aligned}$$

נסכם

$$u \leq \max_{\partial D} u + \varepsilon M$$

לכל $\varepsilon > 0$ כלומר

$$u \leq \max_{\partial D} u$$

5.4.1 משפט המקסימום (והמינימום) החזק

אם u רציפה בתחום חסום וסגור $\overline{D}$ והרמונית ב D. אם יש נקודת מקסימום פנימית אז u קבועה

הוכחה נניח בשלילה (x_0, y_0) נקודת מקסימום פנימית ב D

1. ניקח עיגול B_0 סביב (x_0, y_0) ונוכיח u קבועה ב B_0
   הוכחה תהי $(\tilde{x}, \tilde{y})$ נקודה שרירותית ב B_0 נראה

$$u(\tilde{x}, \tilde{y}) = u(x_0, y_0)$$

נניח בשלילה

$$u(\tilde{x}, \tilde{y}) < u(x_0, y_0)$$

כיוון ש u רציפה יש סביבה N של $(\tilde{x}, \tilde{y})$ שבה

$$(x,y) \in N, u(x,y) < u(x_0, y_0)$$

נעביר עיגול B דרך $(\tilde{x},\tilde{y})$ סביב (x_0,y_0). לפי משפט הממוצע

$$\begin{aligned} u(x_0,y_0) &= \frac{1}{2\pi}\int_{\partial B} uds \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{\partial B\setminus N} uds + \frac{1}{2\pi}\int_{\partial B\cap N} uds \\ \left(\frac{1}{2\pi}\int_{\partial B\setminus N} uds \le u(x_0,y_0),\ \frac{1}{2\pi}\int_{\partial B} uds < u(x_0,y_0)\right) \Rightarrow &< u(x_0,y_0) \end{aligned}$$

וזאת סתירה לכן u קבוע הכל עיגול (המוכל ב D) סביב (x_0,y_0)

2. ניקח $(\overline{x},\overline{y})$ כלשהי ב D ונראה $u(x_0,y_0)=u(\overline{x},\overline{y})$. מחברים את (x_0,y_0) ע"י שרשרת סופית של עיגולים B_n עם מרכז (x_n,y_n) שמוכל בעיגול הקודם. ואז u קבוע ב B_0 (שלב ראשון) אז

$$(x_0,y_0) = (x_1,y_1)\in B_0$$

וכן

$$(x_n,y_n) = (x_{n+1},y_{n+1})\in B_0$$

אחרי n צעדים מקבלים מש"ל.

מסקנה יחידות ויציבות לבעיית דריכלה בתחום סגור

הוכחת יחידות u_1,u_1 מקיימים

$$\begin{cases} \Delta u = f & D \\ u = g & \partial D \end{cases}$$

אז $u=u_1-u_2$ מקים

$$\begin{cases} \Delta u = f & D \\ u = g & \partial D \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 0 &\le \min_{\partial D} u \le u \le \max_{\partial D} u = \max 0 = 0 \\ \Rightarrow u &= 0 \Rightarrow u_1 = u_2 \end{aligned}$$

הוכחת יציבות נניח u_n פתרונות

$$\begin{cases} \Delta u = f & D \\ u = g & \partial D \end{cases}$$

נניח $g_n\to g$ ו u פתרון

$$\begin{cases} \Delta u = f & D \\ u = g & \partial D \end{cases}$$

צ"ל $u_n\to u$. נגדיר $v=u-u_n$ אז v מקיים $v=g-g_n$. אם

$$\begin{aligned} -\epsilon < g-g_n < \varepsilon \\ \Rightarrow -\varepsilon < v < \varepsilon \\ \Rightarrow u_n \to u \end{aligned}$$

יחידות פתרון לבעיה מעורבת

$$\begin{cases}\Delta u=f & D\\ \alpha\geq0,u+\alpha\partial_{n}u=q & \partial D\end{cases}$$

הוכחה

$$\begin{aligned}\int_{D}\left(\nabla u\cdot\nabla v+v\Delta u\right)dxdy &= \int_{\partial D}v\partial_{n}uds\\ \Rightarrow\int_{D}\left(\nabla u\cdot\nabla v+v\Delta u\right)dxdy &= \int_{\partial D}u\partial_{n}uds\\ \Rightarrow\int_{D}\left|\nabla u\right|^{2}+u\Delta udxdy &= \int_{\partial D}u\partial_{n}uds\end{aligned}$$

נניח u_1,u_2 פתרונות $u=u_1-u_2$ מקיים

$$\begin{cases}\Delta u=0 & D\\ \alpha\geq0,u+\alpha\partial_{n}u=0 & \partial D\end{cases}$$

מציבים במשוואה $\Delta u=0,u=-\alpha\partial_{n}u$

$$\begin{aligned}0 &\leq \int_{D}\left|\nabla u\right|^{2}dxdy\\ &= \int_{\partial D}-\alpha\left(\partial_{n}u\right)^{2}ds\leq0\\ \Rightarrow\int\nabla u &= 0\\ \Rightarrow\quad\nabla u &=0\end{aligned}$$

לפי תנאי שפה

$$\begin{aligned}u &= 0\\ u_1 &= u_2\end{aligned}$$

יחידות הפתרון לבעיית נוימן

הוכחה נניח u_1,u_2 פתרונות, $u=u_1,u_2$

$$\begin{cases}\Delta u=0 & D\\ \partial_{n}u=0 & \partial D\end{cases}$$

ואז לפי הסעיף הקודם

$$\begin{aligned}0 &= \int_{D}\left|\nabla u\right|^{2}dxdy\\ \Rightarrow\nabla u &= 0\Rightarrow u=c\\ \Rightarrow\quad u_1 &=u_2+c\end{aligned}$$

הערה אין יחידות לבעיית דריכלה בתחום לא חסום

דוגמא לבעיה

$$\begin{cases}\Delta u=0 & x^2+y^2>4\\ u=1 & x^2+y^2=4\end{cases}$$

יש שתי פתרונות

$$\begin{aligned}u_1 &= 1\\ u_2 &= \frac{\ln\sqrt{x^2+y^2}}{\ln 2}\end{aligned}$$

הערה אין יציבות לבעיית נוימן

דוגמא של הדמאר

$$\begin{cases}\Delta u_n=0 & D\\ -\frac{d}{dy}u_n\left(x,0\right)=\frac{\sin nx}{n} & \partial D\end{cases}$$

אז

$$u_n = -\sin nx\frac{e^{ny}-e^{-ny}}{\partial n^2}$$

אז u_n מתנהג כמו $\frac{e^{ny}}{n}$ לכן התחום לא חסום $u_n \nrightarrow_{n\to\infty} u$

5.5 פתרון לבעיית לפלאס במלבן

מקרה ראשון

$$\begin{cases}\Delta u=0\\ u\left(a,y\right)=f\left(y\right)\\ u\left(b,y\right)=g\left(y\right)\\ u\left(x,c\right)=u\left(x,d\right)=0\end{cases}$$

לפתרון רציף דרך תנאי התאימות

$$\begin{aligned}f\left(c\right) &= f\left(d\right)\\ =g\left(c\right) &= g\left(d\right)=0\end{aligned}$$

הפרדת משתנים

$$\begin{aligned}u\left(x,y\right) &= X\left(x\right)Y\left(y\right)\\ X^{''}Y+XY^{''} &= 0\\ \frac{X^{''}}{X} &= \frac{-Y^{''}}{Y}=\lambda\\ X^{''}-\lambda X &= 0\\ Y^{''}+\lambda Y &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}X\left(x\right)Y\left(c\right)=X\left(x\right)Y\left(d\right) &= 0\\ \Rightarrow Y\left(c\right)=Y\left(d\right) &= 0\end{aligned}$$

מקבלים מפה ע"ע λ_n פ"ע Y_n. מציבים ופותרים $X_n^{''}-\lambda_n X_n=0$. ואז

$$u = \sum X_nY_n$$

את המקדמים מחשבים לפי תנאי השפה הנוסף

הכללה

$$\begin{cases}\Delta u=0\\ u\left(a,y\right)=f\left(y\right)\\ u\left(b,y\right)=g\left(y\right)\\ u\left(x,c\right)=h\left(x\right)\\ u\left(x,d\right)=k\left(x\right)\end{cases}$$

תנאי תאימות בקדקודים למשל $f\left(c\right)=h\left(a\right)$ וכו'
נפרד ל-2 בעיות של המקרה הראשון. $w=v+u$ פתרון הבעיה המקורית

תיקון תנאי תאימות במקרה שלבעיה המקורית התקיים תנאי תאימות אבל הערך בקדקודים לא 0 יצרנו בעיות חדשות לא רציפות בקדקודים. לכן מחפש תיקון. נחפש $\tilde{u}$ הרמונית שהערך שלה בקדקודים זהה לערך הנתון. ואז נגדיר

$$\hat{u} = u-\tilde{u}$$

ועבור $\hat{u}$ יש 0 בקדקודים.
נחפש

$$\tilde{u}\left(x,y\right) = a_{1}\left(x^{2}-y^{2}\right)+a_{2}xy+a_{3}x+a_{4}y+a_{5}$$

נמצא את המקדמים לפי הקדקודים.

דוגמא

$$\begin{cases}\Delta u=0\\ u\left(x,0\right)=1+\sin\pi x\\ u\left(x,1\right)=2\\ u\left(0,y\right)=1+y\\ u\left(1,y\right)=1+y\end{cases}$$

תיקון

$$\begin{aligned}\tilde{u}\left(x,y\right) &= a_{1}\left(x^{2}-y^{2}\right)+a_{2}xy+a_{3}x+a_{4}y+a_{5}\\ \tilde{u}\left(0,0\right) &= 1\Rightarrow a_{5}=1\\ \tilde{u}\left(0,1\right) &= 2\Rightarrow -a_{1}+a_{4}+1=2\\ \tilde{u}\left(1,0\right) &= 1\Rightarrow a_{1}+a_{3}+1=1\\ \tilde{u}\left(1,1\right) &= 2\Rightarrow a_{2}+a_{3}+a_{4}+1=2\end{aligned}$$

נחר למשל $a_{1}=0$ ונקבל $a_{5}=1,a_{4}=1,a_{3}=0,a_{2}=0$ ואז $\tilde{u}\left(x,y\right)=1+y$.
נגדיר

$$\hat{u} = u-\tilde{u}$$

ונפתור

$$\begin{cases}\Delta\hat{u}=0\\ \hat{u}\left(x,0\right)=1+\sin\pi x-\left(1+y\right)\\ \hat{u}\left(x,1\right)=2-\left(1+y\right)\\ \hat{u}\left(0,y\right)=0\\ \hat{u}\left(1,y\right)=0\end{cases}$$

ע"י הפרדת משתנים

$$\begin{aligned} X^{''}+\lambda X &= 0 \\ Y^{''}-\lambda Y &= 0 \end{aligned}$$

מהתנאים מקבלים

$$Y(1) = X(0)=X(1)=0$$

הע"ע של

$$\begin{aligned} X^{''}+\lambda X &= 0 \\ X(0) &= X(1) \\ \lambda_n &= n\pi \\ X_n &= \sin n\pi x \end{aligned}$$

הפתרון של

$$\begin{aligned} Y^{''}-\lambda Y &= 0 \\ Y_n^{''}-n\pi Y_n &= 0 \\ Y_n &= a_n e^{n\pi y}+b_n e^{-n\pi y} \\ (Y_n(1)=0) \Rightarrow a_n e^{n\pi}+b_n e^{-n\pi} &= 0 \\ b_n &= -a_n e^{2n\pi} \\ \hat{u}(x,y) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(e^{n\pi y}-e^{2n\pi-n\pi y}\right)\sin n\pi x \end{aligned}$$

כאשר לפי תנאי התחלה

$$\begin{aligned} \sin \pi x &= \hat{u}(x,0) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(1-e^{2n\pi}\right)\sin n\pi x \\ \Rightarrow a_1\left(1-e^{2\pi}\right) &= 1 \\ (n\neq 1)\Rightarrow a_n\left(1-e^{2\pi}\right) &\neq 0 \\ \Rightarrow a_1 &= \frac{1}{1-e^{2\pi}} \\ a_n &= 0 \end{aligned}$$

לכן

$$\begin{aligned} \hat{u} &= \frac{1}{1-e^{2\pi}}\left(e^{n\pi y}-e^{2n\pi-n\pi y}\right)\sin \pi x \\ u &= \tilde{u}+\hat{u} \\ &= \frac{1}{1-e^{2\pi}}\left(e^{n\pi y}-e^{2n\pi-n\pi y}\right)\sin \pi x+1+y \end{aligned}$$