

הפתק הסגול
www.technion.co.il

פיסיקה 3 ח'

114073

סיכום הקורס

מבוסס על הרצאותיו של פרופ' ארנון דר

תוכן עניינים

3	מבוא.....
3	האפקט הפוטו-אלקטרי
4	ההנחה של איינשטיין בשנת 1905.....
5	קרינת X
6	פיזור קומפטון (1924)
6	סיכום ביניים
7	גלי דה-ברויי (De Broglie)
8	עקרון אי הוודאות של אייזנברג
10	מודל תומסון וראת'רפורד
13	ספקטרום אטומי.....
14	מודל בוהר לאטום המימן.....
18	תורת הקוונטים
27	חדירה דרך מחסום פוטנציאל.....
29	משוואת שרדינגר בקואורדינאטות כדוריות
30	אטום המימן.....
32	אפקט זימן הנורמאלי
34	ניסוי שטרן-גרלך
34	אטומים מרובי אלקטרונים
35	עיקרון האיסור של פאולי
36	פיסיקה גרעינית
37	זמן מחצית החיים
38	התפרקות גרעיניות
41	ביקוע הגרעין
42	מצב מוצק
43	ספקטרום מולקולארי.....
43	מתכת כגז אלקטרונים קלאסי

מבוא

פיסיקה ח3 עוסקת בפיסיקה של המאה ה-20. במרכז הקורס, תורת הקוונטים (קוונטום = מנה): גדלים שנראו רציפים עד היום, הם למעשה באים במנות (לדוגמה מטען האלקטרון). לדוגמה, התנע הסיבובי $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times (m\vec{v})$, גם הוא אינו רציף, והוא בא במנות: $L = n\hbar$.
אנו נתעסק בגרסה לא-יחסותית של תורת הקוונטים, כלומר כאשר $v \ll c$.
תורת הקוונטים מסבירה תופעות מסדרי גודל של $10^{-16} [cm] \geq r \geq 3 \cdot 10^{-28} [cm]$ - מחלקיקים קטנים לאסטרופיסיקה.

בגבול של מערכות גדולות, הפיסיקה הקלאסית מספיק מדויקת כדי לחזות את אותן התוצאות של תורת הקוונטים. במימדים קטנים מאוד, וגם במימדים גדולים מאוד, נראה שהפיסיקה הקלאסית אינה מדויקת ותורת הקוונטים מדויקת.

התופעה של "קרינת גוף שחור" הייתה בסתירה לפיסיקה הקלאסית, וזו גרמה לפיתוח תורת הקוונטים. גופים חמים פולטים קרינה אלקטרומגנטית. גוף שחור פולט ובלע תחומים מסוימים של קרינה באופן אידיאלי. עבור גלים אלקטרומגנטיים, מתקיים $\lambda v = c$, כאשר v היא תדירות הגל. ע"פ התיאוריה הקלאסית, גוף שחור מכיל אנרגיה אינסופית. סתירה זו יושבה ע"י הנחתו של פלאנק והמודל הקוונטי שהוא הציג. הנחת פלאנק: גופים חמים פולטים את האנרגיה במנות, בכפולות של $h\nu$, כאשר v היא תדירות הקרינה הנפלטת.

האפקט הפוטו-אלקטרי

בניסוי, גילה הרץ את האפקט הפוטו-אלקטרי – אור בתדירות מספיק גבוהה, $v > v_0$, הפוגע במתכת, גורם לפליטת אלקטרונים מהמתכת.

אלקטרונים לא עוזבים ספונטאנית את המתכת, כי האנרגיה האצורה בגוף מתכתי היא אנרגיה שלילית, אנרגיה קשורה – יש להשקיע עבודה חיצונית כדי להוסיף למערכת כזו אנרגיה ולהביא את החלקיקים לרמת אנרגיה אפסית – אנרגיה פוטנציאלית אפסית היא כאשר החלקיקים נמצאים באינסוף. הדבר דומה להוצאת טיל מכדור הארץ – יש להשקיע אנרגיה קינטית בטיל כדי להוסיף לו את האנרגיה הפוטנציאלית השלילית שיש לו על כדור הארץ.

נמצאו סתירות לפיסיקה הקלאסית באפקט הפוטו-אלקטרי:

1. ישנה תדירות v_0 אופיינית למתכת, שמעליה, תדירות האור מוציאה אלקטרונים מהמתכת ומתחתיה לא יוצאים אלקטרונים מהמתכת. הסתירה לפיסיקה הקלאסית: גל א"מ נושא אנרגיה – אם נגדיל את עוצמת האור, תהיה יותר אנרגיה שנכנסת למתכת, ללא קשר לתדירות – נצליח לספק בסופו של דבר מספיק אנרגיה כדי להוציא אלקטרונים מהמתכת. בפיסיקה הקלאסית, האנרגיה שנספק למתכת לא תלויה בתדירות אלא בעוצמת הגל.
2. v_0 אינה תלויה בעוצמת האור I .
3. האלקטרונים משתחררים "מיידית" - $\Delta t < 10^{-9} [sec]$. ע"פ הפיסיקה הקלאסית, ניתן לחשב שיש לספק גל א"מ למשך כמיליון שנה כדי שהאלקטרון יקבל די אנרגיה לעזוב את המתכת.
4. האנרגיה הקינטית המכסימלית של האלקטרונים, K_{max} , אינה תלויה בעוצמת האור I .
5. K_{max} פרופורציונאלית לתדירות האור: $K_{max} = av + b$.
6. כמות האלקטרונים הנפלטים מהמתכת פרופורציונלית ל I .

פונקציית העבודה: האנרגיה המינימלית שיש להשקיע כדי להוציא אלקטרון ממתכת. סימון W או Φ . לדוגמה:

מתכת	W
Molybdenum	$4.20 [eV]$
Nickel	$5.03 [eV]$
Silver	$4.73 [eV]$
Tungsten	$4.54 [eV]$
Zinc	$4.30 [eV]$

פונקציות העבודה נמדדו בניסויים תרמיים במתכות.

קצת על יחידות שנשתמש בהן:

1. אנגסטרום: $1 \text{ \AA} = 10^{-8} [cm] = 10^{-10} [m]$. לרדיוס האטום מימדים בסדר גודל של אנגסטרום.
2. אנרגיה שאלקטרון מקבל במפל מתח של $1 [V]$: $1 [eV] = 1.6 \cdot 10^{-12} [erg] = 1.6 \cdot 10^{-19} [J]$.

ההנחה של איינשטיין בשנת 1905

ההנחה היא שלא החומר הוא זה שפולט אנרגיה במנות (הנחת פלאנק), אלא התכונה של האור היא שהוא עשוי ממנות של אנרגיה. כלומר אור בתדירות ν הוא מנות אנרגיה שהן כפולות של $h\nu$. עוצמת האור היא $I_\nu = n \cdot h\nu$. מנות אלו נעות במהירות האור.

האור הוא חלקיקים שמשומנים ב γ , של מנות אנרגיה, כאשר $m_\gamma = 0$ ו $E_\gamma = h\nu$. חלקיק זה הוא הפוטון. כך גל א"מ הוא בעצם זרם של פוטונים.

לאור תכונות של גליות כמו עקיפה והתאבכות, וגם תכונה של חלקיקים – פוטונים. אנו נראה בעתיד שהתכונות הדואליות הללו מאפיינות גם חלקיקים עם מסה – גם לחלקיק כמו האלקטרון ישנן תכונות של גל. תורת הקוונטים תיישב את הסתירה של תכונות גליות ותכונות חלקיקיות.

בחזרה לאפקט הפוטו-אלקטרי:

האנרגיה המכסימלית של אלקטרון שבולע פוטון בעל אנרגיה של $h\nu$ תהיה: $h\nu - W = \left(\frac{1}{2}mv^2\right)_{\max}$ כאשר W היא פונקציית העבודה של אותה מתכת. ולכן אנו יכולים לחשב את תדירות הסף לפליטה של אלקטרון ממתכת – זה יקרה

כאשר האלקטרון יפלט עם מינימום אנרגיה – 0 – וכך נקבל: $h\nu_0 = W \Rightarrow \nu_0 = \frac{W}{h}$

ומכאן אורך הגל המכסימלי המתאים: $\lambda_0 = \frac{hc}{W}$, כי ידוע הקשר $\lambda\nu = c$. $hc = 12,400 \left[eV \cdot \text{\AA} \right]$.

את האנרגיה הקינטית המכסימלית ניתן למדוד ע"י מתח העצירה שקוטע את הגעת האלקטרונים לקתודה בניסוי הפוטו-אלקטרי.

ב 1914, מיליקן מדד את מתח העצירה של תדירות האור, וקיבל את הקשר הליניארי:

$$\left(\frac{1}{2}mv^2\right)_{\max} = eV_0 = h\nu - W \Rightarrow V_0 = \frac{h\nu}{e} - \frac{W}{e}$$

כאשר V_0 הוא מתח העצירה הנמדד.

איך יושבה הסתירה של פליטת האלקטרונים המהירה?

הפוטונים נעים במהירות c , פוגעים באלקטרון ומוסרים לו את האנרגיה שלהם, $h\nu$, ונותנים לו מהירות עצומה כ) $10^8 \left[\frac{cm}{sec} \right]$, שמספיקה להוציא את האלקטרון מהמתכת.

דוגמה

כמה פוטונים בשנייה פולטת מנורה מונו-כרומטית באורך גל של $\lambda = 6000 \text{\AA}$, אם הספקה $P = 100[mW]$? פתרון:

תזכורת: $h = 6.63 \cdot 10^{-34}$, $E_\gamma = h\nu$, $\lambda\nu = c$.

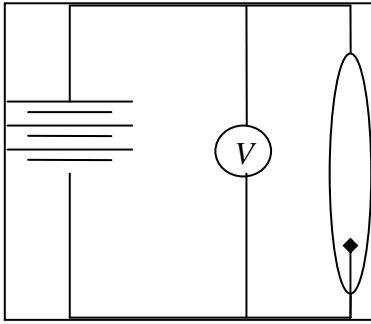
האנרגיה הנפלטת היא כמות מנות האנרגיה: $n \cdot E_\gamma = nh\nu$. ההספק הוא אנרגיה לשנייה, ולכן $P = \frac{nh\nu}{1}$.

$$P = nh\nu = \frac{nhc}{\lambda} \Rightarrow n = 3 \cdot 10^{17} \left[sec^{-1} \right] \text{ ואז נקבל } E_\gamma = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$$

הערה: מנקודת מבט קלאסית, האנרגיה של האור רציפה, בגלל שמכשירי המדידה שלנו לא מסוגלים להבחין בשינויים קלים, בכמויות כדוגמת זו שקיבלנו עבור מספר הפוטונים בשנייה.

קרנת X

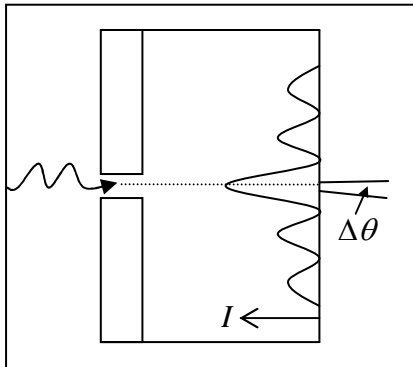
ראינו שקרנת גוף שחור ניתנת להבנה אם פליטת האנרגיה מהגוף היא במנות של $h\nu$. במקרה האפקט הפוטו-אלקטרי, איינשטיין הניח שהקרנה הא"מ היא למעשה מנות אנרגיה של $h\nu$ ע"י פוטונים.



בשנת 1895 רנטגן גילה את קרנת X (Roentgen). קרנת X היא תופעה הפוכה לאפקט הפוטו-אלקטרי: אלקטרונים מהירים פוגעים במתכת וגורמים לפליטה של קרינה מהמתכת, לה קראו קרנת X. ע"י מקור מתח של כמה עשרות אלפי וולטים, נפליטים אלקטרונים בשופרת ריק מתוך קתודה מחוממת, פוגעים באנודה ומשחררים קרנת X. רנטגן גילה שהקרנה הזו מאוד חדירה – רק שכבות של עופרת הצליחו לבלום אותה.

מהי קרנת X ?

בשנת 1899 ניסו Huga ו Wind לברר האם קרנת X הינה קרינה גלית או חלקיקית, ע"י ניסוי של עקיפה דרך סדק. הבעיה היא שעבור אורך גל קטן ביחס לרוחב הסדק, $\lambda \ll D$, נקבל הפרש זוויתי $\Delta\theta \approx \frac{\lambda}{D} \ll 1$ - דבר שיגרום לנו לא להבחין בתכונת הגלית של עקיפה, ולראות את הגל כאלומה ישרה לחלוטין.



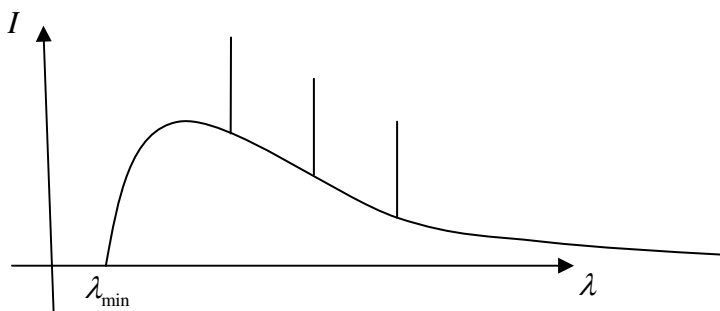
ממדי אורך הגל הם מסדר גודל של אנגסטרום: $\lambda \sim 1 \text{ \AA}$. הסדק הדק ביותר שניתן ליצור הוא כמיקרון: $1 \mu\text{m} = 10^{-6} \text{ [m]}$, גודל שגדול ב 4 סדרי גודל מאורך הגל של קרנת X. לכן בעזרת ניסויי עקיפה פשוטים לא היה ניתן לשים לב לתופעת העקיפה של קרנת X.

ב 1912, פיסיקאי בשם Lowe פתר את הבעיה בעזרת גבישים, בהם מסודרים האטומים בלוחות עם רווחים בסדר גודל של אטומים. דרך גביש הועבר אור והתגלתה תמונה מוזרה: סידור סימטרי של מקומות אור שאליהם מגיעה האלומה של קרנת X.

ניסוי בראג

האב William Laurence Bragg והבן William Henry Bragg ידעו שאטומים פולטים גלים א"מ כדוריים. ע"י ניסוי של מעבר קרנת X דרך גבישים, הצליחו למדוד את אורך הגל של קרנת X, בעזרת ספקטרומטר (ספקטרום=מגוון) לקרנת X.

משמאל גרף הספקטרום (=עצמה כפונקציה של אורך גל).



$$\lambda_{\max} = \frac{12,400}{eV} \left[\text{\AA} \right] : \text{חוק Duane-Hunt}$$

לפי חוק זה, ישנה פליטה אופיינית למתכת, בעלת עוצמות גבוהות, שלא ניתן היה לחזות ע"י הפיסיקה הקלאסית. בנוסף ישנה תדירות מכסימלית (אורך גל מינימאלי) של קרינה שנפלטת.

האנרגיה הקינטית של האלקטרונים שמואצים בשופרת: $eV = K_{\max} = \left(\frac{1}{2} mv^2 \right)_{\max}$. זהו מקסימום האנרגיה שהאלקטרון פולט:

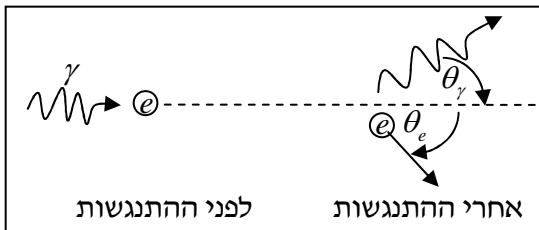
$$K_{\max} = eV = h\nu_{\max} = \frac{hc}{\lambda_{\min}} \Rightarrow \lambda_{\min} = \frac{hc}{eV} = \frac{12,400 \left[eV \cdot \text{\AA} \right]}{eV}$$

וזהו חוק Duane-Hunt.

פיזור קומפטון (1924)

אפקט קומפטון – תופעה שמראה כי קרינת X היא אכן חלקיקים (שלאחר מכן קראו להם פוטון, כמו שראינו קודם)

$$P = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda} \quad (\text{ישירות מהנוסחה } E^2 = m^2c^4 + p^2c^2) \quad \text{תנע הפוטון, שמשותו 0, היא}$$



פיזור קומפטון הוא פיזור של פוטונים לעבר אלקטרונים. תדירות הפוטון צריכה לקטון לאחד ההתנגשות, כי הוא מסר אנרגיה לאלקטרון.

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos\theta_\gamma) \quad \text{נסחת קומפטון:}$$

כאשר λ' הוא אורך הגל של הפוטון לאחר ההתנגשות.

כאשר הפיזור הוא של אלקטרון, בעל מסה m_e , מסמנים את "אורך גל קומפטון של האלקטרון":

$$\lambda_c = \frac{h}{m_e c} \cong 0.024 \left[\overset{0}{\text{Å}} \right]$$

הוכחת נוסחת קומפטון מחוקי שימור האנרגיה והתנע: שימור אנרגיה:

$$h\nu + m_e c^2 = h\nu' + \sqrt{m_e^2 c^4 + p_e^2 c^2} \Rightarrow h\nu - h\nu' + m_e c^2 = \sqrt{m_e^2 c^4 + p_e^2 c^2}$$

$$\Rightarrow (h\nu - h\nu' + m_e c^2)^2 = m_e^2 c^4 + p_e^2 c^2 \Rightarrow (h\nu - h\nu')^2 + 2(h\nu - h\nu')m_e c^2 + m_e^2 c^4 = m_e^2 c^4 + p_e^2 c^2$$

$$\Rightarrow (h\nu - h\nu')^2 + 2(h\nu - h\nu')m_e c^2 = p_e^2 c^2 (*)$$

שימור תנע:

$$\begin{cases} \frac{h\nu}{c} = \frac{h\nu'}{c} \cos\theta_\gamma + p_e \cos\theta_e \\ 0 = \frac{h\nu'}{c} \sin\theta_\gamma - p_e \sin\theta_e \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h\nu = h\nu' \cos\theta_\gamma + p_e c \cos\theta_e \\ 0 = h\nu' \sin\theta_\gamma - p_e c \sin\theta_e \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} h\nu - h\nu' \cos\theta_\gamma = p_e c \cos\theta_e \\ h\nu' \sin\theta_\gamma = p_e c \sin\theta_e \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (h\nu - h\nu' \cos\theta_\gamma)^2 = p_e^2 c^2 \cos^2\theta_e \\ h^2 \nu'^2 \sin^2\theta_\gamma = p_e^2 c^2 \sin^2\theta_e \end{cases}$$

נחבר את שתי המשוואות:

$$h^2 \nu^2 - 2h^2 \nu \nu' \cos\theta_\gamma + h^2 \nu'^2 \cos^2\theta_\gamma + h^2 \nu'^2 \sin^2\theta_\gamma = p_e^2 c^2 \Rightarrow h^2 \nu^2 - 2h^2 \nu \nu' \cos\theta_\gamma + h^2 \nu'^2 = p_e^2 c^2 (**)$$

נשווה את (*) עם (**):

$$h^2 \nu^2 - 2h^2 \nu \nu' \cos\theta_\gamma + h^2 \nu'^2 = (h\nu - h\nu')^2 + 2(h\nu - h\nu')m_e c^2$$

$$\Rightarrow -2h^2 \nu \nu' \cos\theta_\gamma = -2h^2 \nu \nu' + 2h(\nu - \nu')m_e c^2 \Rightarrow -h\nu \nu' \cos\theta_\gamma = -h\nu \nu' + (\nu - \nu')m_e c^2$$

$$\Rightarrow h\nu \nu' (1 - \cos\theta_\gamma) = (\nu - \nu')m_e c^2 \Rightarrow \nu - \nu' = \frac{h\nu \nu' (1 - \cos\theta_\gamma)}{m_e c^2} \Rightarrow \frac{c}{\nu'} - \frac{c}{\nu} = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos\theta_\gamma)$$

$$\Rightarrow \lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos\theta_\gamma)$$

בניסוי, ההתפזרות של הפוטונים הייתה לאחר פגיעה באלקטרונים וגם לאחר פגיעה האטומים. בפגיעה באטומים, הפוטונים מתפזרים באורך גל קרוב יותר לאורך הגל המקורי, ובהם קשה יותר להבחין.

$$(\Delta\lambda)_{\max} = 2\lambda_c = \frac{2h}{m_e c} \cong 0.048 \left[\overset{0}{\text{Å}} \right] \quad \text{ואז } \theta_\gamma = \pi \text{ כאשר}$$

סיכום ביניים

בריק, מתקיים עבור גלים א"מ: $\lambda \nu = c$. עבור תווך בעל גורם שבירה n : $\lambda \nu = \frac{c}{n}$. תמיד $n > 1$.

הנחת איינשטיין: האור הוא זרם של חלקיקים, שנקראו יותר מאוחר פוטונים. תכונותיהם:

$$m_\gamma = 0, E = h\nu, P = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}$$

גלי דה-ברויי (De Broglie)

דה-ברויי הציע שעבור חלקיק שמסתו שונה מאפס ניתן לייחס גל: $\lambda = \frac{h}{p}$, ואז התדירות המתאימה: $\nu = \frac{E}{h}$. כדי לבדוק את האופי הגלי של האלקטרונים, לדוגמה, ניתן לבדוק אם תכונת העקיפה מתקיימת עבורם.

דוגמא

מהו אורך גל דה-ברויי של אלקטרון בעל אנרגיה קינטית של $150[eV]$?
פתרון: אנרגית המנוחה של האלקטרון היא $E_0 = m_e c^2 \cong 511[KeV] = 0.511[MeV]$.
 $150[eV]$ קטנים מאוד ביחס ל $511[KeV]$, ולכן ניתן להשתמש בביטוי הלא יחסותי של התנע, כלומר $P = m_e v$.

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{(m v)^2}{2m} = \frac{P^2}{2m} \Rightarrow P = \sqrt{2mE_k}$$

נחשב את התנע: $P = \sqrt{2mE_k}$

$$\lambda = \frac{h}{P} = \frac{h}{\sqrt{2mE_k}} = \frac{hc}{\sqrt{2mcE_k}} \cong 1 \left[\overset{0}{\text{A}} \right]$$

ולכן אורך הגל:

נפור את האלקטרונים מגביש – ניסוי בראג. נצפה לקבל את אותה התמונה על המסך כמו התמונה שקיבלנו בקרינת X, שאורך הגל שלה זהה לאורך הגל של האלקטרונים שבדוגמה. אכן הדבר כך קורה.

דוגמא

דור-רגל בעל מסה של $0.1[kg]$ נבעט במהירות של $30 \left[\frac{m}{sec} \right]$. מהו אורך גל דה-ברויי שלו?

$$\lambda = \frac{h}{P} = \frac{h}{mv} \cong 2.6 \cdot 10^{-34} [m]$$

זהו אורך גל אפסי ולכן, על אף שהדור-רגל הוא גל, לא ניתן למדוד את תכונותיו הגליות בניסוי.

דוגמא

נביט בניוטרונים תרמיים בכור גרעיני בעלי אנרגיה קינטית ממוצעת של $\bar{E}_k = \frac{3}{2} kT \cong 0.0466[eV]$, בטמפי החדר.

מהו אורך הגל של חלקיקים אלו?

$$\lambda = \frac{h}{P} = \frac{h}{m_n v} \cong 1.33 \left[\overset{0}{\text{A}} \right]$$

תזכורת לגבי גלים

$$k \equiv \frac{2\pi}{\lambda}, \omega \equiv 2\pi\nu, \text{ כאשר מגדירים } \Psi(x, t) = A \exp \left[i \left(\frac{2\pi}{\lambda} x - 2\pi\nu t \right) \right] = A e^{i(kx - \omega t)}$$

כאשר $kx - \omega t$ הוא הפאזה של הגל. נרצה לחשב את מהירות התקדמות הגל בתווד, ולכן נבדוק מתי

$kx - \omega t = const$. זה קורה כאשר $x = const + \frac{\omega t}{k}$. נגזור לפי הזמן ונראה ש: $\frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k}$, ולכן נגדיר מהירות פאזה:

$$v_p = \lambda \nu = c, \text{ ועבור גלים א"מ נקבל מהירות התקדמות שהיא מהירות האור: } v_p = \frac{\omega}{k} = \frac{2\pi\nu}{\frac{2\pi}{\lambda}} = \lambda \nu$$

$$v_p = \lambda \nu = \frac{E}{h} \cdot \frac{h}{p} = \frac{E}{p}$$

מהנוסחה היחסותית $E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$ מקבלים את מהירותו של חלקיק: $v = \frac{pc^2}{E}$, מהירות שתמיד קטנה מ c .

ואז $v_p = \frac{E}{p} = \frac{pc^2}{vp} = \frac{c^2}{v} \geq c$. כך מקבלים מהירות התקדמות גל שגדולה ממהירות האור, ולכן הרעיון של דה-ברויי נראה לא אמין בתחילה.

מתברר שמהירות הפאזה היא מהירות היפותטית. מבחינה מעשית, בטבע מופיעות "חבורות גלים", ולא גלים סינשוואידלים תיאורטיים. חבורת גלים היא זו שכוללת גלים סינשוואידלים שמתקדמת במרחב:

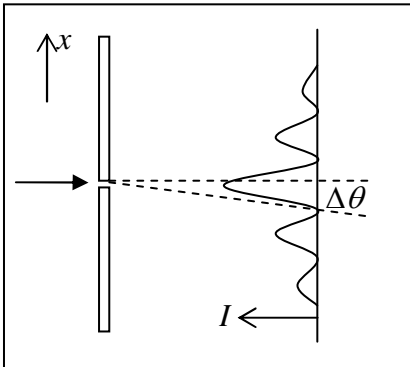
$\Psi(x \pm vt) = \int a(k) e^{i(kx - \omega t)} dk$ (זהו פיתוח פורייה). ניתן להראות בצורה מתמטית שמהירות התקדמות של חבורת גלים היא $v_g \equiv \frac{d\omega}{dk}$.

לאחר ניתוח מתמטי זה, כאשר $\hbar = \frac{h}{2\pi}$, $E = \hbar\omega$ ואז $E = \hbar\omega$ ו $P = \frac{h}{\lambda} = \hbar k$, נקבל ש:

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{\hbar d\omega}{\hbar dk} = \frac{dE}{dp} = \frac{d}{dp} \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} = \frac{1}{2\sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}} 2c^2 p = \frac{pc^2}{E} = \frac{c^2 \gamma m v}{\gamma m c^2} = v$$

כלומר, מהירות החבורה (שזו מהירות התקדמות הגל של חלקיק חומרי) יוצאת בצורה תקינה בדיוק מהירות החלקיק, שאכן קטנה ממהירות האור.

עקרון אי הודאות של אייזנברג



מסתבר שלישות גלית יש תכונות לא אינטואיטיביות. נרצה להגדיר קואורדינאטה מסוימת, ע"י העברת אלומת חלקיקים דרך סדק שרוחבו מסדר גודל של $D \sim \Delta x$. בגלל האופי הגלי של החלקיקים, תיווצר תמונת עקיפה על המסך המוצב, ולא נקודה בודדת.

ראינו בעבר, שהמרווח בו מרבית החלקיקים מצויים היא מסדר גודל של $\Delta\theta \sim \frac{\lambda}{D}$.

מכיוון שהחלקיקים נעים אפקטיבית גם בכיוון x , יש להם תנע בכיוון זה. תנע החלקיקים בכיוון x הוא $\Delta p_x \sim p \sin \Delta\theta \sim p \Delta\theta$, כאשר p זהו תנע החלקיקים.

נביט בביטוי: $\Delta p_x \Delta x \sim p \Delta\theta \cdot D \sim \frac{\lambda}{D} p \cdot D = \frac{\lambda}{D} \frac{h}{\lambda} D = h$. כלומר, קיבלנו ש $\Delta p_x \Delta x \cong h$.

מהי המשמעות? אם נרצה לדייק ולמדוד את קואורדינאטת החלקיקים Δx , יגדל התנע של החלקיקים בכיוון x , Δp_x , כלומר תגדל תמונת העקיפה – סדק קטן מרחיב את תמונת העקיפה.

אם ע"י אותו ניסוי נרצה למדוד את התנע בכיוון x וגם את הקואורדינאטה Δx , לא נוכל לעשות זאת בדיוק אינסופי. תכונה זו בנויה באופן הגלי של החלקיקים.

משמעות העובדה היא שאם חוזרים על מדידות כאלו בניסוי, התוצאות תתפלגנה, ולא נקבל בצורה חוזרת מדידה אחת.

מבחינה סטטיסטית נקבל שהמדד הסטטיסטי "סטיית התקן" במקום, כפול "סטיית התקן" בתנע תהיה גדולה מ h . עקרון אי הודאות של אייזנברג הוא, כאשר הדיוק במדידה מוגדר ע"י סטיית התקן:

$$\Delta p_x \Delta x \geq \frac{\hbar}{2}, \Delta p_y \Delta y \geq \frac{\hbar}{2}, \Delta p_z \Delta z \geq \frac{\hbar}{2}, \Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$$

משמעות $\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$ היא שדיוק מדידת האנרגיה יבוא על חשבון הזמן שהושקע למדידה.

עקרון זה בא לידי ביטוי רק בפיסיקה קוונטית – במערכות קטנות, מכיוון שסדר גודל הדיוק במדידה הוא קבוע פלאנק h .

הערה: בתורת הקוונטים, אי הודאות מתקבל כתוצאה מאקסיומות התורה, ולא מופיע כעיקרון עצמאי.

אתנחתא הסתברותית, סטיית תקן

נציג כמה מונחים הסתברותיים שיעזרו לנו בהמשך.

סיכוי – שכיחות יחסית של תוצאות. יש לנו N_i תוצאות שונות מסוג i , ויש $N = \sum N_i$ תוצאות.

השכיחות לקבל תוצאה מסוג i הוא $P_i \equiv \frac{N_i}{N}$.

ממוצע (תוחלת): $\langle A \rangle = \sum_i P_i A_i$. ממוצע הריבועים: $\langle A^2 \rangle = \sum_i P_i A_i^2$.

סטיית התקן של גודל s היא: $\sigma \equiv \sqrt{\langle s^2 \rangle - \langle s \rangle^2}$. סטיית התקן מבטאת את מרחב פיזור התוצאות סביב הממוצע. לדוגמה: שני אנשים בגובה 1 מטר ובגובה 2 מטר.

הממוצע: $\langle h \rangle = \frac{1+2}{2} = 1.5$ ריבוע הממוצע: $\langle h^2 \rangle = 2.25$

ממוצע הריבועים: $\langle h^2 \rangle = \frac{1^2+2^2}{2} = 2.5$

סטיית התקן: $\Delta h \equiv \sqrt{\langle h^2 \rangle - \langle h \rangle^2} = \sqrt{2.5 - 2.25} = 0.5$, וזהו אכן רוחב פיזור הערכים של h סביב הממוצע $\langle h \rangle$.

דוגמא

נביט באלקטרון בתוך אטום. רדיוס האטום R_A , ולכן $\Delta x \sim R_A$ - אי הוודאות במיקום האלקטרון היא בערך רדיוס האטום.

סטיית התקן היא $\Delta p_x = \sqrt{\langle p_x^2 \rangle - \langle p_x \rangle^2}$ התנע הממוצע של אלקטרון באטום חייב להיות אפס כי אחרת הוא היה

יוצא מהאטום. ולכן $\langle p_x \rangle = 0$ ולכן נקבל את סטיית התקן כך: $\Delta p_x = \sqrt{\langle p_x^2 \rangle}$

עיקרון אי הוודאות: $\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$, ולכן $\frac{\Delta x^2 \langle p_x^2 \rangle}{2m_e} \geq \frac{\hbar^2}{8m_e}$ $\Rightarrow \frac{\Delta x^2 \langle p_x^2 \rangle}{4} \geq \frac{\hbar^2}{8m_e}$ ואז:

$$\Delta x^2 \frac{\langle p_x^2 \rangle}{2m_e} \geq \frac{\hbar^2}{8m_e} \Rightarrow R_A^2 E_x \geq \frac{\hbar^2}{8m_e} \Rightarrow E_x \geq \frac{\hbar^2}{8m_e R_A^2} \cong 1[eV]$$

כלומר, יש לאלקטרון אנרגיה לא מבוטלת כלל מסדר גודל של $[eV]$, למרות שהוא נייח באטום.

דוגמא

מציאת המקום של אלקטרון בעזרת מיקרוסקופ שרדיוסו D . כדיל למצוא את מיקומו של אלקטרון, נביט בפרוטון הפוגע באלקטרון ומוסט. כל הפרוטונים המגיעים לתוך תחום עדשת המיקרוסקופ יגיע אל עינינו. לכן, אנו לא יכולים לקבוע מה התנע שנמסר לאלקטרון. אי הוודאות בתנע שקיבל

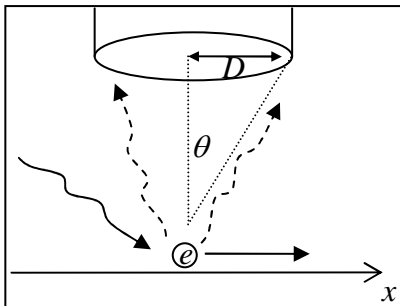
האלקטרון, Δp_x , הוא מסגר גודל $\Delta p_x \sim p_\gamma \theta$.

מצד שני, $\Delta x \sim \frac{\lambda}{D}$

ואז נקבל: $\Delta p_x \Delta x \sim p_\gamma \theta \frac{\lambda}{D} = \frac{h}{\lambda} \theta \frac{\lambda}{D} = h \frac{\theta}{D} = h \frac{D}{rD} \geq h$

ולכן ש: $\Delta p_x \Delta x \geq h$

הערה: עבור גלים אי"מ, עוצמת האור I פרופורציונאלית ל E^2 , שפרופורציונאלי לגודל הגל בריבוע: $I \sim E^2 \sim |A|^2$. ולכן עוצמת ההארה, שהיא בעצם כמות הפרוטונים, היא מדד לסיכוי למצוא פוטונים בכל נקודה בתמונת העקיפה. לסיכום: הגל עצמו מהווה את הסיכוי למצוא את החלקיקים המרכיבים אותו.



מודל תומסון וראת'רפורד

מודל שהוצע למבנה האטום. ב 1898, תומסון Thomson גילה את האלקטרון. מיליקן מדד את המטען, שסומן $-e$. האטום נראה כניטרלי, ולכן אם הוא כולל z אלקטרונים שמטענם $-ze$, האטום חייב להכיל כמות $+ze$ של מטען חיובי, כדי שסכום המטענים באטום יהיה ניטרלי.

המודל הציע כדור שטעון במטען חיובי שתופס את כלל נפח האטום, ובתוכו נמצאים אלקטרונים. בנוסף, התגלה שרדיוס האטום הוא $R_A \cong 10^{-8} [cm]$ ושגודל האטום הזה בכל סוגי החומרים, ולכן המשקל הסגולי של החומר פרופורציונאלי למשקל האטומי.

ראת'רפורד הציע את המודל הנכון: המטען החיובי מרוכז בנקודה במרכז האטום והאלקטרונים סובבים אותו. בנוסף, גילה ראת'רפורד את רדיוס גרעין האטום: $R \sim 10^{-13} [cm]$

עבור סדרי הגודל של האטום ושל גרעין האטום (Nucleus) הוגדרו קבועים: אנגסטרום: $A \cong 10^{-8} [cm]$ ופרמי: $f \cong 10^{-13} [cm]$ (על שם Fermi). יחידות האנרגיה שבשימוש בפיסיקה גרעינית הן $[MeV] = 10^6 [eV]$

ראת'רפורד גילה שאטומים כבדים, כמו רדיום, מתפרקים ופולטים קרינה (מרדיום הגיע השם רדיו-אקטיביות). את שלוש סוגי הקרינה הללו הוא סימן ב α, β, γ .

ב 1909, ראת'רפורד ורוידס (Roylds) הוכיחו שחלקיקי α הם חלקיקים טעונים, שמטענם $q_\alpha = +2e$, בעלי אנרגיה מסדר גודל של MeV (היום יודעים שחלקיקים אלו הם הגרעין של אטום ההליום). ראת'רפורד הציע להפגין חומר בחלקיקי α , כדי לבחון את אלומת החלקיקים וכך לחקור את מודל האטום של תומסון (ובעצם להפריכו). קצת על חומר רדיואקטיבי: חומר רדיואקטיבי יכול להתפרק וליצור אלומה של חלקיקי α , כאשר הוא נמצא במיכל עם סדק. לכל חומר רדיואקטיבי שמבצע התפרקות α יש אנרגיה אופיינית אחת שאותה מקבלים חלקיקי ה α הנפלטים בהתפרקות.

נביט בחלקיקי α שפוגעים באטום ונבחן את זווית הפיזור. הגודל והמסה הזניחים של האלקטרון לא יגרמו להסחת החלקיק, אלא המטען החיובי של האטום, שמפוזר בכל נפח האטום בצורה הומוגנית, ע"פ מודל תומסון. מהחוק השני של ניוטון:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \Rightarrow \int_{t_i}^{t_f} \frac{d\vec{p}}{dt} dt = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F} dt \Rightarrow \Delta\vec{p} = \vec{p}_f - \vec{p}_i = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F} dt$$

ראת'רפורד השתמש בחלקיקי זהב, שהם כבדים מאוד, ולכן הניח שמסת הגרעין $m_N = \infty$, ולכן הגרעין לא משנה מהירותו ולכן $|\vec{p}_f| = |\vec{p}_i| = p$ וכך

נוצר משולש שווה שוקיים בהתנגשות ואז: $|\Delta\vec{p}| = 2p \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sim p\theta$, לזוויות קטנות.

$$p\theta = \left| \int_{t_i}^{t_f} \vec{F} dt \right| \Rightarrow \theta = \frac{1}{p} \left| \int_{t_i}^{t_f} \vec{F} dt \right|$$

הכוח בין חלקיקי ה α לאטום: $F = \begin{cases} 0, & r > R_A \\ k \frac{Q_\alpha Q_A}{r^2} \left(\frac{r}{R_A}\right)^3 = k \frac{Q_\alpha Q_A}{R_A^3} r, & r < R_A \end{cases}$ כי כאשר החלקיקים מחוץ לגרעין,

המטען נטו הוא אפס ולכן אין כוח חשמלי. בנוסף, הכוח החשמלי הגדול ביותר יהיה כאשר $r = R_A$, וכך קיבל ראת'רפורד חסם עליון על גודל הזווית:

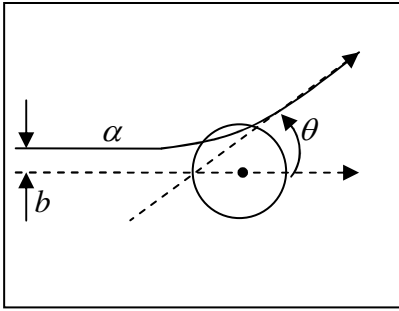
$$\theta = \frac{1}{p} \left| \int_{t_i}^{t_f} \vec{F} dt \right| < \frac{1}{p} \int_{t_i}^{t_f} \max(\vec{F}) dt = \frac{1}{p} \int_{t_i}^{t_f} k \frac{Q_\alpha Q_N}{R_A^2} dt = \frac{1}{p} \cdot k \frac{Q_\alpha Q_N}{R_A^2} \cdot \Delta t = \frac{1}{p} \cdot k \frac{Q_\alpha Q_N}{R_A^2} \cdot \frac{2R_A}{v}$$

$$\Rightarrow \theta < \frac{2}{(mv)v} \cdot \frac{kQ_\alpha Q_N}{R_A} = \frac{V(R_A)}{E_k} = \frac{R_A}{E_k} \cong 10^{-4} [rad]$$

בניסוי, הזוויות שהתקבלו היו מסדר גודל של עשרות מעלות.

מכאן הגיע ראת'רפורד להשערה שסדר גודל של גרעין האטום, בו נמצאים המטענים החיוביים קטן בארבעה סדרי גודל מרדיוס האטום – דבר זה יישב את סדר גודל זווית הפיזור שהתקבלה בניסוי. השערה זו כמובן נכונה.

מודל ראת'רפורד (Rutherford) לאטום



בשנת 1913 גילה ראת'רפורד את מבנה האטום כשהציע גרעין נקודתי ואלקטרונים סובבים סביבו, בדומה למערכת השמש. ראת'רפורד הגדיר מושג: "פרמטר פגיעה", נסמן אותו b , והוא מרחק מסלול חלקיקי ה- α ממסלול המגיע אל גרעין האטום, אילו לא היה שום כוח פועל על החלקיק. מושג נוסף: "זווית הפיזור" – הזווית בין הכיוון ההתחלתי של החלקיק לכיוון התנועה הסופי. ראת'רפורד גילה קשר פשוט בין זווית הפיזור לפרמטר הפגיעה:

$$b = \frac{1}{2} r_{\min} \cot\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

כאשר r_{\min} הוא המרחק המינימאלי אליו יגיע החלקיק מהגרעין אילו היה מתקדם לעברו. ניתן לחשב מרחק זה:

$$E_{\text{total}} = \frac{1}{2} mv^2 + \frac{kQ_\alpha Q_N}{r} \Rightarrow E_k = \frac{kQ_\alpha Q_N}{r_{\min}} \Rightarrow r_{\min} = \frac{kQ_\alpha Q_N}{E_k}$$

כאשר E_k אנרגיית החלקיק באינסוף.

ראת'רפורד ניסח נוסחא המבטאת קשר בין שטף חלקיקי ה- α לאטומי המטרה והגלאי:

$$\Delta n = jN_a \frac{d\sigma}{d\Omega} \frac{\Delta s}{r^2} = jN_a \Delta\sigma$$

כאשר:

1. Δn : כמות החלקיקים שתיכנס לתוך הגלאי, לאחר שהם פוגעים באטומי המטרה;
2. Δs : שטח הגלאי;
3. j : שטף חלקיקי ה- α שפוגע באטומי המטרה;

4. N_a : כמות האטומים במטרה $N_a = \frac{N_A \rho}{A}$, כאשר $N_A = 6.02 \cdot 10^{23}$ מספר אבוגדרו, ρ מסת החומר, A הוא מספר הפרוטונים + הניוטונים שיש בגרעין האטום;

5. r : מרחק הגלאי מהמטרה. מסמנים $\Delta\Omega \equiv \frac{\Delta s}{r^2}$ וזו נקראת זווית מרחבית. ראת'רפורד גילה כי

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{r_{\min}^2}{16} \cdot \frac{1}{\sin^4\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

6. גורם הפרופורציה, נקרא חתך הפעולה הדיפרנציאלי.

אם נפתח את הנוסחא, נקבל:

$$\Delta n = jN_a \frac{d\sigma}{d\Omega} \frac{\Delta s}{r^2} = jN_a \frac{\Delta\sigma}{\Delta\Omega} \Delta\Omega \Rightarrow \frac{\Delta n}{\Delta\Omega} = jN_a \frac{d\sigma}{d\Omega}$$

הוכחת הנוסחאות:

מההנחה שמסת גרעין האטום אינסופית, $m_N = \infty$, גודל מהירות החלקיקים לא משתנה, בגלל שימור אנרגיה:

$$\frac{1}{2} mv_i^2 = \frac{1}{2} mv_f^2 \Rightarrow |\vec{v}_i| = |\vec{v}_f| = v$$

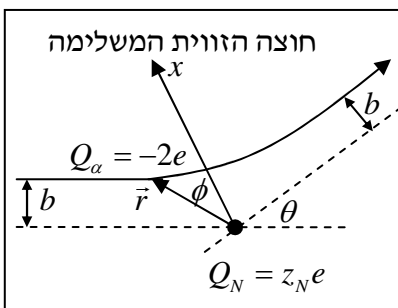
וכמוכן גם התנע הקווי לא ישתנה בגודלו: $|\vec{p}_f| = |\vec{p}_i| = p$

מחוק שימור התנע הזוויתי:

$$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v} \Rightarrow L_i = L_f \Rightarrow mv_i b_i = mv_f b_f \Rightarrow b_i = b_f = b$$

ולכן, אם המסלול הדמיוני העובר בגרעין האטום הוא המשיק של תנועת החלקיקים, מרחק החלקיקים ממשיק זה נשאר בסופו של דבר אותו מרחק. נגדיר את חוצה הזווית המשלימה ל- θ , ואת זווית ϕ שנמדדת מחוצה הזווית אל הרדיוס-וקטור אל חלקיק ה- α . נסמן ציר זה ב- x .

התנע הזוויתי במערכת קואורדינאטות זו הוא קבוע: $\ell = mr^2 \frac{d\phi}{dt} = mvb$



ואז: $dt = \frac{r^2}{vb} d\phi$. מהחוק השני של ניוטון:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \Rightarrow \int_{t_i}^{t_f} \frac{d\vec{p}}{dt} dt = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F} dt \Rightarrow \Delta\vec{p} = \vec{p}_f - \vec{p}_i = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F} dt$$

ממשולש שווה-השוקיים שנוצר, כפי שראינו קודם, מתקבל

$$|\Delta\vec{p}| = 2p \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

מחיבור וקטורים, רואים כי כיוון $\Delta\vec{p}$ הוא בכיוון חוצה הזווית שהגדרנו. לכן, הסכימה שנבצע על הכוח בכיוון ניצב לחוצה הזווית תיתן 0.

לכן, הכוח בכיוון מאונך לציר ה- x לא מעניין אותנו, ואז:

$$|\vec{p}_f - \vec{p}_i| = 2p \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \left| \int_{t_i}^{t_f} F_x dt \right| = \int_{\frac{\pi-\theta}{2}}^{\frac{\pi+\theta}{2}} \frac{kQ_\alpha Q_N}{r^2} \cos\phi \cdot \frac{r^2}{vb} d\phi = \frac{kQ_\alpha Q_N}{vb} \int_{\frac{\pi-\theta}{2}}^{\frac{\pi+\theta}{2}} \cos\phi d\phi = \frac{kQ_\alpha Q_N}{vb} [\sin\phi]_{\frac{\pi-\theta}{2}}^{\frac{\pi+\theta}{2}}$$

$$\Rightarrow 2p \sin\frac{\theta}{2} = \frac{kQ_\alpha Q_N}{vb} 2 \cos\frac{\theta}{2}$$

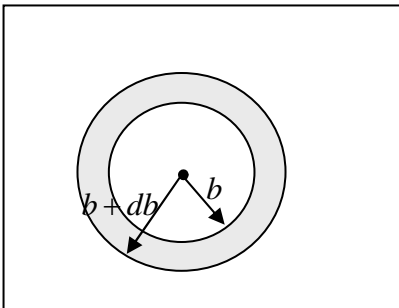
ואז, כאשר $p = mv$, נקבל:

$$b = \frac{1}{2} \frac{kQ_\alpha Q_N}{E_k} \cot\frac{\theta}{2} = \frac{1}{2} r_{\min} \cot\frac{\theta}{2}$$

וזוהי הנוסחה הראשונה שמצא ראת'רפורד. ניתן להראות את קיום הנוסחה

$$D = \frac{1}{2} r_{\min} \left(1 + \frac{1}{\sin\frac{\theta}{2}} \right)$$

כאשר D הוא מרחק החליפה של החלקיקים מהמטרה, עבור b נתון. ניתן לראות בנקל את תאימות הגבולות של $\theta = 0^\circ$ ו $\theta = 180^\circ$ לחליפת החלקיקים רחוק מאוד מהמטרה והיישר למטרה.



הנוסחה $b = \frac{1}{2} r_{\min} \cot\frac{\theta}{2}$ לא שימושית עבורנו, כי לא ניתן בניסוי למדוד

מרחקים מסדר גודל של $b \sim 1f$ - גדלים שיתנו זוויות שניתן למדוד. הנוסחה

$$r_{\min} = \frac{kQ_\alpha Q_N}{E_k}, \text{ כאשר } \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{r_{\min}^2}{16} \cdot \frac{1}{\sin^4\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

מתקשרת לנוסחה $\Delta n = jN_a \frac{d\sigma}{d\Omega}$, שימושית לניסוי.

נביט באלומה ששוטפת את מישור הדף, ונשאל את עצמנו אילו מהחלקיקים

מתפזרים בזוויות בין θ ל $\theta + d\theta$. מהנוסחה $b = \frac{1}{2} r_{\min} \cot\frac{\theta}{2}$ נסיק כי אלו הם החלקיקים שעוברים בין פרמטר

פגיעה b לבין פרמטר פגיעה $b + db$. מספר החלקיקים שנכנסים לטבעת כזו שרדיוסיה הם b ו $b + db$, הוא $\Delta n = j \cdot 2\pi b \cdot db$, וכאשר נגדיר אלמנט שטח $d\sigma \equiv 2\pi b db$ נקבל $\Delta n = j d\sigma$.

אך במטרה אין גרעין בודד - לכן נכפיל במספר הגרעינים שבחומר N_a : $\Delta n = jN_a d\sigma = jN_a 2\pi b db$. נפתח את הנוסחה הזו:

$$\Delta n = jN_a 2\pi b db \Rightarrow \frac{\Delta n}{2\pi \sin\theta d\theta} = jN_a \frac{2\pi b db}{2\pi \sin\theta d\theta}$$

בניסוי שלנו סימטריה צילינדרית, ובכדור, הזווית המרחבית עבור זוויות $\theta < \phi < \theta + d\theta$ היא $d\Omega = 2\pi \sin \theta d\theta$ ולכן:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta n}{2\pi \sin \theta d\theta} &= jN_a \frac{2\pi b db}{2\pi \sin \theta d\theta} \Rightarrow \frac{\Delta n}{d\Omega} = jN_a \frac{b}{\sin \theta} \frac{db}{d\theta} = jN_a \frac{1}{2\sin \theta} r_{\min} \cot \frac{\theta}{2} \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{2} r_{\min} \cot \frac{\theta}{2} \right) \\ &= jN_a \frac{r_{\min}^2}{4\sin \theta} \cot \frac{\theta}{2} \frac{d}{d\theta} \left(\frac{\cos \frac{\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} \right) = jN_a \frac{r_{\min}^2}{4\sin \theta} \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} \cdot \frac{-\frac{1}{2} \sin^2 \frac{\theta}{2} - \frac{1}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2}}{\sin^2 \frac{\theta}{2}} \\ &= -jN_a \frac{r_{\min}^2}{8 \cdot 2\sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}} \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} \cdot \frac{1}{\sin^2 \frac{\theta}{2}} = jN_a \cdot \frac{r_{\min}^2}{16} \cdot \frac{1}{\sin^4 \left(\frac{\theta}{2} \right)} \Rightarrow dn = jN_a \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega \end{aligned}$$

ראתרפורד ביצע את הניסוי עם שטף חלקיקים ידוע, כמות אטומים במטרה ידועה, ובדק אם החלקיקים מקיימים את הקשר

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{r_{\min}^2}{16} \cdot \frac{1}{\sin^4 \left(\frac{\theta}{2} \right)}$$

כך אנו למדים מהיכן מקור השם "חתך הפעולה": $d\sigma$ הוא חתך שדרכו מפוזרים חלקיקים לתחום הזוויות שבחרנו $\theta < \phi < \theta + d\theta$.

ראתרפורד קיבל שנוסחה זו התקיימה עבור אטומים בעלי גרעינים כבדים (לדוגמה אלומיניום). עבור גרעינים קלים, הנוסחה מתקיימת רק עד זווית קריטית מסוימת שמעליה לא הופיעו חלקיקים מפוזרים. זה קורה בגלל התנגשות בין חלקיקי ה- α לגרעין. תופעה זו קורית כאשר מרחק החליפה D קטן יותר מסכום הרדיוסים של חלקיקי ה- α והגרעין. במקרה זה תופסים פיקוד כוחות חזקים יותר מהכוחות החשמליים. ככל שהזווית עולה מעבר לזווית הקריטית שמתאימה למרחק חליפה מינימאלי לא יהיו חלקיקים מפוזרים בגלל אותה התנגשות. דבר זה קורה עבור גרעינים כבדים משום שלהם z גדול (כמות פרוטונים בגרעין), מה שמשיע על המרחק המינימאלי להגעת החלקיקים לגרעין:

$$r_{\min} = \frac{kQ_\alpha Q_N}{E_k} = \frac{k \cdot 2e \cdot ze}{E_k}$$

ככל שה- z של האטום גדול, כל r_{\min} המתאים יכול לגדול מעבר לסכום הרדיוסים של הגרעין וחלקיקי ה- α , ובמקרה שכזה, נראה פיזור חלקיקים לכל זווית θ . סיכום: ראתרפורד גילה:

1. שגרעין האטום הוא בעל מימדים, והוא לא נקודתי;
2. את הכוחות הגרעיניים, שהם חזקים הרבה יותר מהכוחות החשמליים, שהם קצרי טווח, כי לא מרגישים בהם במרחק מהגרעין – הפיזור מתבצע ללא הפרעה.

ספקטרום אטומי

פיסיקאי בשם Balmer, בשנת 1885 גילה את הספקטרום של המימן, בתחום הנראה. מנורת התפקרות מכילה מימן. מייצרים ממנה אלומה קווית שממשיכה דרך מנסרה. מכיוון שגורם השבירה תלוי באורך הגל, מקבלים על מסך גוונים שונים בתדירויות שונות. הספקטרום התגלה כבדיד ולא רציף. מאוחר יותר, התברר שלכל יסוד יש מגוון תדירויות (ספקטרום) שאופייני לו – תגלית בעלת חשיבות מעשית רבה. Rydberg מצא שסדרת התדירויות שבאלמר גילה (בתחום הנראה בלבד) עבור גז המימן, ניתנת לתיאור מדויק ע"י

$$\text{הנוסחה: } \frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right), n = 3, 4, 5, \dots, \text{ כאשר קבוע רידברג הוא: } R = 1.09737 \cdot 10^{-3} \left[\text{\AA}^{-1} \right]$$

נילס בוהר הצליח להסביר את תופעת התדירויות הבדידות בספקטרום והצליח להביא נוסחה אחת לכל אורכי הגל

$$\frac{1}{\lambda_{if}} = R \left(\frac{1}{n_i^2} - \frac{1}{n_f^2} \right); n_f, n_i = 1, 2, 3, \dots; n_f > n_i$$

מודל בוהר לאטום המימן

במודל ראת'רפורד לאטום המימן גרעין שמסביבו סובב אלקטרון, יש בעיה. האלקטרון שנע מסביב לגרעין מואץ כל הזמן בתאוצה רדיאלית ולכן חייב להקרין. ע"פ הפיסיקה הקלאסית, האלקטרון צריך להקרין בצורה רציפה, ולקרוס לתוך הגרעין תוך איבוד אנרגיה. האנרגיה של האלקטרון היא

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{ke^2}{r}$$

שקול הכוחות על האלקטרון מקיים, מהחוק השני של ניוטון:

$$\frac{ke^2}{r^2} = m \frac{v^2}{r} \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 = \frac{ke^2}{2r}$$

ולכן אנרגית האלקטרון:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{ke^2}{r} = -\frac{ke^2}{2r}$$

וכאשר r קטן, האנרגיה נעשית יותר שלילית ומהירותו גדלה. נילס בוהר הניח, בהמשך להצעתו של איינשטיין של האנרגיה הקוונטית (שבאה במנות בדידות), שגם התנע הזוויתי הוא גודל בדיד שמורכב ממנות, וכך הציע את נוסחת הקוונטיזציה של התנע הזוויתי

$$\ell = n\hbar$$

$$\text{כאשר } n = 1, 2, 3, \dots \text{ ו } \hbar \triangleq \frac{h}{2\pi}$$

בפיסיקה קלאסית, התנע של האלקטרון באטום המימן הוא $\ell = mvr$ ואז $mvr = n\hbar$ ולכן

$$p = mv = \frac{n\hbar}{r} \Rightarrow E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m} = \frac{n^2\hbar^2}{2mr^2}$$

$$\text{מקודם ראינו ש } E_k = \frac{ke^2}{2r} \text{ ולכן}$$

$$\frac{ke^2}{2r} = \frac{n^2\hbar^2}{2mr^2} \Rightarrow r = \frac{n^2\hbar^2}{mke^2}$$

$$r_n = \frac{n^2\hbar^2}{mke^2} \text{ כלומר, במודל האטום של בוהר, מתקיימים רדיוסי תנועה מסוימים}$$

מסמנים

$$a_0 \triangleq r_1 = \frac{\hbar^2}{mke^2} \cong 0.53 \left[\text{\AA} \right]$$

וזהו הרדיוס הקטן ביותר, והוא נקרא רדיוס בוהר.

האנרגיה הכוללת באטום המימן, שאותה חישבנו קודם:

$$E_n = -\frac{ke^2}{2r} = -\frac{ke^2}{2 \frac{n^2\hbar^2}{mke^2}} = -\frac{mk^2e^4}{2n^2\hbar^2}$$

מגדירים קבוע $\alpha \triangleq \frac{ke^2}{\hbar c} \cong \frac{1}{137}$, והוא חסר מימדים. כך נקבל ביטוי לרמות האנרגיה:

$$E_n = -\frac{mk^2e^4c^2}{2n^2\hbar^2c^2} = -\frac{mc^2\alpha^2}{2n^2}$$

נחשב את אורך הגל של הפוטון הנפלט במעבר אלקטרון בין רמות האנרגיה:

$$h\nu_{if} = E_i - E_f = \left(-\frac{mc^2\alpha^2}{2n_i^2} - \left(-\frac{mc^2\alpha^2}{2n_f^2} \right) \right) = E_0 \left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right) \Rightarrow \frac{c}{\lambda_{if}} = \frac{E_0}{h} \left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\lambda_{if}} = \frac{E_0}{hc} \left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right)$$

סיכום מודל בוהר לאטום המימן

הנחת בוהר: התנע הזוויתי הוא גודל קוונטי: $\ell = n\hbar$

הרדיוסים הבדידים בהם יכול אלקטרון לסבוב סביב הגרעין: $r_n = n^2 a_0$, כאשר $a_0 \triangleq \frac{\hbar^2}{m_e k e^2} \cong 0.53 \text{ \AA}$

רמות האנרגיות הבדידות של האלקטרון: $E_n = -\frac{(ke^2)^2 m_e}{2n^2 \hbar^2}$

ברמת היסוד, כאשר $n=1$ מקבלים $E_0 \equiv E_1 = -13.6 \text{ [eV]}$

אורך הגל הנפלט ע"י האלקטרון במעבר בין רמות אנרגיה: $\frac{1}{\lambda_{if}} = \frac{E_0}{hc} \left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right)$, וכך קבוע רידברג הוא $R = \frac{E_0}{hc}$

מהירות האלקטרון: $E_n = -\frac{(ke^2)^2 m}{2n^2 \hbar^2} = \frac{1}{2} m v^2 \Rightarrow v_n = \frac{ke^2}{n\hbar}$

הטיפול שעשינו עם מודל בוהר לאטום המימן הוא תחת ההנחה שמסת הגרעין אינסופית. במציאות, הגרעין והאלקטרון נעים סביב מרכז הכובד המשותף שלהם, שקרוב מאוד לגרעין בגלל מסתו. מסתבר שהנוסחאות שפיתחנו נכונות, מלבד שינוי אחד, שהוא המסה המצומצמת. עבור אטום המימן:

$$\mu \triangleq \frac{m_e m_p}{m_e + m_p} = \left(\frac{m_p}{m_e + m_p} \right) m_e = \left(\frac{1}{1 + \frac{m_e}{m_p}} \right) m_e$$

$$\mu = \left(\frac{1}{1 + \frac{m_e}{m_p}} \right) m_e \cong \left(1 - \frac{m_e}{m_p} \right) m_e$$

נוכיח זו:

נסמן m_1, \vec{r}_1 ו m_2, \vec{r}_2 - המרחקים והמסות של שני החלקיקים איתם אנו עוסקים - גרעין האטום והאלקטרון.

נגדיר את הגדלים הבאים: מסת המערכת: $M \equiv m_1 + m_2$; קואורדינאטת מרכז הכובד:

$$\vec{R} \triangleq \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{M} \quad \dot{\vec{R}} \triangleq \frac{m_1 \dot{\vec{r}}_1 + m_2 \dot{\vec{r}}_2}{M}$$

נבחר מערכת צירים כזו, שבה מהירות מרכז הכובד היא 0 - זוהי מערכת מרכז הכובד, ובה התנע הכולל $P \triangleq m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2$ שווה ל 0. במערכת מרכז הכובד נגדיר קואורדינאטה יחסית

$$\vec{r} \triangleq \vec{r}_1 - \vec{r}_2$$

כעת, במקום שימוש ב \vec{r}_1, \vec{r}_2 , נשתמש בווקטורים \vec{R} ו \vec{r} שהגדרנו לעיל.

$$E = \frac{1}{2} m_1 \dot{\vec{r}}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{\vec{r}}_2^2 + u(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) : \text{ ניתן להראות שהביטוי הכולל לאנרגיה המערכת:}$$

$$\text{הוא כזה: } E = \frac{1}{2} M \dot{\vec{R}}^2 + \frac{1}{2} \mu \dot{\vec{r}}^2 + u(\vec{r}) \quad \mu \equiv \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \text{ המסה המצומצמת.}$$

$$\text{ובמערכת מרכז הכובד } \dot{\vec{R}} = 0 \text{ ואז } E = \frac{1}{2} \mu \dot{\vec{r}}^2 + u(r)$$

$$\text{התנע הזוויתי } \vec{L} \triangleq \vec{r}_1 \times (m_1 \vec{v}_1) + \vec{r}_2 \times (m_2 \vec{v}_2) \text{ , שמתקבל הוא } \vec{L} = \mu(\vec{r} \times \vec{v}) \text{ וגודלו הוא } |\vec{L}| = \mu v r$$

וכך, ע"י מעבר לקואורדינאטות במרכז הכובד של מערכת האטום, הראנו שהנוסחאות שפיתחנו למודל בוהר נכונות,

$$\text{כאשר מסת האלקטרון מוחלפת במסה המצומצמת. אנרגית המערכת תהיה } E = \frac{1}{2} \mu v^2 - \frac{ke^2}{r}$$

$$\text{והביטוי הסופי שקיבלנו, עם המסה המצומצמת: } E_n = -\frac{\mu (ke^2)^2}{2n^2 \hbar^2}$$

שכלול מודל בוהר

- אטומים דמויי-מימן – בהם יש אלקטרון בודד ובמרכזו גרעין עם מטען $+ze$ ומסה m_N .

השוני הוא במכפלת המטענים. אנרגית המערכת תהיה $E = \frac{1}{2} \mu v^2 - \frac{kze^2}{r}$, כאשר

$$\mu \triangleq \frac{m_e m_N}{m_e + m_N} \cong m_e \left(1 - \frac{m_e}{m_N} \right)$$

מהגדרת המסה המצומצמת אנו רואים שהגדלת מסת הגרעין תורמת לקירוב שבו ניתן להשתמש בנוסחאות עם מסת האלקטרון בלבד. כך, בכל מקום שיופיע בנוסחאות k נחליף אותו ב zk . אנרגית האטום:

$$E_n = -\frac{mk^2 e^4 z^2}{2n^2 \hbar^2}$$

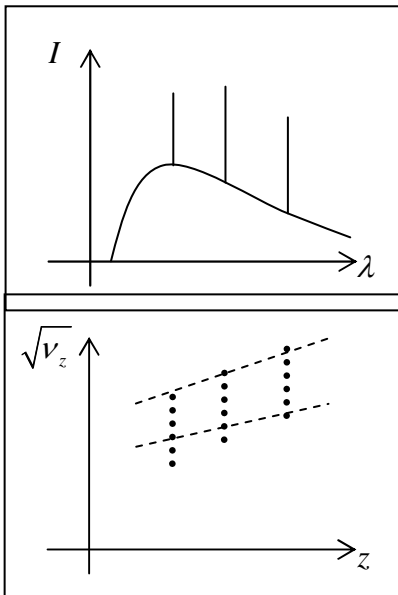
קבוע רידברג ישתנה:

$$E_0 = -\frac{mk^2 e^4 z^2}{2\hbar^2} \Rightarrow R(z) = z^2 \frac{E_0}{hc}$$

- אם נביט באטום כלשהו, שלו אלקטרון בודד במסלול הרחוק ביותר, אזי עבור אותו אלקטרון נמצא בתוך נפח איזור הסיבוב שלו מטען של $+e$, כי האטום ניטרלי ולא אלקטרון הבודד המרוחק ביותר מטען $-e$. לכן טיפול בתנועתו זהה לטיפול באטום המימן. תכונה זו מביאה לעובדה שרדיוסי האטומים בטבע חייבים להיות די דומים, כי עבור אותו אלקטרון מרוחק, אם נטפל בו כמו אלקטרון בודד באטום המימן, נקבל את אותו רדיוס התנועה של אלקטרון באטום המימן. מסיבה זו, שגודל כל האטומים כמעט זהה לכל היסודות, נסיק שהמשקל הסגולי של החומר חייב להיות פרופורציוני למסת האטום, או למספר הפרוטונים + ניוטרונים (A), כי ההבדל בין היסודות הוא רק במסת האטומים ולא בנפח האטומים.

חוק מוסלי (Mosley)

התגלתה תופעה שכאשר חומר z (שיש בגרעינו z פרוטונים) מופזז באלקטרונים, מתקבלים פוטונים מפוזרים בתדירויות שונות (קרינה), כאשר חלקן תדירויות בדידות הנובעות מפליטת פוטונים כתוצאה מחזרתם של אלקטרונים באטום לרמות נמוכות, לא מעוררות, לאחר שאלו עוררו ע"י הפוטונים שנשלחו אל החומר. מוסלי גילה, בצורה אמפירית שקיים קשר פשוט בין התדירויות הנפלטות וסוג החומר ממנו הן נפלטות, וזהו חוק מוסלי $\sqrt{\nu_z} = A_i (z - b_i)$, כאשר A_i, b_i קבועים אופייניים לכל תדירות (או אורך גל) בדידה.



מוסלי שרטט את הגרף של $\sqrt{\nu}$ כפונקציה של z , וכך ראה שלכל יסוד תדירויות משלו, וקיים קשר בין התדירות למספר האטומי z .

בהמשך נראה את הקשר לחוק האיסור של פאולי שקובע שברמת ערוך n , שנקרא "מצב n " (רדיוס סיבוב, אנרגיה, מהירות מסוימים של אלקטרון סביב הגרעין) יכולים להימצא רק $2n^2$ אלקטרונים. חוק זה מראה לנו שכאשר אלקטרון מרמה מסוימת יוצא, אלקטרון אחר ממלא את מקומו ואז נוצר מקום פנוי, וכך התהליך ממשיך. כאשר האלקטרונים זזים בין רמות האנרגיה, נפלטים הפוטונים עם אותם תדירויות בדידות שמתאימות לאותו z , המאפיין את היסוד.

הנוסחא $E_n = -\frac{mc^2 \alpha^2 z^2}{2n^2}$, לא מדויקת כי יש להביא בחשבון z אפקטיבי עבור רמות אנרגיה שונות, משום שבכל

רמה ורמה משתנה המטען נטו שמשפיע על תנועת האלקטרונים באותה רמה. על כך נרחיב בהמשך, בנושא תורת הקוונטים. לכן נכתוב:

$$h\nu_{if} = E_i - E_f = -\frac{\mu k^2 e^4}{2\hbar^2} \left(\frac{z_i^2}{n_i^2} - \frac{z_f^2}{n_f^2} \right) = -\frac{\mu k^2 e^4}{2\hbar^2} z_{eff}^2 \left(\frac{1}{n_i^2} - \frac{1}{n_f^2} \right)$$

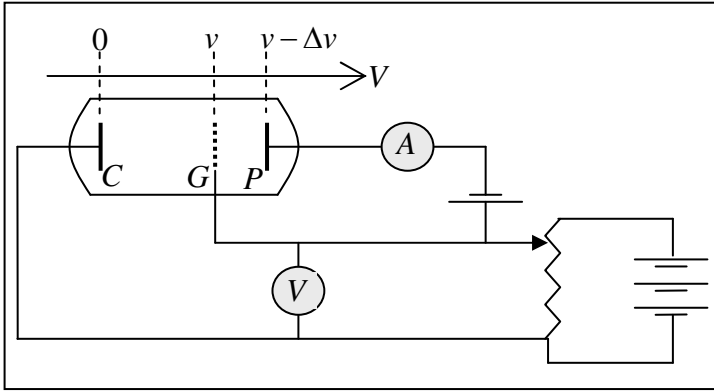
כאשר $z_{eff}^2 = (z - b_i)^2$, כי ה z האפקטיבי הוא תזוזה בקבוע b_i שרלוונטי למצב ההתחלתי והסופי מה z המקורי התיאורטי.

כך נקבל את חוק מוסלי:

$$h\nu_{if} = -\frac{\mu k^2 e^4}{2\hbar^2} z_{eff}^2 \left(\frac{1}{n_i^2} - \frac{1}{n_f^2} \right) \Rightarrow \nu_{if} = -\frac{\mu k^2 e^4}{2\hbar^2} \left(\frac{1}{n_i^2} - \frac{1}{n_f^2} \right) (z-b)^2 = -\frac{\mu k^2 e^4}{2\hbar^2} \left(\frac{1}{n_i^2} - \frac{1}{n_f^2} \right) (z-b_i)^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{\nu_z} = A_i (z-b_i)$$

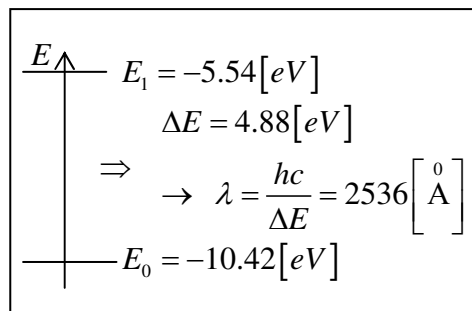
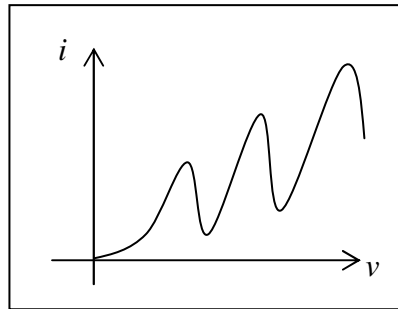
ונתן בהם סימנים: מוסלי סימן את הרמות באותיות: K, L, M, \dots כאשר K היא הרמה הנמוכה ביותר (אנרגטית ביותר). כל מעבר מרמה גבוהה לרמה נמוכה סומן בעזרת ההפרש בין הרמות, כך שמעבר מרמה 2 לרמה 1 הוא מעבר של רמה אחת מהרמה הנמוכה ביותר, ולכן סימונו K_α . מעבר מרמה 4 לרמה 2 הוא ירידה של שתי רמות מהרמה השנייה ולכן סימונו L_β .



כעת נראה שאכן האלקטרונים הסובבים את הגרעין חייבים להימצא באחת מרמות האנרגיה הבדידות. ב-1913 בוצע ניסוי שהוכיח את הקוונטיזציה של האלקטרונים באטומי המימן ובאטומים דמויי המימן, ע"י פרנק והרץ. ניסוי זה אישר את מודל בוהר לאטום המימן. בניסוי שפורט ואקום שבה אדי כספית. אלקטרונים נפלטים מהקתודה C , עוברים דרך השריג G ופוגעים באנודה P ומשם ממשיכים לזרום. את הזרם ניתן למדוד ע"י האמפרמטר A . בין השריג והקתודה מיושם מתח בלימה – כזה שיעצור אלקטרונים איטיים מידי כדי שלא יגיעו לאנודה ויצרו זרם. בניסוי מדדו את הזרם שמתקבל כפונקציה של המתח v .

הסתבר שבתחומים מסוימים של מתחים, הזרם אכן גדל כאשר המתח עולה, כצפוי.

בנוסף התקבל שבתחומים מסוימים הזרם נופל לרמה מסוימת. המרווח בין השיאים שנצפה הוא $4.88[V]$.



תורת הקוונטים

את תורת הקוונטים ניתן לנסח בצורות מתמטיות שונות. אנו נתעסק בניסוח של משוואות דיפרנציאליות. אנו נתעסק עם תורת הקוונטים הלא-יחסותית – מהירויות קטנות מאוד ביחס למהירות האור, או באופן אנלוגי, כאשר האנרגיה הקינטית של החלקיק קטנה מאוד ביחס לאנרגיית המנוחה שלו $E_0 = mc^2$. לכן, תורת הקוונטים שאותה נלמד לא תעסוק בתיאור התנועה של פוטונים. בתורת הקוונטים היחסותית, חלקיקים נוצרים ונעלמים, בגלל רמות האנרגיה הגבוהות, מה שמסבך את הנושא. הניסוח הסופי של תורת הקוונטים היחסותית נקראת תורת השדות.

אנו נלמד את האקסיומות המתמטיות של תורת הקוונטים (שלעיתים נראות מנוגדות להגיון) ומשם נסיק את המשמעויות הפיסיקאליות. לעיתים נשתמש רק בניסוחים מקורבים.

באלקטרומגנטיות, השדה החשמלי והמגנטי מקיימים את משוואות הגלים. וקטור פוינטינג, שהוא שטף האנרגיה של הגל, פרופורציוני לשדה החשמלי (או המגנטי) בריבוע. הגל בריבוע, שהוא שטף האנרגיה, מתואר גם ע"י כמות הפוטונים. כלומר עצמת האור היא כמות הפוטונים שמגיעה לגלאי בנקודת המדידה.

לפי דה-ברויי, $\lambda = \frac{h}{P}$ עבור חלקיקים בעלי מסה. אך מה הם הגלים האלו שקשורים לחלקיקים? איזו משוואה מקיימים גלים אלו?

אקסיומה ראשונה:

כל חלקיק מתואר ע"י פונקציה גל $\Psi(\vec{r}, t)$ מרוכבת, כאשר $|\Psi(\vec{r}, t)|^2 dv$ יהיה הסיכוי למצוא את החלקיק באלמנט הנפח dv ברגע t . פונקציה הגל מכילה את כל האינפורמציה הפיסיקאלית עבור החלקיק. לפונקציה הגל, אם כן, יש משמעות הסתברותית ולכן $\int_{\mathbb{R}^3} |\Psi|^2 dv = 1$, כי החלקיק חייב להיות איפשהו במרחב (אם נמצא פונקציה גל שמתכנסת לקבוע שונה מ-1, ניתן תמיד לנרמל אותה). לתכונה זו קוראים Squared-Integrable.

אקסיומה שנייה:

$\Psi(\vec{r}, t)$ מקיימת את משוואת הגלים של שרדינגר:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(\vec{r}, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2 \Psi(\vec{r}, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi(\vec{r}, t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi(\vec{r}, t)}{\partial z^2} \right) + V(\vec{r}, t) \Psi(\vec{r}, t)$$

כאשר $V(\vec{r}, t)$ היא פונקציה הפוטנציאל.

משוואה זו היא הגבול הלא-יחסותי של משוואה כללית יותר שמתארת את התנועה של חלקיקים כלשהם, שיכולים גם לנוע במהירויות שקרובות למהירות האור, או פוטונים שנעים במהירות האור. אנו, כאמור, נתעניין בתנועה של חלקיקים שנעים במהירות לא יחסותית $v \ll c$.

נשים לב שמשוואת שרדינגר היא ליניארית, ולכן כל קומבינציה ליניארית של פתרונות היא גם פתרון למשוואה.

נפשט את משוואת שרדינגר ע"י ההנחה שהפוטנציאל לא תלוי בזמן: $V = V(\vec{r})$.

משוואת שרדינגר היא פריקה ולכן נוכל לפרקה לשתי משוואות, שתלויות בנפרד בזמן ובמקום.

פתרון של משוואה ליניארית ופריקה יהיה מכפלה של פתרונות. נקבל פתרון מהצורה: $\Psi(\vec{r}, t) = \psi(\vec{r})\phi(t)$: נציב פתרון זה במשוואת שרדינגר ונוודא:

$$i\hbar \psi(\vec{r}) \frac{d\phi}{dt} = -\frac{\hbar^2}{2m} \phi \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) + V\psi\phi \Rightarrow \frac{i\hbar \psi \frac{d\phi}{dt}}{\psi\phi} = \frac{-\frac{\hbar^2}{2m} \phi \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) + V\psi\phi}{\psi\phi}$$

$$\Rightarrow \frac{i\hbar}{\phi} \frac{d\phi}{dt} = -\frac{\hbar^2}{2m\psi} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) + V$$

באגף ימין ביטוי שתלוי רק במרחב, ובאגף שמאל ביטוי שתלוי רק בזמן. כלומר, לכל זמן ובכל מקום, מתקיים שוויון, ולכן חייב להתקיים ששני האגפים שווים לאותו קבוע.

נסמן קבוע זה ב E . ולכן נקבל מכל אגף בנפרד :

$$\frac{i\hbar d\phi}{\phi dt} = -\frac{\hbar^2}{2m\psi} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) + V = E \Rightarrow \begin{cases} \frac{i\hbar d\phi}{\phi dt} = E \\ -\frac{\hbar^2}{2m\psi} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) + V = E \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (1) i\hbar \frac{d\phi}{dt} = E\phi \\ (2) \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) + \frac{2m}{\hbar^2} (E - V)\psi = 0 \end{cases}$$

קיבלנו שתי משוואות שתלויות כל אחת בנפרד במקום ובזמן.

הקבוע E הוא אנרגיית החלקיק. נשים לב שבמשוואה $i\hbar \frac{d\phi}{dt} = E\phi$ אין תלות במערכת או בחלקיק, כי אין את מאפייני החלקיק m או V . לכן, אם נפתור משוואה זו, כלומר נקבל את $\phi(t)$, פונקציה זו תהיה פתרון לכל המערכות.

פתרון משוואה (1) הוא פתרון אוניברסאלי כאמור, והוא :

$$\phi(t) = Ae^{-i\frac{Et}{\hbar}}$$

כעת, ניתן לראות ש

$$|\Psi|^2 = |\psi\phi|^2 = |\psi|^2 |\phi|^2 = |\psi|^2 \left| Ae^{-i\frac{Et}{\hbar}} \right|^2 = |\psi|^2 |A|^2$$

היא לא פונקציה של הזמן.

קיבלנו את משוואת שרדינגר שלא תלויה בזמן :

$$\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) + \frac{2m}{\hbar^2} (E - V)\psi = 0$$

אנו נטפל בבעיות חד-ממדיות ואז משוואת שרדינגר דועכת ל :

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (E - V(x))\psi = 0$$

חלקיק בתיבה חד ממדית

נסתכל על חלקיק שחייב להימצא בתיבה, כלומר $0 < x < a$. נחפש את התנאים שצריכים להתקיים כדי שהחלקיק יימצא רק בתוך התיבה. בפיסיקה קלאסית, האנרגיה מורכבת מאנרגיה קינטית ופוטנציאלית, לכן נקבע שהפוטנציאל מחוץ לתיבה הוא ∞ ובתוך התיבה הוא 0. נקבל :

$$V = \begin{cases} \infty, & x < 0 \\ 0, & 0 \leq x \leq a \\ \infty, & x > a \end{cases}$$

נחפש פתרון ψ שאינטגרל על ערכו המוחלט בריבוע הוא 1.

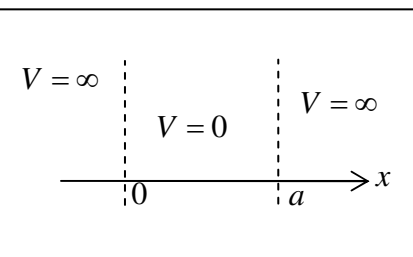
באזור $x < 0$ ובאזור $x > a$: הפתרון הוא $\psi = 0$, כי אין סיכוי למצוא את החלקיק באזורים אלו.

באזור $0 \leq x \leq a$, מכיוון ש $V(x) = 0$ נקבל

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (E - V(x))\psi = 0 \Rightarrow \frac{d^2 \psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} E\psi = 0 \Rightarrow \frac{d^2 \psi}{dx^2} + k^2 \psi = 0$$

כאשר מסמנים $k \triangleq \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$ הפתרון הכללי המתקבל הוא

$$\psi = A \sin kx + B \cos kx$$



הפונקציה ψ צריכה להיות רציפה בתור פתרון למשוואה דיפרנציאלית. כלומר:

$$\psi(0) = 0 = A \sin 0 + B \cos 0 \Rightarrow B = 0$$

$$\psi(a) = 0 = A \sin ka \Rightarrow k_n a = n\pi, n = 1, 2, 3, \dots$$

עבור $n = 0$, נקבל $\psi \equiv 0$ וכך $\int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2 dx = 0 \neq 1$, ולכן $n = 0$ לא תורם פתרון פיסיקאלי מתאים.

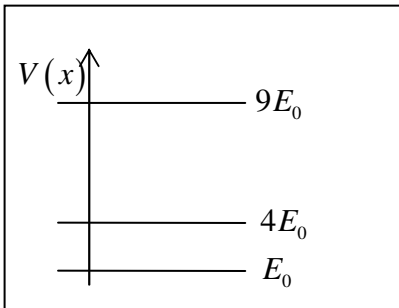
ולסיכום קיבלנו את הפתרון:

$$\psi = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ A \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right), & 0 \leq x \leq a \\ 0, & x > a \end{cases}$$

נשים לב לביטוי לאנרגיה שקיבלנו:

$$k \triangleq \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \Rightarrow \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 = \frac{2mE_n}{\hbar^2} \Rightarrow E_n = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2ma^2}$$

כלומר קיבלנו שהאנרגיה קיימת רק בכמויות בדידות – קוונטית.



נגדיר $E_0 \triangleq \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2}$, וכך נקבל את רמות האנרגיה המותרות לחלקיק בתיבה:

אנו נראה שרמות האנרגיה אופייניות לסוג הפוטנציאל בו שורר החלקיק.

נשים לב שהאנרגיה הנמוכה ביותר שמותרת היא לא אפס! דבר זה נובע מעיקרון אי הוודאות – מיקום החלקיק בתיבה בא על חשבון אי וודאות בתנע, או באנרגיה, שלו.

הרמה הנמוכה ביותר נקראת רמת היסוד. ברמה זו שואפים להיות החלקיקים בטבע. הרמות הגבוהות יותר נקראות רמות מעוררות.

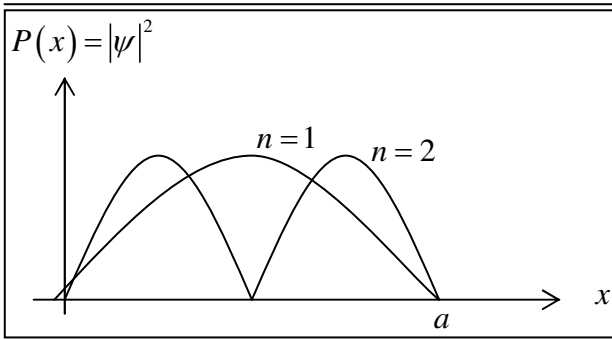
כאשר מעוררים חלקיקים לרמות גבוהות, הם חוזרים לרמת היסוד, וזו תוך כדי פליטה של אנרגיה שהיא ההפרש בין הרמות הרלוונטיות, בד"כ בצורה של אור ובאופן מיידי.

נותר לוודא את הדרישה ש $\int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2 dx = 1$:

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2 dx = |A|^2 \int_0^a \left| \sin \frac{n\pi}{a}x \right|^2 dx = |A|^2 \frac{a}{2} \Rightarrow A = \sqrt{\frac{2}{a}}$$

ולכן הפתרון הסופי לבעיה הוא

$$\psi = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right), & 0 \leq x \leq a \\ 0, & x > a \end{cases}$$



מניתוח מתמטי של הפתרון, נראה כי ברמות אנרגיה גדולות מאוד, הסיכוי למצוא את החלקיק בקטע dx פרופורציוני לאורך הקטע, כי $\int_{x_1}^{x_2} |\psi|^2 dx = x_2 - x_1$. לכן בגבול $n \rightarrow \infty$, מתקבלת התוצאה של הפיסיקה הקלאסית, כלומר הסיכוי למצוא את החלקיק בתיבה הוא אחיד לכל x בתיבה.

נרצה כעת לחשב את המקום הממוצע של החלקיק.

במרווח dx , הסיכוי למצוא את החלקיק הוא $|\psi|^2 dx$. המקום הממוצע הוא של החלקיק הוא

$$\langle x \rangle = \int x |\psi|^2 dx = \frac{a}{2}$$

כלומר האמצע.

הביטוי $\langle x^2 \rangle = \int x^2 |\psi|^2 dx$ מתקבל תלוי ב n . בפיסיקה קלאסית,

$$E = \frac{p^2}{2m} \Rightarrow p = \sqrt{2mE} = k\hbar = \frac{n\pi\hbar}{a}$$

מתברר ש $\langle p^2 \rangle = 2mE$, אך $\langle p \rangle = 0$ כי החלקיק לא יוצא מהתיבה.

אוסילטור הרמוני חד מימדי

נעסוק בפוטנציאל מהצורה $V(x) = \frac{1}{2}kx^2$, שגורר כוח $F = -\frac{\partial V}{\partial x} = -kx$. זהו פוטנציאל הרמוני שמייצר כוח

הרמוני.

פוטנציאל אפקטיבי, בסביבות נקודת שיווי משקל, במערכות פיסיקאליות רבות הוא מהצורה של פוטנציאל הרמוני, ולכן סוג פוטנציאל זה חשוב לחקירה. פוטנציאל כללי ניתן לפתח לטור טיילור:

$$V(x) = V(0) + V'(0)x + V''(0)\frac{x^2}{2!} + \dots$$

כאשר $x=0$ היא נקודת שיווי המשקל. נבחר $V(0) = 0$, נגדיר $V''(0) = k$ ובנקודת שיווי משקל, $V'(0) = 0$, לכן נקבל

$$V(x) = \frac{1}{2}kx^2$$

עבור מערכת בשיווי משקל יציב.

משוואת שרדינגר שיש לפתור, עבור פוטנציאל הרמוני, היא

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E - V(x))\psi = 0 \Rightarrow \frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}\left(E - \frac{1}{2}kx^2\right)\psi = 0$$

נבצע החלפת משתנים: $\omega \triangleq \sqrt{\frac{k}{m}}$, $y \triangleq \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x$, $\varepsilon \triangleq \frac{2E}{\hbar\omega}$ ונקבל:

$$\frac{d^2\psi}{dy^2} + (\varepsilon - y^2)\psi = 0$$

זוהי משוואת הרמיט (על שם המתמטיקאי הרמיט שפתר אותה לראשונה בצורה אנליטית) נראה איך המשוואה מתנהגת כאשר $y \rightarrow \infty$, ואז הקבוע ε זניח:

$$\frac{d^2\psi}{dy^2} - y^2\psi = 0$$

נחפש פתרון מהצורה $\psi = Ae^{-\frac{y^2}{2}}$. נחשב את הנגזרות:

$$\frac{d\psi}{dy} = -Aye^{-\frac{y^2}{2}}, \quad \frac{d^2\psi}{dy^2} = -Ae^{-\frac{y^2}{2}} + Ay^2e^{-\frac{y^2}{2}}$$

האיבר הדומיננטי בנגזרת השנייה כאשר $y \rightarrow \infty$ הוא $\frac{d^2\psi}{dy^2} = Ay^2e^{-\frac{y^2}{2}}$ ולכן נקבל

$$\frac{d^2\psi}{dy^2} = Ay^2e^{-\frac{y^2}{2}} = y^2\psi$$

ולכן, כאשר $y \rightarrow \infty$, נקבל פתרון למשוואה:

$$\frac{d^2\psi}{dy^2} - y^2\psi \cong y^2\psi - y^2\psi = 0$$

מתברר ש $\psi = a_n y^n e^{-\frac{y^2}{2}}$, לכל $n \geq 0$ וטבעי, פותר את המשוואה. מכיוון שמשוואת הרמיט ליניארית כל סכום פתרונות פותר גם הוא את המשוואה, לכן נקבל שביטוי מהצורה

$$\psi = H_n(y) e^{-\frac{y^2}{2}}$$

פותר את המשוואה, כאשר $H_n(y)$ פולינום של y . מתברר שרק עבור אנרגיות

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

יש פתרון מתמטי ומתאים מבחינה פיסיקאלית.

מבחינה מתמטית, המספרים הללו, $E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega$, הם הערכים העצמיים של המשוואה, והפתרונות

$$\psi = H_n(y) e^{-\frac{y^2}{2}}$$

נפתור עבור $n = 0$:

$$\frac{d^2\psi}{dy^2} - y^2\psi = y^2 A e^{-\frac{y^2}{2}} - A e^{-\frac{y^2}{2}} + (\varepsilon - y^2) A e^{-\frac{y^2}{2}} = -A e^{-\frac{y^2}{2}} + \varepsilon A e^{-\frac{y^2}{2}} = 0$$

כאשר $\varepsilon = 1$, כלומר $E_0 = \frac{1}{2} \hbar\omega$, וזוהי רמת היסוד של האנרגיה שכמובן גדולה מאפס. כדי למצוא פתרון כללי, נחפש פתרון מהצורה

$$\psi(y) = H(y) e^{-\frac{y^2}{2}}$$

נציב פתרון זה למשוואה הדיפרנציאלית ונחלק אותה ב $e^{-\frac{y^2}{2}}$:

$$\frac{d^2H}{dy^2} + (\varepsilon - y^2)H = 0 \Rightarrow \frac{d^2H}{dy^2} - 2y \frac{dH}{dy} + (\varepsilon - 1)H = 0$$

הפתרון הוא פולינום מהצורה $H(y) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i y^i$ ולכן:

$$\frac{dH(y)}{dy} = \sum_{i=1}^{\infty} i a_i y^{i-1} \Rightarrow -2y \frac{dH(y)}{dy} = -\sum_{i=1}^{\infty} 2i a_i y^i$$

$$\frac{d^2H(y)}{dy^2} = \sum_{i=1}^{\infty} i(i-1) a_i y^{i-2}$$

נציב ביטויים אלו למשוואה הדיפרנציאלית ונקבל:

$$\frac{d^2 H}{dy^2} - 2y \frac{dH}{dy} + (\varepsilon - 1)H = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} i(i-1)a_i y^{i-2} - \sum_{i=1}^{\infty} 2ia_i y^i + (\varepsilon - 1) \sum_{i=1}^{\infty} a_i y^i = 0$$

כעת יש לנו פולינום ששווה 0 לכל y , וזה יתכן אם $a_i = 0$ לכל i .
מדרישה זו מקבלים:

$$a_{i+2} = \frac{2i+1-\varepsilon}{(i+1)(i+2)} a_i$$

כעת, כדי שניתן יהיה לנרמל את הפתרון כדי לקבל $\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx = 1$, נדרוש שהפולינום מדרגה סופית, ולכן

$a_{i+2} = 0$ עבור i מסוים, כלומר $2i+1-\varepsilon = 0$ עבור i מסוים. נקבל $\varepsilon = 1+2i$, עבור i טבעי מסוים, ומהגדרת ε , נקבל שמתקיים

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar \omega$$

הפתרון הכללי של משוואת שרדינגר לאוסילטור הרמוני מאופיינים ע"י מספר קוונטי n :

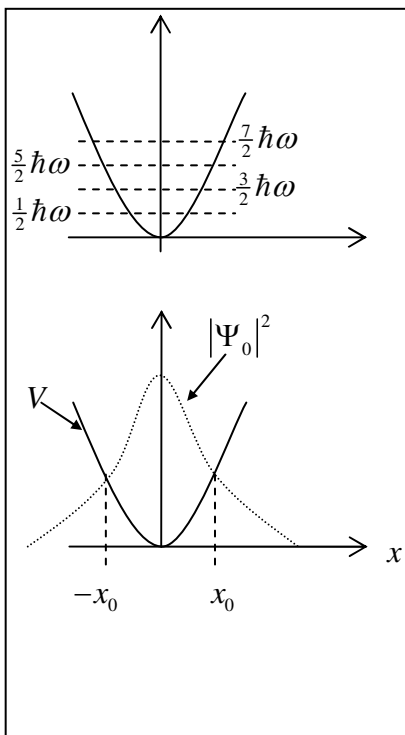
$$\psi_n = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} (2^n n!)^{-\frac{1}{2}} H_n(y) e^{-\frac{1}{2}y^2}$$

n	$H_n(y)$
0	1
1	$2y$
2	$4y^2 - 2$
3	$3y^3 - 12y$
4	$16y^4 - 48y^2 + 12$

לא נשכח שהגדרנו $y \triangleq \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x$ ולכן:

$$\psi_n = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} (2^n n!)^{-\frac{1}{2}} H_n(y) e^{-\frac{m\omega}{2\hbar} x^2}$$

נצייר את הפתרון:



לכן התדירויות שנפלטות במעברים בין רמות האנרגיה הן כאלה שעבורן:

$$h\nu_{if} = \Delta E = (n_i - n_f) \hbar \omega = \Delta h\nu$$

ולכן $\nu_{if} = \Delta n\nu$, כאשר ν היא תדירות האוסילטור.

נחשב את הנקודות ה"קלאסיות" שביניהם חייב החלקיק להימצא. החלקיק יימצא בין שתי הנקודות שבהן מהירותו מתאפסת, והאנרגיה הפוטנציאלית שלו מכסימלית. שתי נקודות אלו, $\pm x_0$, הן סימטריות, בגלל הפוטנציאל הסימטרי, והם מקיימות

$$V(|x_0|) = \frac{1}{2} k |x_0|^2 = \frac{1}{2} \hbar \omega \Rightarrow |x_0| = \sqrt{\frac{\hbar \omega}{k}} = \sqrt{\frac{\hbar}{k}} \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{\hbar}{m k}}$$

ובמשך התנועה, מתקיים $x \leq |x_0|$.

וקיבלנו שאפילו עבור רמת האנרגיה הנמוכה ביותר,

$$|\Psi_0|^2 \propto e^{-\frac{m\omega}{\hbar} x^2} = e^{-\left(\frac{x}{x_0}\right)^2}$$

כלומר פונקציית הגל לא מתאפסת, גם מחוץ לנקודות הגבול $|x_0|$ שמצאנו מהפיסיקה הקלאסית, וכאמור שם יש סיכוי להמצאות החלקיק ע"פ התורה הקוונטית.

חלקיק בפוטנציאל הרמוני תלת-מימדי

משוואת שרדינגר בשלושה מימדים היא

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (E - V(x, y, z)) \psi = 0$$

הפוטנציאל שלנו הוא

$$V = \frac{1}{2} k r^2 = \frac{1}{2} k (x^2 + y^2 + z^2) = \frac{1}{2} k x^2 + \frac{1}{2} k y^2 + \frac{1}{2} k z^2$$

נשים לב שהפוטנציאל פריק ומתפרק לסכום של שלוש פוטנציאלים, כמו גם הגזירות במשוואת שרדינגר, ולכן הפתרון הוא מכפלת הפתרונות עבור כל קואורדינטה בנפרד, כלומר הפתרון שלנו יהיה

$$\psi(x, y, z) = \psi_1(x) \psi_2(y) \psi_3(z)$$

נציב פתרון זה למשוואה ונפרק אותה:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (E - V(x, y, z)) \psi = 0$$

$$\psi_2 \psi_3 \frac{d^2 \psi_1}{dx^2} + \psi_1 \psi_3 \frac{d^2 \psi_2}{dy^2} + \psi_1 \psi_2 \frac{d^2 \psi_3}{dz^2} + \frac{2m}{\hbar^2} \left(E - \frac{1}{2} k x^2 - \frac{1}{2} k y^2 - \frac{1}{2} k z^2 \right) \psi_1 \psi_2 \psi_3 = 0$$

נחלק את המשוואה ב $\psi(x, y, z) = \psi_1(x) \psi_2(y) \psi_3(z)$ ונקבל

$$\frac{1}{\psi_1} \frac{d^2 \psi_1}{dx^2} + \frac{1}{\psi_2} \frac{d^2 \psi_2}{dy^2} + \frac{1}{\psi_3} \frac{d^2 \psi_3}{dz^2} - \frac{2m}{\hbar^2} \left(\frac{1}{2} k x^2 + \frac{1}{2} k y^2 + \frac{1}{2} k z^2 \right) = -E \frac{2m}{\hbar^2}$$

וכעת, מכיוון שיש לנו סכום של שלוש פונקציות שתלויות כ"א בנפרד במשתנה אחר, וסכום זה הוא קבוע, אזי כל פונקציה היא קבועה, ולכן נקבל ש:

$$\frac{d^2 \psi_1}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} \left(E_1 - \frac{1}{2} k x^2 \right) \psi_1 = 0$$

$$\frac{d^2 \psi_2}{dy^2} + \frac{2m}{\hbar^2} \left(E_2 - \frac{1}{2} k y^2 \right) \psi_2 = 0$$

$$\frac{d^2 \psi_3}{dz^2} + \frac{2m}{\hbar^2} \left(E_3 - \frac{1}{2} k z^2 \right) \psi_3 = 0$$

$$E_1 + E_2 + E_3 = E$$

ואלו שלוש משוואות שרדינגר חד-ממדיות, לכל קואורדינטה בנפרד, ואנו כבר מכירים את הפתרון. ההבדל הוא שהאנרגיה היא סכום של שלוש אנרגיות בכל אחד מהקואורדינטות. אנו יודעים שהאנרגיות שמקיימות את הפתרונות צריכות להיות:

$$E_1 = \left(n_x + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega, \quad E_2 = \left(n_y + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega, \quad E_3 = \left(n_z + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega$$

ולכן

$$E = \left(n_x + n_y + n_z + \frac{3}{2} \right) \hbar \omega = \left(n + \frac{3}{2} \right) \hbar \omega$$

כי $n_x + n_y + n_z$ גם מספר שלם כלשהו.

ולכן אנרגית היסוד עבור מצב תלת מימדי היא $\frac{3}{2} \hbar \omega$, במקום $\frac{1}{2} \hbar \omega$ שקיבלנו במקרה החד מימדי, כלומר רמות

האנרגיה כולן "עולות שלב אחד למעלה".

נשים לב שאנרגיה של $\left(1 + \frac{3}{2} \right) \hbar \omega$ יכולה להתקבל משלוש צירופים שונים של n_x, n_y, n_z . כלומר פתרונות שונים של

מצב החלקיק יתנו מצבי אנרגיה דומים. כלומר לאותה אנרגיה יש מצבים פיסיקליים אפשריים שונים – זוהי אנרגיה מנוונת. דרגת הניוון היא מספר המצבים הפיסיקאליים השונים לאותה אנרגיה. נשים לב שרמת היסוד שלנו אינה

מנוונת (דרגת ניוון 1), כי רק מצב פיסיקלי של $n_x = n_y = n_z = 0$ גורם לאנרגית היסוד $\frac{3}{2} \hbar \omega$.

כפי שכבר ציינו קודם, עבור $\frac{5}{2} \hbar \omega$ נקבל דרגת ניוון 3.

ניתן לחשב את דרגת הניוון של אוסילטור הרמוני תלת-מימדי בצורה אנליטית:

$$E_n = \left(n_x + n_y + n_z + \frac{3}{2} \right) \hbar \omega$$

נבחר את n . לכן יש לנו $n+1$ אפשרויות לבחור את n_x . נבחר $n_x = i$, ולכן $n_y + n_z = n - i$. כעת נוכל לבחור את n_y ב $n - i + 1$ אפשרויות, ואז n_z נקבע. לכן, סה"כ האפשרויות לבחירת n_x, n_y, n_z הוא

$$d = \sum_{i=0}^n (n - i + 1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

בור פוטנציאל תלת-מימדי

נביט בפוטנציאל

$$V(x, y, z) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq a \\ & 0 \leq y \leq b \\ & 0 \leq z \leq c \\ \infty, & \text{else} \end{cases}$$

נצטרך לפתור את משוואת שרדינגר. שוב נקבל פוטנציאל פריק שמתפרק לסכום של שלושה פוטנציאלים מוכרים מהמקרה החד-מימדי, ולכן הפתרון של תיבת פוטנציאל תלת-ממדית הוא מכפלת הפתרונות של פוטנציאלים חד-ממדיים לכל קואורדינטה בנפרד. מקבלים שהאנרגיה המתקבלת היא

$$E_{n_x, n_y, n_z} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m} \left(\frac{n_x^2}{a^2} + \frac{n_y^2}{b^2} + \frac{n_z^2}{c^2} \right)$$

ובמקרה הפשוט של $a = b = c = L$, אז הבור הוא קובייה, נקבל

$$E_{n_x, n_y, n_z} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2} (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2) = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2} \vec{n}^2$$

ושוב כמובן יש לנו דרגות ניוון – אנרגיות שמתקבלות ממצבים פיסיקאליים שונים.

אופרטורים וגדלים מדידים

נרצה לדלות את האינפורמציה הפיסיקאלית על החלקיק מפונקצית הגל שלו. תורת הקוונטים תאמר לנו מהן התוצאות האפשריות של מדידה פיסיקאלית וכמו כן מה הסיכויים של תוצאות המדידה השונות.

אופרטור – חוק פעולה במרחב ליניארי, או במילים אחרות כל פעולה מתמטית שמוגדרת באופן חד-ערכי.

סימון אופרטור: \hat{O} .

דוגמא לאופרטורים: במרחב הפונקציות הגזירות $\{\phi\}$, כפל בסקלר הוא אופרטור ויסומן $\hat{O}\phi = 3\phi$.

גזירה היא גם אופרטור, ותסומן $\hat{O}\phi = \phi'$.

פונקציות עצמיות של אופרטור – פונקציות ϕ_n שמקיימות $\hat{O}\phi_n = \omega_n \phi_n$.

ערכים עצמיים של אופרטור – מספרים ω_n שמקיימים $\hat{O}\phi_n = \omega_n \phi_n$.

מטריצה הרמיטית – מטריצה A המקיימת $A = \overline{(A^T)}$ (מסומן כ $A = A^\dagger$). ניתן להוכיח שעבור מטריצות כאלו, הערכים העצמיים יהיו ממשיים. באותו אופן, ערכים עצמיים של אופרטורים הרמטיים יהיו ממשיים.

אקסיומה שלישית:

כל גודל מדיד מיוצג ע"י אופרטור הרמיטי. התוצאות האפשריות של המדידה הם הערכים העצמיים של האופרטור.

הדרישה שהאופרטור הוא מסוג הרמיטי, תבטיח שהערכים העצמיים של האופרטור ממשיים, התכונה הבסיסית של גדלים מדידים.

האופרטורים לגדלים המדידים המוכרים לנו התגלו באופן של ניסיון וטעייה. נשחזר כיצד "ניחשו" את האופרטורים.

נביט במשוואת שרדינגר עבור $V = 0$. פתרון המשוואה

$$\frac{d^2\Psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}\psi = 0$$

הוא

$$\psi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}, \quad k \triangleq \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

ולכן

$$k\hbar = \sqrt{2mE} = \sqrt{2m \frac{1}{2} mv^2} = \sqrt{m^2 v^2} = \pm(mv)$$

ולכן עבור האופרטור

$$-i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$$

הפתרונות של משוואת שרדינגר $\psi(x)$ הם פונקציות עצמיות, ו $\lambda = \pm k\hbar$ הם הערכים העצמיים:

$$\hat{P}\psi_1 = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \psi_1 = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} Ae^{ikx} = k\hbar Ae^{ikx} = k\hbar \psi_1$$

$$\hat{P}\psi_2 = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \psi_2 = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} Ae^{-ikx} = -k\hbar Be^{-ikx} = -k\hbar \psi_2$$

ולכן האופרטור שמייצג את התנע הוא

$$\hat{P} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$$

והפונקציות העצמיות של אופרטור זה הן

$$\phi_{\pm k} = e^{\pm ikx}$$

עם ערכים עצמיים

$$\lambda = \pm k\hbar$$

מתקבלת הטבלה הבאה:

גודל קלאסי	אופרטור קוונטי \hat{O}
תנע ואנרגיה (p_x, p_y, p_z, E)	$(\hat{P}_x, \hat{P}_y, \hat{P}_z, \hat{E}) = \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x}, -i\hbar \frac{\partial}{\partial y}, -i\hbar \frac{\partial}{\partial z}, i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\right)$
מקום וזמן (x, y, z, t)	$(\hat{X}, \hat{Y}, \hat{Z}, \hat{T}) = (x, y, z, t)$

אקסיומה רביעית:

אם $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ מערכת אורתונורמלית של פונקציות עצמיות של גודל מדיד \hat{O} (אופרטור), עם ערכים עצמיים

ω_n , ואם הפתרון למשוואת שרדינגר מקיים $\psi = \sum_{n=1}^N a_n \phi_n$, אזי הסיכויים לקבל ω_n במדידה הוא $|a_n|^2$.

את האנרגיה הממוצעת נוכל לחשב ע"י

$$\langle E \rangle = \sum_n |a_n|^2 E_n$$

נחזור לדוגמה של חלקיקי בתיבה חד-ממדית (חלקיק בבור פוטנציאל). ראינו שהפתרון הוא

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin kx, \quad k \triangleq \frac{n\pi}{L}$$

ורמות האנרגיה שהתקבלו:

$$E_n = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2ma^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

ואם נכתוב את הפתרונות בצורה הבאה:

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin kx = \sqrt{\frac{2}{L}} \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i} = \frac{1}{i\sqrt{2}} \left[\frac{1}{\sqrt{L}} e^{ikx} - \frac{1}{\sqrt{L}} e^{-ikx} \right]$$

ובהוספת הסימון לפונקציות העצמיות של אופרטור התנע, $\phi_{\pm k}$, נקבל ש

$$\psi_n(x) = \frac{1}{i\sqrt{2}} (\phi_{+k} - \phi_{-k})$$

הפונקציות $\phi_{\pm k}$ אורתונורמליות, ולכן לפי האקסיומה הרביעית, $|a_n|^2 = \left| \frac{1}{i\sqrt{2}} \right|^2 = \frac{1}{2}$. כלומר יש סיכוי של 50% לקבל

את הגודל 'תנעי' $k\hbar$ ו 50% לקבל $-k\hbar$.

הגדרת הערך הממוצע שלגודל מדיד (אופרטור) הוא

$$\langle \hat{O} \rangle \triangleq \sum_{n=1}^N |a_n|^2 \omega_n$$

תוצאה שמתקבלת:

$$\langle \hat{O} \rangle = \sum_{n=1}^N |a_n|^2 \omega_n = \iiint_{\mathbb{R}^3} \bar{\psi} \hat{O} \psi dv$$

לכן, התנע הממוצע בבור פוטנציאל $\langle p \rangle$ הוא

$$\langle p \rangle = 0.5k\hbar + 0.5(-k\hbar) = 0$$

חדירה דרך מחסום פוטנציאל

מחסום פוטנציאל

מכיוון שסה"כ אנרגיה של חלקיק היא

$$E = E_k + V(x) = \frac{p^2}{2m} + V(x)$$

אזי אם באזור מסוים, הפוטנציאל $V(x)$ גדול מהאנרגיה הכללית E , נאמר שאזור זה אסור מבחינה קלאסית – חלקיק לא יכול להימצא באזור כזה.

באזור, האזור $x_1 \leq x \leq x_2$ הוא מחסום פוטנציאל עבור

חלקיק עם רמת האנרגיה E_0 .

מנהור

אפקט המנהור (Tunneling) הוא אפקט קוונטי של חדירה דרך מחסום פוטנציאל. לחלקיק יש סיכוי מסוים "לדלג" על איזור אסור וכך לעבור סין שני אזורים מותרים.

סיכוי החדירה דרך מחסום פוטנציאל (Penetration), בקירוב שנקרא קירוב WKB, הוא:

$$P \triangleq \exp \left(-2 \int_{x_1}^{x_2} k dx \right)$$

כאשר

$$k(x) \triangleq \frac{\sqrt{2m(V(x) - E)}}{\hbar}$$

והנקודות x_1, x_2 (נקודות המפנה) מקיימות את הקשר

סיכוי ההחזרה (Reflection) יהיה $R = 1 - P$.

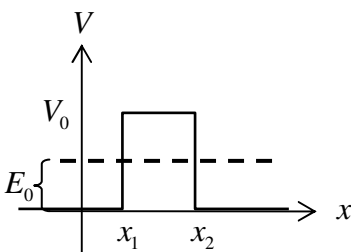
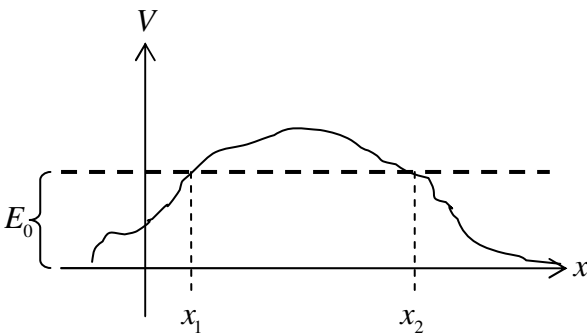
$$V(x) = E$$

דוגמא - מחסום פוטנציאל ריבועי

נחשב את הסיכוי לעבור מחסום פוטנציאל ריבועי:

$$P = \exp \left(-2 \int_{x_1}^{x_2} k dx \right) = e^{-2ka} = e^{-2a \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar}}$$

כאשר a הוא רוחב המחסום, $a = x_2 - x_1$.



צפיפות הזרם

צפיפות הזרם בתורת החשמל הקלאסית היא $j = \rho v$, כאשר ρ היא צפיפות המטען. בתורת הקוונטים, מתברר שהביטוי לצפיפות זרם הוא:

$$\vec{j} = \frac{\hbar}{2im} (\bar{\Psi} \vec{\nabla} \Psi - \Psi \vec{\nabla} \bar{\Psi})$$

במקום שבו $V(x) = 0$, ראינו שפתרון משוואת שרדינגר הוא

$$\psi_{\pm} = Ae^{\pm ikx}, \quad p = \pm k\hbar$$

ולכן, עבור הפתרון $\psi_+ = Ae^{ikx}$, הזרם בכיוון x הוא:

$$\begin{aligned} j_+ &= \frac{\hbar}{2im} (\bar{\Psi} \vec{\nabla} \Psi - \Psi \vec{\nabla} \bar{\Psi}) = \frac{\hbar}{2im} (Ae^{-ikx} (ikAe^{ikx}) - Ae^{ikx} (-ikAe^{-ikx})) = \frac{\hbar}{2im} (ik\psi_-\psi_+ + ik\psi_+\psi_-) \\ &= \frac{k\hbar}{m} \psi_-\psi_+ = \frac{k\hbar}{m} \psi_+\psi_+ = \frac{p}{m} |\psi_+|^2 = v |\psi_+|^2 \end{aligned}$$

ובאותו אופן, עבור $\psi_- = Ae^{-ikx}$, נקבל $j_- = -v |\psi_-|^2$, כלומר זרם של חלקיקים בכיוון $-x$.

נביט בפוטנציאל בצורת מדרגה.

באזור שבו $V = 0$, פתרונות משוואת שרדינגר הם

$$\psi_1 = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$$

ראינו שפתרונות אלו מתארים זרם של חלקיקים בכיוון החיובי Ae^{ikx} , ובכיוון השלילי Be^{-ikx} , ולכן טבעי יהיה להגדיר את סיכוי ההחזרה כך:

$$R \triangleq \frac{j_-}{j_+} = \frac{v |\psi_-|^2}{v |\psi_+|^2} = \frac{|B|^2}{|A|^2}$$

את סיכוי החדירה P (או ההעברה T (Transmission)) נגדיר כך:

$$P = T \triangleq \frac{j_t}{j_+}$$

כאשר j_t הוא הזרם ש"מצליח" לעבור דרך מחסום הפוטנציאל.

באזור שבו $V = V_0$, פתרונות משוואת שרדינגר הם

$$\psi_2 = Ce^{\beta x} + De^{-\beta x}, \quad \beta \triangleq \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar}$$

מכיוון שהאיבר $e^{\beta x}$ מתבדר באינסוף, הוא לא מתאים לפתרון מבחינה פיסיקאלית ולכן $C = 0$.

כללי עבודה ברציפות פונקצית הגל בקפיצות פוטנציאל:

1. בקפיצת פוטנציאל סופית בנקודה x_0 , יש לדרוש ש $\psi(x_0)$ וגם $\psi'(x_0)$ רציפות

2. בקפיצת פוטנציאל אינסופית בנקודה x_0 , יש לדרוש רק $\psi(x_0)$ רציפה.

פונקצית הגל ונגזרתה צריכות להיות רציפות ב $x_0 = 0$, ולכן יש לדרוש:

$$\begin{cases} \psi_1(0) = \psi_2(0) \Rightarrow A + B = D \\ \left. \frac{d}{dx} \psi_1 \right|_{x=0} = \left. \frac{d}{dx} \psi_2 \right|_{x=0} \Rightarrow ikA - ikB = -\beta D \end{cases}$$

ולכן

$$A = D - \left(\frac{ikA + \beta D}{ik} \right) \Rightarrow ikA = ikD - ikA + \beta D \Rightarrow A = D \frac{ik + \beta}{2ik}$$

נקבל את גורם החדירה, כאשר רוחב מחסום הפוטנציאל הוא a :

$$P = \frac{j_t}{j_+} = \frac{v |\psi_t(a)|^2}{v |\psi_+(0)|^2} = \frac{|De^{-\beta a}|^2}{|Ae^{ik0}|^2} = \frac{|D|^2 e^{-2\beta a}}{|A|^2} = \frac{|D|^2}{\left| D \frac{ik + \beta}{2ik} \right|^2} e^{-2\beta a} = \frac{4k^2}{k^2 + \beta^2} e^{-2\beta a}$$

משוואת שרדינגר בקואורדינטות כדוריות

נביט פוטנציאל באטום המימן בקואורדינטות קרטזיות:

$$V(x, y, z) = -\frac{ke^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

או בצורה פשוטה יותר, בקואורדינטות כדוריות,

$$V(r, \theta, \phi) = -\frac{ke^2}{r}$$

הפוטנציאל רשום כפונקציה פריקה.

ולכן נעדיף לפתור את משוואת שרדינגר בקואורדינטות כדוריות במקרה של פוטנציאל בעל סימטריה כדורית. נזכיר את הגדרת הקואורדינטות הכדוריות:

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta = \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\ \phi = \arctan \frac{y}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = r \sin \theta \cos \phi \\ y = r \sin \theta \sin \phi \\ z = r \cos \theta \end{cases}$$

לאחר ההצבה וגזירה בעזרת כללי הגזירה המתאימים, מתקבלת משוואת שרדינגר בקואורדינטות כדוריות:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (E - V(r)) \psi = 0$$

ומכיוון שמשוואה זו פריקה ב r, θ, ϕ , ניתן לכתוב את הפתרון כמכפלה של פונקציות, כלומר הפתרון מקיים:

$$\psi(r, \theta, \phi) = R(r) + \Theta(\theta) + \Phi(\phi)$$

ולאחר שניציב פתרון זה ונחלק את המשוואה ב ψ , נקבל:

$$-\frac{\sin^2 \theta}{R} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial R}{\partial r} \right) - \frac{2m}{\hbar^2} r^2 \sin^2 \theta (E - V(r)) - \frac{\sin \theta}{\Theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} \right) = \frac{1}{\Phi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2}$$

מכיוון שאגף ימין שתלוי רק ב r, θ שווה לאגף שמאל שתלוי רק ב ϕ , שני האגפים צריכים להיות קבועים, ולכן

$$(1) \quad \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{2m}{\hbar^2} \left(E - V(r) - \frac{\hbar^2 \ell(\ell+1)}{2m r^2} \right) R = 0$$

$$(2) \quad \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \left(\ell(\ell+1) - \frac{m_\ell^2}{\sin^2 \theta} \right) \Theta = 0$$

$$(3) \quad \frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} = -m_\ell^2$$

כאשר $m \in \mathbb{Z}$.אם נגדיר $U(r) \triangleq rR(r)$ אז המשוואה הראשונה היא

$$(1) \quad \frac{d^2 U}{dr^2} + \frac{2m}{\hbar^2} \left(E - V(r) - \frac{\ell(\ell+1)\hbar^2}{2mr^2} \right) U(r) = 0$$

משוואה זו דומה למשוואת שרדינגר במימד אחד, עם שינוי קל: הפוטנציאל האפקטיבי הוא הפוטנציאל V בתוספת פוטנציאל צנטריפוגלי, כלומר

$$V_{\text{eff}} = V + \frac{\ell(\ell+1)\hbar^2}{2mr^2}$$

נשים לב שמשוואות 2 ו 3 אינן תלויות בפוטנציאל או במסת החלקיק, ולכן נוכל לפתור אותן בצורה אוניברסאלית לכל הבעיות בעולם שיש בהן סימטריה כדורית, כפי שפתרנו את החלק שתלוי בזמן במשוואת שרדינגר הכללית. תנאי הנרמול של ψ :

$$\begin{aligned} \iiint_{\mathbb{R}^3} |\psi|^2 dv &= \iiint_{\mathbb{R}^3} |R|^2 |\Theta|^2 |\Phi|^2 dv = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |R|^2 |\Theta|^2 |\Phi|^2 r^2 dr \sin \theta d\theta d\phi \\ &= \int_0^{\infty} |R|^2 r^2 dr \int_0^{\pi} |\Theta|^2 \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} |\Phi|^2 d\phi = 1 \end{aligned}$$

כלומר, צריכים להתקיים התנאים הבאים:

$$\int_0^{\infty} |R|^2 r^2 dr = 1, \quad \int_0^{2\pi} |\Phi|^2 d\phi = 1, \quad \int_0^{\pi} |\Theta|^2 \sin \theta d\theta = 1$$

נפתור את משוואה 3:

$$\Phi = A e^{im_\ell \phi}, \quad m_\ell \in \mathbb{Z}$$

פתרון זה מקיים את הדרישה הפיסיקאלית של היות הפונקציה מחזורית- 2π , כלומר $\Phi(\phi) = \Phi(\phi + 2\pi n)$. כעת נרצה שהאינטגרציה על $|\Phi|^2 d\phi$ תיתן 1, כדי שהסיכוי למצוא את החלקיק בזווית כלשהיא יהיה 100%, ולכן

$$\int_0^{2\pi} |\Phi|^2 d\phi = \int_0^{2\pi} A^2 |e^{im_\ell \phi}|^2 d\phi = 2\pi A^2 = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

ולכן, בכל בעיה עם פוטנציאל בעל סימטריה כדורית, ניתן להשתמש בתוצאה הבלתי תלויה עבור $\Phi(\phi)$:

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im_\ell \phi}, \quad m_\ell \in \mathbb{Z}$$

משוואה (3) היא אקוויולנטית למשוואת הערכים העצמיים של התנע בזווית בכיוון z , L_z .

משוואה (2) היא אקוויולנטית למשוואת הערכים העצמיים של גודל התנע הזוויתי $L^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2$.

והתוצאות הן:

ממשוואה (3) ניתן להגיע לתוצאה שהזכרנו בעבר עבור התנע הזוויתי בכיוון z (שהוא כמובן שרירותי וניתן לבחירה):

$$L_z = m_\ell \hbar$$

כלומר, קוונטיזציה של התנע הזוויתי.

ממשוואה (2) ניתן להגיע לתוצאת הקוונטיזציה של התנע הזוויתי

$$|\bar{L}|^2 = \ell(\ell+1)\hbar^2$$

כאשר משוואה (2) מגבילה

$$|m_\ell| \leq \ell$$

אטום המימן

בפיסיקה הקלאסית, קיבלנו את התוצאה

$$E = \frac{p^2}{2\mu} - \frac{ke^2}{r}$$

כאשר μ היא המסה המצומצמת.

פתרון משוואת שרדינגר במקרה של פוטנציאל מרכזי, כלומר תלוי רק ב r הוא:

$$\Psi_{n,m_\ell,\ell} = R_n \Theta_{\ell,m_\ell} \Phi_{m_\ell}$$

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im_\ell \phi}$$

$$\Theta = \Theta_{\ell,m}(\theta), \quad m_\ell = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \ell, \quad \ell = 0, 1, 2, \dots$$

כאשר $\Theta_{\ell,m}(\theta)$ הם הפולינומים של לז'ונדר.

ואם מגדירים $U \triangleq rR(r)$, מקבלים את המשוואה החד-ממדית היחידה שנותרת לפתור

$$U'' + \frac{2\mu}{\hbar^2} \left(E + \frac{ke^2}{r} - \frac{\ell(\ell+1)\hbar^2}{2\mu r^2} \right) U = 0$$

כאשר $\ell = 0$, מקבלים

$$U'' + \frac{2\mu}{\hbar^2} \left(E + \frac{ke^2}{r} \right) U = 0$$

כאשר r שואף לאינסוף, מקבלים את המשוואה

$$U'' + \frac{2\mu}{\hbar^2} EU = 0$$

ובאטום המימן אנו יודעים שהאנרגיה הכוללת היא שלילית, ולכן נוכל לרשום

$$U'' - \frac{2\mu|E|}{\hbar^2}U = 0$$

והפתרון המתקבל הוא

$$U = Ae^{-\beta r}, \quad \beta \triangleq \frac{\sqrt{2\mu|E|}}{\hbar}$$

וכאשר r שואף לאפס, מקבלים את המשוואה

$$U'' + \frac{2\mu ke^2}{\hbar^2 r}U = 0$$

שנוכל לנחש את פתרונה

$$U = rAe^{\beta r}$$

בסופו של דבר, מקבלים את הפתרון

$$U = r^{\ell+1} P_{n_r}(r) e^{-\beta r}$$

ורמות האנרגיה הן

$$E_n = -\frac{\mu k^2 e^4}{2n^2 \hbar^2}$$

כאשר

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\ell = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

$$m_\ell = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \ell$$

כלומר ישנם $(2\ell+1)$ ערכי m_ℓ עבור ℓ נתון.

ולכן נוכל לחשב את דרגת הניוון:

$$r = \sum_{\ell=0}^{n-1} (2\ell+1) = n^2$$

בהמשך נראה שישנה דרגת חופש אחת נוספת לאלקטרון, שלא משפיעה על אנרגיית האטום בקירוב, ודרגת חופש זו נקראת ספין – תנע זוויתי פנימי של האלקטרון, שמסתובב סביב עצמו, ולכן סה"כ דרגת הניוון של האנרגיה

$$r = 2n^2$$

נחשב את הסיכוי למצוא את האלקטרון בין רדיוס r לרדיוס $r+dr$, בלי תלות בזווית:

$$P(r) = |\psi|^2 dv = |\psi|^2 4\pi r^2 dr \propto R^2 r^2 = U^2$$

$$P(r) \propto r e^{-2\beta r}$$

ניתן לגזור ביטוי זה למציאת נקודת קיצון. מתקבלת הנקודה

$$r = \frac{1}{\beta} = a_0$$

כלומר, רדיוס בוהר.

אפקט זימן הנורמאלי

ראינו שהתנע הזוויתי של חלקיק חייב לקיים

$$|\vec{L}|^2 = \ell(\ell+1)\hbar^2, \quad \ell = 0, 1, 2, \dots$$

והיטל התנע בציר z הוא

$$L_z = m_\ell \hbar, \quad m_\ell = -\ell, -\ell+1, \dots, \ell-1, \ell$$

אפקט זה התגלה ניסיונית לפני תורת הקוונטית:

באפקט זה, בשדה מגנט אחיד (במימדי האטום), כל קו ספקטראלי בתדירות ν_0 מתפצל לשלושה קווים עם תדירויות

$$\nu_0 - \Delta\nu, \quad \nu_0, \quad \nu_0 + \Delta\nu$$

טבעת זרם יוצרת מומנט מגנטי

$$\vec{\mu} = i\vec{A} = i \cdot \pi r^2 \hat{z}$$

הוכחת אפקט זימן בעזרת תורת הקוונטים:

נביט באלקטרון שמקיף את הפרוטון באטום המימן. הזרם הוא

$$i = \frac{(-e)}{2\pi r} v$$

ולכן המומנט המגנטי במקרה זה הוא

$$\vec{\mu} = i\vec{A} = -\frac{e}{2\pi r} v \pi r^2 \hat{z} = -\frac{1}{2} \frac{evr m \hat{z}}{m} = -\frac{e}{2m} \vec{L}$$

נקרא היחס הגירוסקופי. $\frac{e}{2m}$

התוספת באנרגיה של מומנט מגנטי בעקבות שדה מגנטי \vec{B} נתונה ע"י

$$\Delta E = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$$

ולכן אנרגית אטום המימן היא

$$E = \frac{p^2}{2m} - \frac{ke^2}{r} + (-\vec{\mu} \cdot \vec{B}) = \underbrace{\frac{p^2}{2m} - \frac{ke^2}{r}}_{E_0} + \frac{e}{2m} \vec{B} \cdot \vec{L}$$

אם \vec{B} קבוע, נבחר ציר \hat{z} בכיוון \vec{B} . קיבלנו ש

$$E = -\frac{E_0}{n^2} + \frac{e}{2m} B L_z = -\frac{E_0}{n^2} + \frac{e}{2m} B m_\ell \hbar = -\frac{E_0}{n^2} + \frac{e\hbar B}{2m} m_\ell$$

בתורת הקוונטים קיימים "חוקי הברירה לפליטת פוטונים". חוקים אלו רלוונטיים אלינו במקרה זה. מכיוון שלפוטון יש תנע זוויתי (ספין) של 1, מעברים בין רמות אנרגיה באטום, עקב פליטת פוטון, אפשריות רק כאשר ההפרש בתנע הזוויתי הוא

$$\Delta \ell = \ell_i - \ell_f = \pm 1$$

דבר שנובע מחוק שימור התנע הזוויתי. בנוסף, צריך להתקיים

$$\Delta m_\ell = -1, 0, 1$$

נבטא את האנרגיה של הפוטונים

$$h\nu_{if} = E_i - E_f = E_{0,i} - E_{0,f} + \frac{e\hbar B}{2m} (m_{\ell,i} - m_{\ell,f}) = h\nu_0 + \frac{e\hbar B}{2m} \Delta m_\ell$$

ומחוקי הברירה,

$$h\nu_{if} = h\nu_0 + \frac{e\hbar B}{2m} \Delta m_\ell \cdot (-1, 0, 1) \Rightarrow \nu_{if} = \nu_0 + \frac{eB}{4\pi m} \Delta m_\ell \cdot (-1, 0, 1)$$

כלומר קיבלנו שלוש תדירויות:

$$\nu_{if} = \nu_0 - \frac{eB}{4\pi m}$$

$$\nu_{if} = \nu_0$$

$$\nu_{if} = \nu_0 + \frac{eB}{4\pi m}$$

הערה: אפקט זימן הלא נורמאלי מביא בחשבון את הספין של האלקטרון, והוא מסובך יותר.

יחס החילוף

נגדיר את יחס החילוף:

$$[L_x, L_y] \triangleq L_x L_y - L_y L_x$$

דוגמא:

$$[\hat{x}, \hat{p}_x]$$

פתרון:

$$\begin{aligned} [\hat{x}, \hat{p}_x] &= (\hat{x}\hat{p}_x - \hat{p}_x\hat{x})\phi(x) = x\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\phi\right) - \left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}(x\phi)\right) = \\ &= -i\hbar x\frac{\partial}{\partial x}\phi + i\hbar\left(\phi + x\frac{\partial}{\partial x}\phi\right) = i\hbar\phi \end{aligned}$$

כלומר, יחס החילוף $[\hat{x}, \hat{p}_x]$ שונה מ-0, והוא $i\hbar$.

אופרטור התנע הזוויתי:

$$\hat{L} = \hat{r} \times \hat{p} \Rightarrow L_z = -\hbar \frac{\partial}{\partial \phi}$$

מתקבל ש

$$[L_x, L_y] = i\hbar L_z$$

$$[L_y, L_z] = i\hbar L_x$$

$$[L_z, L_x] = i\hbar L_y$$

ומתוך כך ניתן להראות שהתנע הזוויתי יכול לקבל גם ערכים חצי-שלמים, כלומר

$$|\vec{L}|^2 = \ell(\ell+1)\hbar^2, \quad \ell = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$$

$$L_z = m_\ell \hbar, \quad m_\ell = -\ell, -\ell+1, \dots, \ell-1, \ell$$

התנע הזוויתי ה"רגיל" (כתוצאה מתנועתו המעגלית) בטבע מצוי בכמויות שלמות, אך התנע הזוויתי הכולל יכול להיות גם בכמויות חצי-שלמות, בגלל תכונת הספין, תכונה פנימית (אינטרינסיט) של חלקיק.

לאלקטרון, פרוטון וניוטרון יש ספין $\frac{1}{2}$, כלומר מטבעם, לחלקיקים אלו יש תנע זוויתי

$$|\vec{S}|^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)\hbar^2$$

ולכן התנע הזוויתי בכיוון z יהיה

$$S_z = m_s \hbar, \quad m_s = -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$$

לחלקיק עם תנע זוויתי \vec{L} יש מומנט מגנטי

$$\vec{\mu} = \frac{q}{2m} \vec{L}$$

כאשר q מטען החלקיק.

ניתן להראות שמומנט מגנטי זה של אלקטרון, עבור הספין (Spin), הוא

$$\vec{\mu}_s = 2 \frac{-e}{2m} \vec{S}$$

$$\mu_z = 2 \frac{-e}{2m} \hbar m_s$$

הגודל

$$-\frac{e\hbar}{2m_e}$$

נקרא המגנטון של בוהר.

תוספת האנרגיה הפוטנציאלית של מומנט מגנטי היא

$$\Delta E = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$$

בשדה לא אחיד, פועל כוח על המומנט המגנטי

$$F_z = -\frac{\partial V}{\partial z} = \mu_z \cdot \frac{\partial B}{\partial z}$$

שיכול גם להזיז את המומנט, ולא רק לסובב אותו.

ניסוי שטרן-גרלד

בניסוי זה, מעבירים אלומת חלקיקים דרך שדה מגנטי לא אחיד. ראינו שבשדה מגנטי לא אחיד, פועל כוח על החלקיקים:

$$F_z = \mu_z \cdot \frac{\partial B}{\partial z}$$

נעביר בשדה המגנטי אלומת אטומי מימן. המומנט המגנטי שלהם יהיה זה של אלקטרון, משום שהמומנט המגנטי של הפרוטונים, שמתם גדולה פי 2000 בערך, זניח.

מתקבל בניסוי, שאלומת האטומים מתפצלת לשני פיזורים בשתי זוויות ביחס לכיוון המקורי. נרצה לחשב את זווית הפיזור. יחס התנעים ייתן את זווית הפיזור (עבור זוויות קטנות):

$$\tan \theta \sim \theta = \frac{p_z}{p} = \frac{\int F_z dt}{p} = \frac{\int \mu_z \frac{\partial B}{\partial z} dt}{p} = \frac{\mu_z \frac{\partial B}{\partial z} \int dt}{p} = \frac{\mu_z \frac{\partial B}{\partial z} d}{p}$$

כאשר הכוח קבוע, והזמן שלוקח לאלומה לחצות את המגנט הוא d (אורך המגנט, v מהירות האלומה)

נמשיך:

$$\theta = \frac{\mu_z \frac{\partial B}{\partial z} d}{pv} = \frac{\mu_z \frac{\partial B}{\partial z} d}{2E_k} = \frac{2 \frac{-e\hbar}{2m_e} m_s \frac{\partial B}{\partial z} d}{2E_k} = \pm \frac{e\hbar}{2m_e} \frac{\partial B}{\partial z} \frac{d}{2E_k}$$

כי עבור האלקטרון, $m_s = -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$. נחשב את סה"כ ההתפצלות:

$$\Delta\theta = 2|\theta| = 2 \frac{e\hbar}{2m_e} \frac{\partial B}{\partial z} \frac{d}{2E_k} = \frac{e\hbar}{2m_e} \frac{\partial B}{\partial z} \frac{d}{E_k}$$

אם הספין של החלקיקים היה $S = \frac{3}{2}$, היינו מקבלים $m_s = -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$, כלומר ארבע זוויות פיזור.

אטומים מרובי אלקטרונים

עבור חלקיקי בודד, אנרגיית האטום היא

$$E = \frac{p^2}{2m} + V$$

וראינו שמשוואת שרדינגר עבור חלקיקי בודד היא המשוואה הניל, כאשר האנרגיה והתנע נרשמים כאופרטורים:

$$E\psi(\vec{r}_1) = \left(\frac{p^2}{2m} + V \right) \psi(\vec{r}_1)$$

עבור מספר חלקיקים, אנרגיית האטום תהיה

$$E = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} + \dots + V$$

ולכן משוואת שרדינגר במקרה זה היא

$$E\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n) = \left(\frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} + \dots + V \right) \psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n)$$

אם האנרגיה הפוטנציאלית הכוללת היא סכום של אנרגיות

$$V = V_1(\vec{r}_1) + V_2(\vec{r}_2) + \dots + V_n(\vec{r}_n)$$

כלומר הפוטנציאל פריק, אזי נוכל להשתמש בפתרון משוואת שרדינגר לחלקיק בודד ולקבל את הפתרון לאטום מרובה אלקטרונים. כלומר, הפתרון יקיים

$$\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n) = \psi_1(\vec{r}_1) \psi_2(\vec{r}_2) \dots \psi_n(\vec{r}_n)$$

האנרגיה הפוטנציאלית הכוללת באטום כללי היא

$$V = -\frac{kze^2}{r_1} - \frac{kze^2}{r_1} - \dots - \frac{kze^2}{r_n} + \sum_{i \neq j} \frac{ke^2}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}$$

אם נזניח את האינטראקציה בין האלקטרונים, נקבל

$$V \sim \sum_{i=1}^n -\frac{kze^2}{r_i}$$

הפתרונות $\psi_1(\vec{r}_1), \psi_2(\vec{r}_2), \dots, \psi_n(\vec{r}_n)$ יהיה זהים לפתרונות באטומים דמויי-מימן, ויהיו כ"א תלויים בארבעת המספרים הקוונטים n, ℓ, m_ℓ, s , כאשר במקרה של אלקטרונים, $s = \pm \frac{1}{2}$. ולכן הפתרון הכולל יהיה

$$\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n) = \psi_{n_1, \ell_1, m_{\ell_1}, s_1}(\vec{r}_1) \psi_{n_2, \ell_2, m_{\ell_2}, s_2}(\vec{r}_2) \dots \psi_{n_n, \ell_n, m_{\ell_n}, s_n}(\vec{r}_n)$$

אנרגיה של אלקטרון באטום דמוי מימן, כתוצאה ממשוואת שרדינגר:

$$E_{n_e} = -\frac{\mu z^2 k^2 e^4}{2h^2 n_e^2}$$

והאנרגיה במקרה של פוטנציאל פריק של אטום מרובה אלקטרונים

$$E = E_1 + E_2 + \dots + E_{n_e}$$

סימון מקוצר: קונפיגורציה של האטום

$$(n_1, \ell_1)^\alpha (n_2, \ell_2)^\beta \dots$$

כאשר החזקה היא מספר האלקטרונים ברמה המסוימת, כאשר מסמנים את $\ell = 0, 1, 2, 3$ באותיות s, p, d, f בהתאמה.

דוגמאות לקונפיגורציות:

מספרים קוונטים	מצב	אטום
$n = 1, \ell = 0$	1s	H מימן,
	$(1s)^2$	He הליום,
	$(1s)^2 2s$	Li ליתיום,

עיקרון האיסור של פאולי

החלקיקים בטבע מתחלקים לשני סוגים: בעלי ספין שלם (בוזון), ובעלי ספין חצי שלם (פרמיון). עקרון האיסור של פאולי אומר כי שני פרמיונים זהים אינם יכולים להימצא בעת ובעונה אחת באותו מצב קוונטי

כלומר, שני אלקטרונים לא יכולים להימצא במצב קוונטי זהה, כלומר עם אותם מספרים קוונטים n, ℓ, m_ℓ, s .

בניסוח מקביל, העיקרון אומר שפונקציות הגל של שני פרמיונים חייבות להיות אנטי-סימטריות.

פיסיקה גרעינית

בפיזור רתרפורד (שנת 1913) ראינו שהאטומים מכילים גרעינים שסדר הגודל שלו הוא $R_N \sim 10^{-15} [m] = 1 [fm]$, כאשר מימדי האטום הם בסדר גודל של $R_A \sim 10^{-10} [m] = 1 [\text{Å}]$. ראינו שבין החלקיקים בגרעין פועל כוח חשמלי חזק מאוד, ולכן יש צורך בכוח שיאזן כוחות חשמליים אלו, כדי שהגרעין יישאר שלם, ולכן נובע מפיזור רתרפורד כוח חזק, קצר-טווח. הכוחות הגרעיניים מתחלקים לשניים: הכוח החלש והכוח החזק. הכוח החלש הוא זה שאחראי על התפרקות בגרעין האטום, שכוללות דעיכה של נוקליאון (פרוטון או ניוטרון) לנוקליאון אחר. הכוח החזק גורם להתפרקות של הגרעין – אנו נראה שבהתפרקות α , גרעין אחד מתפרק לגרעין קל יותר ולחלקיק α .

החומר רדיום היה היסוד הראשון שהתגלה שפולט שברים גרעיניים בצורה ספונטאנית, ומשם נובע המונח "רדיו אקטיביות". רתרפורד בעצם ניצל את חלקיקי ה- α כדי לגלות את גרעין האטום.

רתרפורד מייך את סוגי השברים שנפלטו מהגרעין, α, β, γ . קרינת α היא המייננת ביותר, כלומר נבלמת באטומי האוויר בצורה מהירה יותר, ולכן קרינת γ היא החדירה ביותר.

חלקיקי α הם גרעין אטום הליום, כלומר



חלקיק β^- הוא בעצם אלקטרון e^- וחלקיק β^+ הוא פוזיטרון e^+ (זהו האנטי-חלקיק של האלקטרון). לכל חלקיקי יסודי בטבע יש אנטי-חלקיק. אנטי-חלקיק הפוך במטענו לחלקיק, ושווה במסתו לחלקיק.

חלקיקי γ הם פוטונים בעלי אנרגיה גבוהה.

לאחר פיתוח תורת הקוונטים, גילו שהגרעינים עשויים משני אבני בניין (נוקליאונים) – פרוטונים וניוטונים. הכוחות הגרעיניים בגרעין בין שני סוגי החלקיקים דומים, ובין הפרוטונים קיים גם כוח חשמלי, בגלל היותם טעונים במטען חשמלי. מטען הניוטון הוא 0.

מסת הניוטונים זהה כמעט למסת הפרוטונים. הספין של שניהם הוא $\frac{1}{2}$. למרות שהניוטון ניטרלי, יש לו מומנט מגנטי, וזה נובע מכך שהניוטון והפרוטון הם לא חלקיקים יסודיים. הניוטון בנוי מחלקיקים אחרים, שתורמים

למומנט המגנטי של הניוטון. הספין של הניוטון הוא $-1.79 \frac{e\hbar}{2m_n}$ כאשר m_n מסת הניוטון ו $\frac{e\hbar}{2m_n}$ המגנטון הגרעיני. כמובן שבד"כ לחלקיקי ניטרלי אין מומנט מגנטי, ולכן מומנט מגנטי זה של הניוטון נקרא מומנט א-נומלי. גם המומנט המגנטי של הפרוטון הוא א-נומלי, מכיוון שגם לפרוטון יש תת-מבנה, והוא לא חלקיק יסודי.

את היסודות בטבע מאפיינים ע"י



כאשר X הוא הסימון הכימי (לדוגמה He), A (מספר המסה) מספר הנוקליאונים ביסוד ו Z מספר הפרוטונים ביסוד. מספר הניוטונים מסומן N . לכן מתקיים $A = Z + N$. ליסודות בעלי אותם תכונות כימיות (אותו מספר פרוטונים שקובע את מטען הגרעין), אך עם מסות שונות קוראים איזוטופים (התכונות הגרעיניות שלהם שונות). לדוגמא:

היסוד 1_1H הוא מימן, והיסוד 2_1H נקרא דיוטריום – יש בו ניוטרון נוסף, ומסומן D . ישנו גם האיזוטופ טריטיום 3_1H .

נעריך את אנרגיית הפרוטונים בגרעין. נניח שהפרוטון נע בבור פוטנציאל חד מימדי בגרעין באורך $10^{-12} [cm]$. קיבלנו תוצאה לאנרגיה בבור כזה, ולכן

$$E_0 = \frac{\pi^2 \hbar^2 n^2}{2m_p L^2} \Big|_{n=1} \cong 10M [eV]$$

אם נניח שרדיוס בסיסי של נוקליאון הוא r_0 , וגרעין מורכב מ A נוקליאונים, נקבל קירוב לנפח הגרעין

$$V = \frac{4}{3} \pi R_N^3 = \frac{4}{3} \pi r_0^3 A$$

כאשר R_N רדיוס הגרעין, ולכן רדיוס הגרעין מקיים

$$R_N = r_0 A^{\frac{1}{3}}$$

כאשר

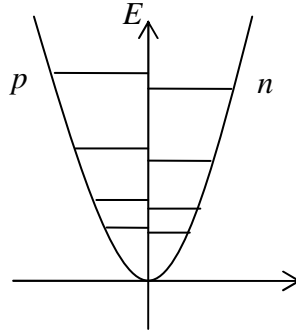
$$r_0 \sim 1.5 [fm]$$

מודל הקליפות של הגרעין - במודל זה, כל ניוקליאון נמצא בבור פוטנציאל תלת-מימדי של אוסילטור הרמוני, פוטנציאל שנוצר ע"י שאר הגרעין. הפרוטונים והניוטרונים הם חלקיקים שונים, ולכן כל אחד מהם בנפרד צריך לקיים את עקרון האיסור של פאולי במילוי קליפות האנרגיה.

דרגת הניוון בפוטנציאל הרמוני, כאשר מתחשבים גם בספין היא

$$r = 2 \frac{(n+1)(n+2)}{2} = (n+1)(n+2)$$

ברמות האנרגיה בגרעין, עבור פרוטונים, נוספת אנרגיית דחיייה חשמלית, כפונקציה של מספרם בגרעין, בשונה מהניוטרונים, ולכן נקבל עבורם רמות אנרגיה מוסטות ביחס לרמות האנרגיה של הניוטרונים.



זמן מחצית החיים

אם כמות האוכלוסייה היא N , והאוכלוסייה רק מצטמצמת, הביטוי לשינוי באוכלוסייה הוא

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N$$

ופתרון משוואה דיפרנציאלית זו הוא

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$$

נסמן את זמן מחצית החיים:

$$T_{1/2} \triangleq t \left(\frac{N(t)}{N_0} = \frac{1}{2} \right)$$

ונחשב אותו

$$\frac{N(t)}{N_0} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{N_0 e^{-\lambda T_{1/2}}}{N_0} = \frac{1}{2} \Rightarrow T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}$$

כלומר, אם האוכלוסייה רק קטנה, וסיבות הדעיכה נשארות קבועות בזמן, אזי זמן הדעיכה של האוכלוסייה למחצית

הוא קבוע והוא $\frac{\ln 2}{\lambda}$.

זמן החיים הממוצע באוכלוסייה הוא

$$\tau \triangleq \langle t \rangle = \frac{\int_0^{\infty} t N(t) dt}{N_0} = \frac{1}{\lambda}$$

כלומר, ניתן לרשום

$$N(t) = N_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

ולכן זמן מחצית החיים הוא

$$T_{1/2} = \tau \ln 2 \sim 0.69 \tau$$

אך הסיבות להתפרקות אוכלוסיית הנוקליאונים בגרעין שונות - התפרקות α , β , γ . נקבל במקרה זה

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda_1 N - \lambda_2 N - \lambda_3 N = -(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) N = -\lambda N$$

$$\frac{1}{\tau} = \frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2} + \frac{1}{\tau_3}$$

התפרקויות גרעיניות

חוקי השימור בהתפרקויות גרעיניות

בהתפרקויות גרעיניות, חייבים להתקיים כל חוקי השימור שאנו מכירים:

- חוק שימור האנרגיה
- חוק שימור התנע הקווי
- חוק שימור התנע הזוויתי הכולל (האורביטאלי, כתוצאה בתנועה מעגלית, והאינטרינסי - ספין)
- חוק שימור המטען

באופן ניסויי, נמדד כי זמן החיים הממוצע של הפרוטון מקיים

$$\tau(p) > 10^{33} [\text{year}]$$

ולכן נשאלת השאלה מדוע לא מתפרק הפרוטון, מכיוון שהתהליך $p \rightarrow e^+ + \gamma$ אפשרי מבחינת חוקי השימור שהכרנו עד כה.

ישנה משפחה רחבה יותר, בריונים, שכוללת את הנוקליאונים. מגדירים עבורם מטען בריוני. התופעה שבה לא נראה תהליך של התפרקות ספונטאנית של פרוטונים גררה לניסוח חוק שימור של המטען הבריוני.

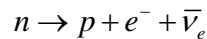
לפרוטונים וניוטרונים מטען בריוני של 1, ולאנטי-חלקיקים המתאימים שלהם יש מטען בריוני של -1.

עם חוק שימור חדש זה, אנו רואים שהתהליך $p \rightarrow e^+ + \gamma$ לא אפשרי, מכיוון שלפוזיטרון ולפוטון אין מטען בריוני, בעוד שלפרוטון יש.

סוגי התפרקויות

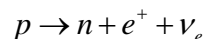
התפרקות β^-

בהתפרקות גרעינית (נקראת גם רדיו-אקטיבית) מסוג β^- , ישנו פרוק של ניוטרון לפרוטון. בתהליך זה נפלט אלקטרון ו"אנטי-ניוטרינו מטיפוס אלקטרון", חלקיק בעל מסה 0 וספין $\frac{1}{2}$. תהליך זה מסומן ע"י



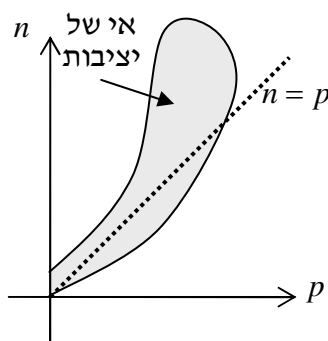
התפרקות β^+

באופן דומה להתפרקות β^- , פרוטון יכול להתפרק לניוטון בגרעין. הפרוטון יפלוט פוזיטרון וחלקיק "ניוטרינו מטיפוס אלקטרון", חלקיק בעל מסה 0 וספין $\frac{1}{2}$. תהליך זה מסומן ע"י



אם קליפה של ניוטרונים לא מלאה, פרוטון יכול להתפרק לניוטון, וההפך לגבי פירוק של ניוטרונים. לכן יכולים הנוקליאונים לאכלס את הקליפות הנמוכות ביותר בגרעין.

במציאות, אנו רואים בטבע שככל שיש יותר פרוטונים בגרעין, העודף של הניוטונים בגרעין הולך וגדל.



אם גרעינים מתפרקים מסיבה כלשהיא, אז הם שואפים להתפרק שוב ושוב עד שיגיעו לאזור אי היציבות.

התפרקות γ

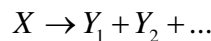
ניוטון שפוגע בגרעין יכול לעורר את הגרעין ע"י הזזה של נוקליאון לרמה גבוהה. כאשר פרוטון יורד ברמת האנרגיה חזרה לרמת היסוד, הוא פולט פוטון בעל אנרגיה ΔE בסדר גודל של MeV. זוהי קרינת γ .

החלקיקים שיעניינו אותנו בפיסיקה הגרעינית מסוכמים בטבלה הבאה

חלקיק	מטען חשמלי	מטען בריוני	מטען לפטוני	מסה	סימון מקובל
פוטון	0	0	0	0	γ
אלקטרון	$-e$	0	-1	m_e	e^-
פוזיטרון אנטי-אלקטרון	$+e$	0	+1	m_e	e^+
נויטרינו	0	0	-1	0	ν או ν_e
אנטי-נויטרינו	0	0	+1	0	$\bar{\nu}$ או $\bar{\nu}_e$
פרוטון	$+e$	+1	0	m_p	p
נויטרון	0	+1	0	m_n	n

אנו רואים שהתהליך שנראה לנו בתחילה אפשרי, $p \rightarrow e^+ + \gamma$, לא ייתכן כי המטען הלפטוני לא נשמר בתהליך זה.

אם נתבונן בתהליך התפרקות של יסוד לתוצרים



אזי מחוק שימור האנרגיה נקבל

$$M_X c^2 = \left(\sum_i M_i c^2 \right) + E_k$$

את האנרגיה הקינטית מסמנים גם Q , ומתקיים

$$Q = \sum m_{\text{initial}} c^2 - \sum m_{\text{final}} c^2$$

ואם $Q > 0$, אזי התהליך יכול לקרות ספונטאנית.

ערך Q מבטא את השוני באנרגיות הקשר בין התוצרים של הריאקציה לגרעין המקורי.

אם בתוצרים הגרעיניים קשורים חזק יותר, אזי $Q > 0$.

סדר גודל של אנרגיות המשתחררות בריאקציות הן של MeV , ומסת הנוקליאונים הן בסדר גודל של GeV , ולכן האנרגיה הקינטית של התוצרים, שהופכת לחום בסופו של דבר, היא לא יחסותית.

באופן כללי, גרעין בעל מסה M , Z פרוטונים ו A נוקליאונים, מתואר ע"י $M(A, Z)$, כאשר $A = Z + N$.

אם מסת הגרעין הינה M , אזי הגודל

$$Mc^2 - Zm_p c^2 - Nm_n c^2$$

הוא שלילי, כי מסת הגרעין קטנה ממסת המרכיבים שלו, כאשר הגרעין קשור באנרגיה פוטנציאלית. הפרש זה הוא אנרגיית הקשר. נגדיר את אנרגיית הקשר הממוצעת לנוקליאון:

$$BE = \frac{-(Mc^2 - Zm_p c^2 - Nm_n c^2)}{A} > 0$$

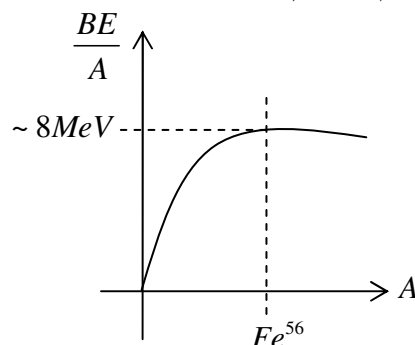
יחידות המסה שנעבוד איתן הן $amu = \text{Atomic Mass Unit}$. יחידה זו כוללת גם את מסת האלקטרונים של האטום.

$$1[amu] = 1[u] = 931.48M[eV]$$

משתמשים גם ביחידה "מסה של יסוד פחמן"

$$M(C^{12}) \cdot c^2 = 12[u]$$

מחקירת אנרגיות הקשר באופן ניסיוני, מתקבל הגרף הבא

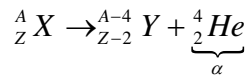


מתברר שאנרגיית הקשר גדלה ככל שישנם יותר נוקליאונים, עד למצב של רוויה ביסוד הברזל, ואז גיאומטרית הגרעין גורמת להחלשות עוצמת הכוח הגרעיני בנוקליאונים הנוספים, והדחייה החשמלית מורידה את אנרגיית הקשר.

גרף זה נחתך עבור $A \sim 258$ כי גרעינים בסדר גודל כזה לא יציבים ומתפרקים מהר מאוד לגרעינים קטנים יותר וקשורים יותר, ולכן לא נמצאים בטבע.

התפרקות α

גרעין מתפרק (Parent) לתוצר (Daughter) ולחלקיק α . כדי שגרעין אב יתפרק, Q צריך להיות חיובי.



כדי לקיים את שימור התנע הקווי,

$$\vec{p}_\alpha + \vec{p}_D = 0$$

כדי לקיים את שימור האנרגיה,

$$\frac{p_\alpha^2}{2m_\alpha} + \frac{p_D^2}{2m_D} = Q$$

משתי משוואות אלו מקבלים

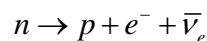
$$E_k^\alpha = \frac{m_D}{m_D + m_\alpha} Q, \quad E_k^D = \frac{m_\alpha}{m_D + m_\alpha} Q$$

אנו רואים שמכיוון ש α הוא החלקיק הקל יותר, הוא יקבל את מרבית האנרגיה תהיה בסוף התהליך אצלו.

התפרקות β^-

פאולי הניח שנפלט חלקיק נוסף בהתפרקות β^- , ניטרينو, שלו אינטראקציה חלשה ביותר עם שאר החלקיקים הנפלטים בתהליך.

התפרקות β^- זוהי התפרקות מהצורה



הפרש המסה בין הניוטרוני הכבד לפרוטון הפחות כבד הוא

$$\Delta m = (m_N - m_P)c^2 = 1.29M [eV]$$

מסת האלקטרון:

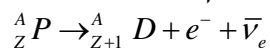
$$m_e c^2 = 0.511M [eV]$$

ולכן נותרנו עם אנרגיה

$$Q = 0.79M [eV]$$

אילו לא היה החלקיק $\bar{\nu}_e$, אזי היינו מקבלים תוצאה דומה להתפרקות α , אך במציאות, האלקטרון והפרוטון לא התקבלו "גב אל גב" (כדי לאפס את התנע הקווי), ולכן מופיע חלקיק נוסף.

התפרקות זו יכולה להתרחש גם בתוך גרעין, ובתהליך זה



כאשר $P = Parent$ ו $D = Daughter$.

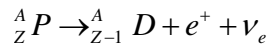
ובתהליך גרעיני כזה, הגורם Q הוא

$$Q = (m(P) - m(D) - m_e)c^2$$

מכיוון שקשה למדוד מסות גרעיניות, מחשבים את הפרשי האנרגיות ע"י שימוש במסות האטומיות. המסה האטומית של D כוללת $Z+1$ אלקטרונים, כלומר אלקטרון אחד נוסף ממש שיש לנו באמת באטום ${}^A_{Z+1} D$, כי הוא נוצר מ

שלו רק Z אלקטרונים, ולכן מקבלים

$$Q = (m_A(P) - [m_A(D) - m_e] - m_e)c^2 = (m_A(P) - m_A(D))c^2$$

התפרקות β^+ זו התפרקות דואלית ל β^- :

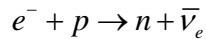
התפרקות זו לא אפשרית באופן ספונטאני, כי מסת הפרוטון גדולה מזו של הניוטרוון, אך התפרקות זו אפשרית בגרעין. בתהליך גרעיני כזה, הגורם Q הוא

$$Q = m(P) - m(D) - m_e$$

או בעזרת מסות אטומיות :

$$Q = (m(P) - [m(D) + m_e] - m_e) c^2 = (m(P) - m(D) - 2m_e) c^2$$

ישנו תהליך נוסף – "לכידה עצמית"



הפרוטון בגרעין "לוכד" אלקטרון מהקליפה של האטום. העלמה כזו של אלקטרון גורמת לחור שנוצר בקליפת האטום להתחיל להתמלא באלקטרונים מהקליפות הגבוהות יותר, תהליך שגורר פליטת פוטונים, שיכולים בעצמם לפגוע באלקטרונים אחרים בחומר ולשחררם מהאטומים. הפליטה הזו כוללת קרינת X, מכיוון שהאטומים שבהם התהליך הזה קורה הם כבדים ולכן האלקטרונים קרובים מאוד לגרעין.

אנרגיית הקשר של הגרעין כולו, כאשר הגרעין הוא טיפת מטען :

$$BE = \alpha A - \beta A^{\frac{2}{3}} - \frac{\gamma Z(Z-1)}{A^{\frac{1}{3}}} - \delta (N-Z)^2$$

ואז אנרגיית הקשר הממוצעת של נוקליאון בגרעין

$$\frac{BE}{A} = \alpha - \beta A^{-\frac{1}{3}} - \frac{\gamma Z(Z-1)}{A^{\frac{4}{3}}} - \frac{\delta (A-2Z)^2}{A}$$

מסה של גרעין כללי היא

$$M = Nm_N + Zm_p - BE$$

ביקוע הגרעין

זהו תהליך שבו גרעין מתפרק לשני חצאים שמסת כל אחד מהם קטנה ממחצית מסת הגרעין המקורי. בתהליך התפרקות זה, נפלטים גם ניוטרונים חופשיים שהיו בעודף בגרעין הכבד, ואלו יכולים לפגוע בגרעין אחד ולבקעו שוב – זהו תהליך תגובת השרשרת.

מצב מוצק

המולקולות (מספר אטומים קשורים) הן היחידות הקטנות ביותר ששומרות על תכונות החומר. אטומים נקשרים למולקולות ע"י כוחות אלקטרוסטטיים בין האלקטרונים לגרעינים.

ערכיות של יסוד היא המינימום בין מספר האלקטרונים בתת-קליפה האחרונה הלא-מלאה, למספר ה"חורים" (מספר האלקטרונים החסרים לתת-קליפה מלאה) בתת-קליפה האחרונה הלא-מלאה.

נביט במולקולה של מלח בישול $NaCl$ (נתרן וכלור) האלקטרונים בנתרן הם בקונפיגורציה

$$(1s)^2 (2s)^2 (2p)(3s)$$

האלקטרונים בכלור הם בקונפיגורציה

$$(1s)^2 (2s)^2 (2p)^6 (3s)^2 (3p)^5$$

לנתרן יש אלקטרון בודד בתת-קליפה $3s$ ולכן ערכיות הנתרן היא 1. לכלור חסר אלקטרון אחד בתת-קליפה $3p$ כדי למלא אותה, ולכן ערכיות הכלור היא גם 1, כי ישנו שם חור אחד.

האלקטרון מהנתרן יעבור לכלור, וכך נקבל יון של נתרן Na^+ ויון של כלור Cl^- , ונקבל את הקונפיגורציות הבאות:

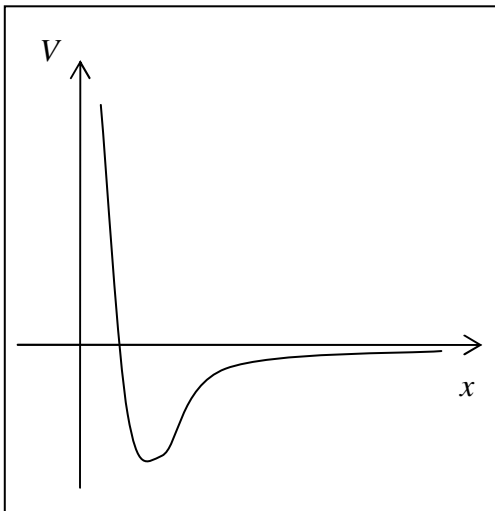
$$(1s)^2 (2s)^2 (2p)$$

האלקטרונים בכלור יהיו בקונפיגורציה

$$(1s)^2 (2s)^2 (2p)^6 (3s)^2 (3p)^6$$

כעת שני היונים הם עם מטענים מנוגדים נטו, ולכן נמשכים זה לזה, ולכן הם קשורים זה לזה בקשר יוני.

האלקטרונים לא "יתאחדו" זה עם זה בגלל עקרון האיסור של פאולי – המצבים הקוונטים בכל אטום בנפרד כבר מלאים.



הפוטנציאל האפקטיבי בקשר יוני הוא מהצורה שמופיעה באיור. נקודת המינימום היא נקודת שיווי משקל יציב, וסביבה מתבצעות תנודות.

קשרים מולקולריים:

1. קשר יוני
2. קשר קוולנטי
3. קשר ואן-דר-ולס
4. קשר מימני
5. קשר מתכתי

חומר אמורפי, ללא צורה, הוא חומר שהאטומים בו לא מסודרים. בחומר בו האטומים מסודרים בנקודות של שריג מתמטי נקרא גביש.

הגדרה לשריג מתמטי:

אם $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ שלשת וקטורי בסיס, שפורשים את \mathbb{R}^3 , ו k_i, ℓ_i, m_i שלושה מספרים שלמים, אז אוסף הנקודות המקיימות

$$\vec{r}_i = k_i \vec{a} + \ell_i \vec{b} + m_i \vec{c}$$

נקרא שריג מתמטי.

הקשר הזה מתאר סידור מרחבי מחזורי של אטומים.

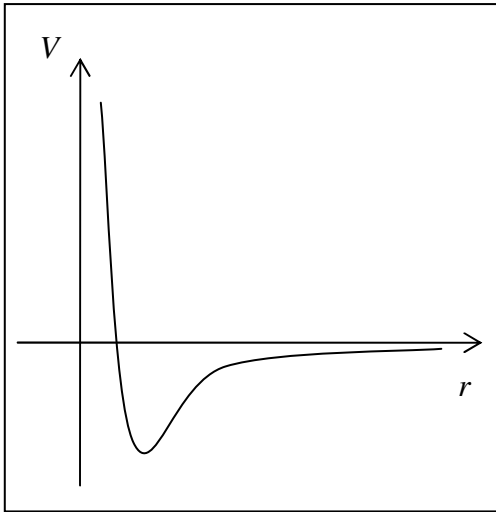
קשר קוולנטי

נביט במולקולת H_2 - שני אטומי מימן, שקשורים בקשר קוולנטי. פונקצית גל אנטי-סימטרית היא

$$\Psi_{Asym}(r_1, r_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_1(r_1)\psi_2(r_2) - \psi_1(r_2)\psi_2(r_1))$$

פונקצית גל סימטרית היא

$$\Psi_{Sym}(r_1, r_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_1(r_1)\psi_2(r_2) + \psi_1(r_2)\psi_2(r_1))$$



ספקטרום מולקולארי

לפוטנציאל בין שני אטומים הצורה שבאיור. סביב נקודת שיווי המשקל, הפוטנציאל ניתן לתיאור ע"י

$$V = \frac{1}{2}k(r - r_0)^2$$

כאשר

$$k = \frac{\partial^2 V}{\partial r^2}$$

ולכן רמות האנרגיה הן

$$E_n = \left(n + \frac{3}{2}\right)\hbar\omega$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

ולכן התדירויות שתפלטנה מפוטנציאל זה:

$$\nu_{if} = (n_i - n_f)\frac{\omega}{2\pi} \triangleq n\nu_0$$

כלומר מספר שלם של תדירות בסיס.

לספקטרום זה קוראים ספקטרום ויברציה של מולקולות דו-אטומיות. מלבד הוויברציה, המולקולה גם מסתובבת סביב ציר המאונך לוקטור המחבר בין שני האטומים. האנרגיה של הסיבוב, כאשר I מומנט האינרציה ו a המרחק בין האטומים:

$$E_r = \frac{1}{2} \frac{L^2}{I} = \frac{1}{2} \frac{L^2}{\mu a^2}$$

אם המרחק בין האטומים גדול מאוד ביחס לתנודות שלהם, ניתן לומר ש a קבוע, ולכן I קבוע. התנע הזוויתי בתורת הקוונטים:

$$L^2 = \ell(\ell+1)\hbar^2$$

ולכן

$$E_r = \frac{1}{2} \frac{\ell(\ell+1)\hbar^2}{\mu a^2}$$

וכך האנרגיה הכוללת של מולקולה דו-אטומית היא

$$E = E_n + E_r = \left(n + \frac{3}{2}\right)\hbar\omega + \frac{1}{2} \frac{\ell(\ell+1)\hbar^2}{\mu a^2}$$

פליטת הפוטונים עקב שינוי באנרגיה הסיבובית היא

$$\Delta E = h\nu_{if} = \frac{(\ell_i(\ell_i+1) - \ell_f(\ell_f+1))\hbar^2}{2\mu a^2}$$

ולכן גם כאן פליטת הפוטונים היא במספר שלם של תדירות בסיס.

מתכת כגז אלקטרוני קלאסי

חום סגולי של מתכות

מתכת היא אוסף של אטומים שאלקטרוני הערכיות שלהם משותפים לאוסף של אטומי המתכת. מבחינה קלאסית, מתקיימות התכונות הבאות:

1. לכל דרגת חופש של חלקיקים בגז, יש אנרגיה ממוצעת $\bar{E} = \frac{1}{2}kT$, כאשר k קבוע בולצמן

לדוגמא, עבור אטומים שיכולים לנוע בשלושה מימדים, יש אנרגיה ממוצעת של $\bar{E} = \frac{3}{2}kT$

2. הלחץ של גז הוא $P = \left. \frac{\partial E}{\partial V} \right|_T = n_a kT$, כאשר n_a היא צפיפות האטומים.

3. כמות החלקיקים בעלי אנרגיה בתחום $[E, E + dE]$ פרופורציוני ל $e^{-\frac{E}{kT}}$

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8kt}{\pi m}} : \text{המהירות הממוצעת בגז}$$

נניח שהמתכת הם גז של אלקטרונים.
האנרגיה הממוצעת של אטום היא

$$\bar{E} = \frac{3}{2}kT + \frac{3}{2}kT = 3kT$$

שמקורה באנרגיית האלקטרון ובאנרגיית הוויברציה של האטום.
האנרגיה הכוללת של אטום היא

$$E = n_a \bar{E} = 3n_a kT = 3kT \frac{N_A \rho}{M} \stackrel{R \hat{=} kN_A}{=} 3 \frac{\rho}{M} RT$$

כאשר ρ מסה בגרמים ו M כמות המולים.
החום הסגולי מוגדר:

$$c_v \triangleq \frac{\partial E}{\partial T}$$

ולכן החום הסגולי של מתכת:

$$c_v = \frac{\partial E}{\partial T} = 3 \frac{\rho}{M} R$$

אם ניקח מול אחד של חומר, החום הסגולי שלו הוא

$$c_v = \frac{\partial E}{\partial T} = 3R$$

מתברר שבמציאות, התוצאות הקלאסיות הללו לא נכונות.

הולכה חשמלית

נביט בתיל מוליך ששטח החתך שלו הוא A .
מהגדרת הזרם:

$$I \triangleq \frac{dQ}{dt} = \frac{v_d \cdot dt \cdot A \cdot n_e}{dt} = Av_d n_e$$

ולפי חוק אוהם

$$I = \frac{V}{R} = \frac{E \cdot \ell}{\rho \frac{\ell}{A}} = \frac{E}{\rho} A$$

ולכן

$$\frac{E}{\rho} A = Av_d n_e \Rightarrow \rho = \frac{E}{v_d n_e}$$

נרצה לדעת מהירות הסחיפה v_d שמקנה השדה החשמלי.
בעזרת קינמאטיקה נקבל

$$v_d = \frac{e\vec{E}}{m_e} \tau$$

כאשר τ הוא הזמן הממוצע בין התנגשויות במתכת. נעריך את הזמן הזה ע"פ המרחק הממוצע שעובר האלקטרון בין ההתנגשויות. המרחק הממוצע הזה נקרא "המהלך החופשי" והוא מסומן λ .

נביט באלומת חלקיקים I [electrons/m²] שפוגעת באטומים (או מכשולים אחרים). נסמן את השטח של כל מכשול כזה ב

σ . כאשר האלומה מתקדמת מרחק dx , ויש לנו n_a מכשולים ליחידת שטח, אז הזרם פוחת כך:

$$dI = -I \sigma n_a dx$$

פתרון המשוואה

$$I(x) = I_0 e^{-\sigma n_a x}$$

נוכל לחשב את המהלך החופשי – המרחק הממוצע בין ההתנגשויות:

$$\lambda = \langle x \rangle = \frac{\int x \frac{dI}{dx} dx}{I_0} = \frac{1}{n_a \sigma}$$

מתברר שגם במקרה המוליכות החשמלית, התוצאות הקלאסיות שמסתמכות על מודל של גז אלקטרוניים אינן מתיישבת עם המציאות.