מד"ח תרגול

מתרגל: דפנה זליג

22 בספטמבר 2004

$Id: partial_diff_eq_tirgul.lyx,v 1.15 2004/09/22 13:46:36 itay Exp $

תוכן עניינים

1 משוואות דיפ' מסדר ראשון

1.1 דוגמאות למשוואות דיפרנציאליות פשוטות

1. $m_x = 0$ אז $m = m(x,y) \Rightarrow m = f(y)$
2. נפתור

$$\begin{aligned} m_x + m &= 0 \Rightarrow \frac{dM}{dx} = -M \Rightarrow \int \frac{dM}{-M} = \int dx \\ &\Rightarrow -\ln M = x + x \Rightarrow M = c(y)e^{-x} \end{aligned}$$

3. $\begin{cases} M_x + 2yM = y^2M \\ M(o,y) = y - \frac{1}{4} \end{cases}$ אם המשוואה היתה $y' + p(x)y = q(x)$ אז היינו מגדירים גורם אינטגרציה $k(x) = e^{\int_0^x p(x)dx}$ ואז

$$k(x)y' = p(x)k(x)y = k(x)q(x) = (k(x)y)'$$

למקרה שלנו, גורם האינטגרציה יהיה $k(x,y) = e^{\int_0^x 2ydx} = e^{2yx}$ נכפיל את המש-וואה

$$\begin{aligned} e^{2yx}M_x + 2ye^{2yx}M &= y^2xe^{2yx} \\ (e^{2yx}M)x &= y^2xe^{2yx} \end{aligned}$$

נעשה אינטגרציה $e^{2yx}M = \int y^2xe^{2yx}dx = \frac{e^{2yx}}{4}(2yx-1) + f(y)$ ולכן הפטרון הכללי הוא $M(x,y) = \frac{1}{4}(2xy-1) + f(y)e^{-2yx}$
תנאי התחלה $M(0,y) = y - \frac{1}{4} = -\frac{1}{4} + f(y) \Rightarrow f(y) = y$ ולכן

$$M(x,y) = \frac{1}{4}(2yx-1) + ye^{-2yx}$$

4. $u_{xx} = 0$ ולכן $u_x = f(y)$ ולכן $u = \int f(y)dx = f(y)x + g(y)$
5. $u_{xy} = 0 \Rightarrow u_x = f(x), u = \int f(x)dx = F(x) + G(y)$
6. $u_{xx} + u_x = 0$ נציב $v = u_x$ ואז נקבל $v + v_x = 0$ את זה פתרנו ב-2 וקיבלנו ש

$$\begin{aligned} v(x,y) &= f(y)e^{-x} \Rightarrow u_x = f(y)e^{-x} \\ \Rightarrow u &= \int f(y)e^{-x}dx = -f(y)e^{-x} + g(y) \end{aligned}$$

7. $u_{xx} + u_x - 2u = 0$ הפ"א (לפי מד"ר) $p(x) = s^2 + s - 2, s_{1,2} = 1, -2$ הפתרונות הבת"ל למשוואה תהיה $sp\{e^x, e^{-2x}\}$ ולכן $u(x,y) = f(y)e^x + g(y)e^{-2x}$
8. $u_{xy} + u_x = 0$ נציב $v = u_x$ ואז המשוואה היא $v_y + v = 0$ לכן

$$u_x(x,y) = v(x,y) = c(x)e^{-y}$$

לכן $u = \int u_x dx = \int c(x)e^{-y}dx = f(x)e^{-y} + g(y)$

9. $u_{xy} + u_x + u_y + u = 0$ נציב $v = u_x + u$ ואז המשוואה

$$v_y + v = 0 \Rightarrow v = f(x)e^{-y} \Rightarrow u_x + u = f(x)e^{-y}$$

ואז פותרים כמו מקודם ומקבלים:

$$u(x,y) = f(x)e^{-y} + \widetilde{g(y)}e^{y-x} = f(x)e^{-y} + g(y)e^{-x}$$

1.2 החלפת משתנים

דוגמא $u_x + 2u_y + u = 0$ "ננחש" $s = 2x - y, t = x$ נגדיר $v(s,t) = u(x,y)$ ולפי כלל השרשרת $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x} = 2v_S + v_t, \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial y} = -v_s$ נחזור למשווה

$$\begin{aligned} 2v_s + v_t - 2v_s + v &= 0 \Rightarrow v_t + v = 0 \Rightarrow \\ v(s,t) &= f(s)e^{-t} \Rightarrow u(x,y) = f(2x-y)e^{-x} \end{aligned}$$

דוגמא הוכח שהמשוואה $u_{xx} + u_{yy} = 0$ בקורדינטות קרטזיות שקולה למשוואה $r^2 v_{rr} + rv_r + v_{\theta\theta} = 0$ בקורדינטות קוטביות $(x = r\cos\theta, y = r\sin\theta)$

פתרון נגדיר $u(x,y) = v(r,\theta)$

1. $\theta_r = u_x x_r + u_y y_r = u_x \cos\theta + u_y \sin\theta$
2.

$$\begin{aligned} \theta_{rr} &= (u_{xx}x_r + u_{xy}y_r)x_r + u_x x_{rr} + (u_{xx}x_r + u_{xy}y_r)y_r + u_x y_{rr} \\ &= u_{xx}\cos^2\theta + u_{xy}\cos\theta\sin\theta + u_x 0 + u_{yx}\sin\theta\cos\theta + u_{yy}\sin^2\theta \\ \Rightarrow r^2 u_{rr} &= u_{xx}x^2 + 2u_{xy} + u_{yy}y^2 \end{aligned}$$

3. $v_{\theta\theta} = u_{xx}y^2 + u_{yy}x^2 - yu_y - xu_x - 2yxu_{xy}$ ומכאן

$$\begin{aligned} r^2 v_{rr} + rv_r + v_{\theta\theta} &= 0 \\ &= (u_{xx}x^2 + 2u_{xy}xy + u_{yy}y^2) + (u_x x + u_y y) \\ &+ (u_{xx}y^2 + u_{yy}x^2 - yu_y - xu_x - 2yxu_{xy}) \\ &= (u_x x^2 + u_{yy}y^2) \end{aligned}$$

1.3 משוואה לינארית/קוואזי-לינארית

משוואה לינארית מסדר 1 היא משוואה מהצורה

$$a(x,y)u_x + b(x,y)u_y = d(x,y)u + e(x,y) = c(x,y,u)$$

משוואה קוואזי-לינארית היא משוואה ש a, b, c לא תלויים ב- u_x, u_y אבל עשויים להיות תלויים ב x, y, z בצורה לא לינארית

הפתרון של המשוואה הוא המשטח $u(x,y)$ לפעמים קורים ל- $u(x,y)$ "משטח אינטגרלי". המשוואה המקורית ניתנת לכתיבה בצורה הוקטורית

$$(a,b,c)\cdot(u_x, u_y, -1) = 0$$

לכן $(u_x, u_y, -1)$הוא הנורמל ל (a,b,c) ולכן נורמל ל $u(x,y)$. מכאן המשטח עצמו מקביל בכל נק' ל-(a,b,c).
נתפור את המשטח האינטגלי מאוסף קווים המקבילים בכל נק' ל-(a,b,c)

הגדרה הקווים האופייניים הם קווים המקבילים בכל נק' ל (a,b,c)
על הקווים האופייניים מתקיים $\frac{dx}{dt} = a, \frac{dy}{dt} = b$ וגם

$$\frac{du}{dt} = \frac{du}{dx}\frac{dx}{dt} + \frac{du}{dy}\frac{dy}{dt} = \frac{du}{dx}a + \frac{du}{dy}b$$

לכן $\{x(t), y(t), u(t)\}$ זה הפרמטריזציה של הקווים האופייניים

דוגמא פתור $\begin{cases} u_x+3u_y=-u \\ u(x,x)=x \end{cases}$

1. משוואות הקווים האופייניים:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= 1 \Rightarrow \int dx = \int dt \Rightarrow x=t+c_1 \\ \frac{dy}{dt} &= 3 \Rightarrow \int dy = 3\int dt \Rightarrow y=3t+c_2 \\ \frac{du}{dt} &= -u \Rightarrow \int \frac{du}{u} = \int -dt \Rightarrow lnu=-t+c_3 \Rightarrow u=c_3e^{-t}\end{aligned}$$

2. נעשה פרמטריזציה לעקום הנתון: $\begin{matrix} x=s \\ y=s \\ u=s \end{matrix}$

3. תפירה ב $t=0$ בין הקווים האופייניים לקו הנתון ב-$t=0$:

$$\begin{aligned} x &= c_1=s \\ y &= c_2=s \\ u &= c_3=s \\ \Rightarrow x &= t+s \\ y &= 2t+s \\ u &= se^{-t}\end{aligned}$$

4. נחלץ:

$$\begin{aligned} t &= \frac{-x+y}{2} \\ s &= \frac{3x-y}{2} \\ \Rightarrow u &= e^{\frac{(x-y)}{2}}(\frac{3x-y}{2})\end{aligned}$$

דוגמא מצא פתרון u למשוואה $\frac{u_x}{x^2}+\frac{u_y}{y^2}=x^3y^3$ המקיים שעל הקו $y=1-x, u=1$

פתרון

1. משוואות הקווים האופייניים:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \frac{1}{x^2} \Rightarrow \int x^2dx = \int dt \Rightarrow x^3=3t+c_1 \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{1}{y^2} \Rightarrow y^3=3t+c_2 \\ \frac{du}{dt} &= x^3y^3=(3t+c_1)(3t+c_2) \\ \Rightarrow u &= \int (3t+c_1)(3t+c_2)dt \\ &= 3t^2+\frac{3t^2}{2}(c_1+c_2)+c_1c_2t+c_3 \\ \Rightarrow x &= (3t+c_1)^{1/3} \\ y &= (3t+c_2)^{1/3} \\ u &= 3t^2+\frac{3t^2}{2}(c_1+c_2)+c_1c_2t+c_3\end{aligned}$$

2. פרמטריזציה לקו הנתון $\begin{array}{c} x=s \\ y=1-s \\ u=1 \end{array}$

3. תפירה ב $t=0$ בין הקווים האופייניים לקו הנתון:

$$\begin{aligned}
x &= c_1^{1/3}=s\\
y &= c_2^{1/3}=1-s\\
u &= c_3=1\\
\Rightarrow x &= (3t+s^3)^{1/3}\\
y &= (3t+(1-s)^3)^{1/3}\\
u &= 3t^2+\frac{3t^2}{2}(s^3+(1-s)^3)+s^3(1-s)^3t+1
\end{aligned}$$

תנאי הטרנסוורסליות (יחידות הפתרון) אם $\begin{vmatrix} a & b \\ x_s & y_s \end{vmatrix} \neq 0$ אז יש פתרון יחיד. אחרת או שיש אין סוף פתרונות או שאין פתרון.

דוגמא בתרגיל הקודם $\begin{vmatrix} a & b \\ x_s & y_s \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{x^2} & \frac{1}{y^2} \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2} \neq 0$ ולכן יש פתרון יחיד

דוגמא ממבחן נתונה המשוואה $u_x+2u_y+u=1$ עם תנאי התחלה $u(x,x^2)=e^{-x}$.

1. פתור את המשוואה בתחום $x>1$
2. האם קיים פתרון יחיד בסביבת עקום ההתחלה עבור $-\infty<x<\infty$

פתרון

1. נפתור

- נסדר מחדש את המשוואה $u_x+2u_y=1-u$ אז משוואות הקווים האופייניים:

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= 1 \Rightarrow \int dx=\int dt \Rightarrow x=t+c_1\\
\frac{dy}{dt} &= 2 \Rightarrow \int dy=2\int dt \Rightarrow y=2t+c_2\\
\frac{du}{dt} &= 1-u \Rightarrow \int \frac{du}{u-1}=-\int dt \Rightarrow \ln(u-1)=-t+c_3 \Rightarrow u-1=c_3e^{-t} \Rightarrow u=1+c_3e^{-t}
\end{aligned}$$

- פרמטריזציה לקו נתון $\left\{\begin{array}{c} x=s \\ y=s^2 \\ u=e^{-s} \end{array}\right\}$ עבור $t=0$:

$$\begin{aligned}
x(t=0) &= c_1=s\\
y(t=0) &= c_2=s^2\\
u(t=0) &= 1+c_3=e^{-s} \Rightarrow c_3=e^{-s}-1\\
\Rightarrow x &= t+s\\
y &= 2t+s^2\\
u &= 1+(e^{-s}-1)e^{-t}
\end{aligned}$$

• נחלץ:

$$
\begin{aligned}
s^2-2s+2x-y &= 0\\
s_{1,2} &= \frac{2\pm\sqrt{4-4(2x-y)}}{2}=1\pm\sqrt{1-2x+y},(x>1)\Rightarrow s=1\pm\sqrt{1-2x+y}\\
y &\geq 2x-1\\
t &= x-s=x-1\mp\sqrt{1-2x+y}\\
u &= 1+(e^{-1\mp\sqrt{1-2x+y}}-1)e^{-x+1\pm\sqrt{1-2x+y}}=1+e^{-x}(1-e^{1+\sqrt{1-2x+y}})
\end{aligned}
$$

2. $J=\begin{vmatrix} a & b\\ x_s & y_s\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 2\\ 1 & 2s\end{vmatrix}=2s-2=2(\pm\sqrt{1-2x+y})$ לכן תנאי הטרנסורסליות מתקיים לכל $x=s\neq 1$ שם היא לא גזירה. אזי משפט הקו"י לבעיית קושי מבטיח קיום בסביבת ההתחלה בתנאי שמתקיים תנאי הטרנסברסליות התנאי לא מתקיים ב $(1,1)$ עבור $s<1\vee s>1$ מקבלים פתרון יחיד. u לא גזירה ב $(1,1)$ ולכן לא קיים פתרון בסביבת $-\infty<x<\infty$

1.3.1 קו"י של פתרונות למשוואות קוואזי-לינאריות/לינאריות

הגדרה אם $au_x+bu_y=c$ ו-$(x(s),y(s),u(s))$ היא פרמטריזציה לקו הנתון, אז אפשר לבדוק קו"י בסביבת העקום הנתון ע"י

1. אם $\Delta=\begin{vmatrix} a & b\\ x_s & y_s\end{vmatrix}\neq 0$ אז יש פתרון יחיד
2. אם $\Delta=\begin{vmatrix} a & b\\ x_s & y_s\end{vmatrix}=0$ יש אין סוף פתרונות או אין פתרונות
   (א) אם $\tilde{\Delta}=\begin{vmatrix} a & c\\ x_s & u_s\end{vmatrix}\neq 0$ אין אף פתרון
   (ב) אם $\tilde{\Delta}=\begin{vmatrix} a & c\\ x_s & u_s\end{vmatrix}=0$ יש אין סוף פתרונות

נסתכל על $\tilde{\tilde{\Delta}}=\begin{vmatrix} b & c\\ y_s & u_s\end{vmatrix}$ אם $\Delta=0$ אז $ay_s=bx_s$, אם $\tilde{\Delta}=0$ אז $au_s=cx_s$ לכן

$$
\begin{aligned}
\frac{y_s}{u_s} &= \frac{b}{c}\\
\Rightarrow cy_s &= bu_s
\end{aligned}
$$

דוגמא נתונה המשווה $u_x+uu_y=-\frac{u}{2}$

1. מצא את הקווים האופייניים
2. נמק יחידות של (1) המכיל את העקום

$$\gamma_1=\{(0,s,\sin s)|-\infty<s<\infty\}$$

3. מצא את s_2, המשטח האינטגרלי של (1) המכיל את

$$\gamma_2=\{(s,0,0)|-\infty<s<\infty\}$$

4. האם קיים משטח אינטגרלי יחיד העובר דרך $(0,0,s)$?

פתרון

(א) הקווים האופייניים

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= 1 \Rightarrow x = t + c_1 \\
\frac{dy}{dt} &= u = c_2 e^{-\frac{t}{2}} \Rightarrow y = -2c_2 e^{-\frac{t}{2}} + c_3 \\
\frac{du}{dt} &= -\frac{u}{2} \Rightarrow \ln u = -\frac{t}{2} + \tilde{c_2} \Rightarrow u = c_2 e^{-\frac{t}{2}}
\end{aligned}$$

(ב) נבדוק יעקוביין $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ x_s & y_s \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ לכן יש פתרון בסביבת העקום והוא יחיד
נמצא פתרון ב $t=0$:

$$\begin{aligned}
x &= c_1 = 0 \Rightarrow x = t \\
y &= -2c_2 + c_3 = s \Rightarrow y = -2u + s + 2\sin s \\
u &= c_2 = \sin s \Rightarrow u = \sin s e^{-\frac{t}{2}} = \sin s e^{-\frac{x}{2}} \\
\Rightarrow s &= \arcsin(ue^{\frac{x}{2}}), t = x \\
y &= -2u + \arcsin(ue^{\frac{x}{2}}) + 2ue^{\frac{x}{2}}
\end{aligned}$$

(ג) נתון $\gamma_2 = (s,0,0)$ ואז $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ x_s & y_s \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & u \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -u$ לכן על קו ההתחלה $\Delta = 0$ לכן יש או אין סוף פתרונות או אין פתרון. לכן נבדוק את היעקובין השני $\tilde{\Delta} = \begin{vmatrix} a & c \\ x_s & u_s \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -\frac{u}{2} \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$ לכן יש אין סוף פתרונות.
ננסה למצוא פתרון בדרך הרגילה ב $t=0$

$$\begin{aligned}
x &= c_1 = s \\
y &= -2c_2 + c_3 = 0 \\
u &= c_2 = 0 \\
x &= t + s \\
y &= 0 \\
u &= 0
\end{aligned}$$

לכן קיבלנו פרמטריזציה של קו לעקום ההתחלה. אז יש שני דרכים

i. לנחש פתרון לדוגמא $u=0$ הוא פתרון

ii. לקחת עקום אחר שעליו יש פתרון יחיד שחותך את γ_2 היות ו γ_2 מקביל לקווים האופייניים כל פתרון שיחתוך אותו יכיל אותו.

אבל γ_1 חותך את γ_2 ולכן הפתרון הראשון מתאים.

(ד) מתקיים $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ x_s & y_s \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & u \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$ נבדוק את היעקובין השני $\tilde{\Delta} = \begin{vmatrix} a & c \\ x_s & u_s \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$ ולכן אין פתרון.

1.4 פתרונות "מעניינים"

1. פתרון המשוואה הקוואזי-ליניארית $\begin{cases} (u-x+y)u_x+(u+x-y)u_y+u=x+y \\ u(x,2x)=-2x \end{cases}$

פתרון

(א) המערכת האופייניים

$$\begin{aligned} x_t &= u-x+y && (1) \\ y_t &= u+x-y && (2) \\ u_t &= x+y-u && (3) \\ (1)+(2)+(3)\ (x+y+u)_t &= u+x+y \\ (2)-(1)\ (y-x)_t &= -2(y-x) \\ (3)-(1)\ (u-x)_t &= -2(u-x) \\ z_t &= z \Rightarrow z=ce^t \\ \Rightarrow x+y+u &= c_1e^t \\ y-x &= c_2e^{-2t} \\ u-x &= c_3e^{-2t} \end{aligned}$$

(ב) נבצע פרמטריזציה $\begin{matrix} x=s \\ y=2s \\ u=-2s \end{matrix}$ נתפור ב $t=0$:

$$\begin{aligned} s+2s-2s &= c_1 \Rightarrow c_1=s \\ 2s-s &= c_2 \Rightarrow c_2=s \\ -2s-s &= c_3 \Rightarrow c_3=-3s \end{aligned}$$

(ג) אחר שמציבים את c_1,c_2,c_3 מקבלים

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{3}\left\{se^t+2se^{-2t}\right\} \\ y &= \frac{1}{3}\left\{se^t+5se^{-2t}\right\} \\ u &= \frac{1}{3}\left\{se^t-7se^{-2t}\right\} \\ x-y &= -se^{-2t} \\ 2y-5x &= \frac{2}{3}se^t-\frac{5}{3}se^t=-se^t \\ \Rightarrow u &= \frac{1}{3}\left\{5x-2y+7(x-y)\right\}=4x-3y \end{aligned}$$

2. מצא את הקווים האופייניים של המשוואה

$$(x-y)u_x+(x+y)u_y = \frac{y}{x}u, x>0$$

פתרון בדרך אחת

(א) משוואות הקווים האופייניים

$$\begin{aligned} x_t &= x-y & (4)\\ y_t &= x+y & (5)\\ u_t &= \frac{y}{x}u & (6)\end{aligned}$$

(ב) המשוואות המתקבלות מוצמדות. את 2 הראשונות נפתור ע"י גזירת (4):

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{d}{dt}(x-y)=\frac{dx}{dt}-\frac{dy}{dt}\\ (5)\Rightarrow &= \frac{dx}{dt}-(x+y)=\frac{dx}{dt}-x+\frac{dx}{dt}-x=2\frac{dx}{dt}-2x\end{aligned}$$

כלומר קיבלנו

$$\frac{d^2x}{dt^2}-2\frac{dx}{dt}+2x = 0$$

אז הפ"א

$$r^2-2r+2=0, r_{1,2}=1\pm i\Rightarrow e^t(c_1\sin t+c_2\cos t)$$

צורת כתיבה זאת שקולה לצורה

$$\begin{aligned} x(t) &= ce^t\cos(t+\alpha),\{\alpha,c=const\}\\ &= ce^t(\cos t\cos\alpha-\sin t\sin\alpha), c_1=c\cos\alpha, c_2=-c\sin\alpha\end{aligned}$$

נכתוב את המשוואה בצורה הנ"ל

$$\begin{aligned} y(t) &= x-\frac{dx}{dt}\\ &= ce^t\cos(t+\alpha)-\left[ce^t\cos(t+\alpha)-ce^t\sin(t+\alpha)\right]\\ &= ce^t\sin(t+\alpha)\\ \Rightarrow x(t) &= ce^t\cos(t+\alpha)\\ y(t) &= ce^t\sin(t+\alpha)\\ \Rightarrow u_t &= \tan(t+\alpha)u\Rightarrow \ln u=-\ln(\cos(t+\alpha))+\tilde{d}\\ \Rightarrow u &= \frac{d}{\cos(t+\alpha)}\end{aligned}$$

פתרון בדרך שניה(חלקי)

(א) נקבל לפי כלל השרשרת

$$\begin{aligned} y_x &= \frac{y_t}{x_t}=\frac{x+y}{x-y}\\ &= \frac{1+\frac{y}{x}}{1-\frac{y}{x}}\end{aligned}$$

(ב) נחליף משתנים נגדיר

$$w=\frac{y}{x}, y=xw$$

אז יוצא ש $y_x=w+xw_x=\frac{1+w}{1-w}$ קיבלנו ש

$$\begin{aligned} xw_x &= \frac{1+w}{1-w}-w=\frac{1+w^2}{1-w} \\ \int\frac{dx}{x} &= \int\frac{1-w}{1+w^2}dw \end{aligned}$$

(ג) וכך נחלץ פתרון...

נבדוק את היעקוביין

$$\begin{vmatrix} a & b \\ \tilde{x_s} & \tilde{y_s} \end{vmatrix} = a\tilde{y_s}-b\tilde{x_s}=0$$
$$a=\tfrac{dx}{dt}, b=\tfrac{dy}{dt}$$
$$\tfrac{b}{a}=\tfrac{\tilde{y_s}}{\tilde{x_s}}=\tfrac{dy}{dx}=\tfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\tfrac{d\tilde{y}}{d\tilde{x}}$$

עוד תרגילים מעניינים

1. תרגיל

(א) הוכח שהקווים האופייניים של המשוואה

$$(y-u)u_x+(u-x)u_y = x-y$$

נמצאים בחיתוך המישור $x+y+u=c$ עם כדור $x^2+y^2+u^2=R^2$

(ב) כיצד נקבע הקשר בין c ל-r?

(ג) מצא פתרון לתנאים

i. $u(x,x)=-2x$

ii. $u(x,x)=4x$

פתרון

(א) הקווים האופייניים

$$\begin{aligned} x_t &= y-u \\ y_t &= u-x \\ u_t &= x-y \\ (x+y+u)_t &= 0 \\ (x^2+y^2+u^2)_t &= 2xx_t+2yy_t+2uu_t \\ &= 2x(y-u)+2y(u-x)+2u(x-y)=0 \end{aligned}$$

לכן הקווים האופייניים נמצאים בחיתוך המישור $x+y+u=c$ עם פני הכדור $x^2+y^2+u^2=R^2$

(ב) יחס הקשר בין c ל- R נקבע לפי תנאי ההתחלה. כלומר מהצורה $R=\varphi(c)$ או $c=\psi(R)$.

(ג) נפתור

i. היחס מתקבל $x+y+u=\sqrt{x^2+y^2+u^2}$. נציב לפי תנאי התחלה $x+x-2x=\sqrt{x^2+x^2+4x^2}$ לכם $\psi(z)=0$ לכל z אי-שלילי. ולכן $C=\psi(R)=0$ ו

$$x+y+u=0 \quad \Rightarrow \quad u=-(x+y)$$

ii. נשתמש ההצגה בהצגה $R=\varphi(c)$ אז מתקבל

$$\begin{aligned}
\sqrt{x^2+x^2+16x^2} &= \varphi(x+x+4x) \\
3\sqrt{2}\,|z| &= \varphi(z) \\
\Rightarrow (x^2+y^2+u^2) &= \frac{(x+y+u)^2}{2} \\
\Rightarrow u^2-2(x+y)u+(x-y)^2 &= 0 \\
u_{1,2} &= x+y\pm 2\sqrt{xy}
\end{aligned}$$

בשביל שהתנאי $u(x,x)=4x$ יתקיים הרביע הראשון יש לבחור את הפתרון אם $+$ לכדי שיתקיים הרביע השלישי יש לבחור את הפתרון אם $-$. שני הרביעים האחרים הדיסקרימיננטה לא חיובית.

2. תרגיל. תהא $u(x,t)$ פתרון לבעיית קושי

$$\begin{aligned}
u_t+cu_x+u^2 &= 0 \\
u(x,0) &= 0
\end{aligned}$$

כאשר c קבוע, t מסמן זמן ו-x מרחק

(א) מצא את הפתרון

(ב) צופה יוצא בזמן $t=0$ מ-x_0 ונע בכיוון החיובי של ציר ה-x במהירות c,כלומר, הוא נע כך שה $x-ct$ קבוע עבורו הוכיחו שאם $x_0>0$ אז הפתרון עבורו אותו צופה שואף לס כש $t\to\infty$.

(ג) מה קורה אם $x_0<0$ ו- $x_0=0$

פתרון

(א) משוואות הקווים האופייניים

$$\begin{aligned}
x_t &= c \Rightarrow x=c\tau+c_2 \\
t_t &= 1 \Rightarrow y=t=\tau+c_1 \\
u_t &= -u^2 \Rightarrow \int\frac{du}{u^2}=-\int d\tau \Rightarrow u=\frac{1}{\tau+c_3}
\end{aligned}$$

תנאי ההתחלה $\begin{matrix} x=s \\ t=0 \\ u=s \end{matrix}$ נחבר בין ρ הנתון לקווים האופייניים ב $\tau=0$:

$$\begin{aligned}
t &= c_1=0 \\
x &= c_2=0 \\
u &= \frac{1}{c_3}\Rightarrow c_3=\frac{1}{s} \\
\Rightarrow t &= \tau \\
x &= c\tau+s \Rightarrow s=x-c\tau \\
u &= \frac{s}{s\tau+1}=\frac{x-ct}{(x-ct)t+1}
\end{aligned}$$

(ב) ניסוח שקול לשאלה הוא: הוכח שעל הקו בו $x-ct$ קבוע ו-$x(t=0)=x_0$ הפתרון שואף ל-0 ב-∞. אז אם $x-ct$ קבוע הוא x_0 (כי $x-ct|_{t=0}=x_0$) לכן

$$\begin{aligned} x-ct &= x_0 \\ x &= ct+x_0 \\ u(ct+x_0,t) &= \frac{x_0}{1+x_0t}\to 0 \end{aligned}$$

(ג) אם $x_0=0$ אז הפתרון הוא זהותית 0. אם $x_0<0$ במקרה הזה יש t בו הפתרון מתבדר $t=-\frac{1}{x_0}$ ולכן אין משמעות לשאלה מה קורה ב $t\to\infty$

2 משוואות ליניאריות מסדר שני

$$au_{xx}+bu_{xy}+cu_{yy}+du_x+cu_y+fu = g$$

כאשר s,b,c,d,e,f,g הוא פונקציות של x ו- y.
נגדיר $\Delta=b^2-4ac$. אם $\Delta>0$ המשוואה נקראת היפרבוליות, $\Delta=0$ המשוואה נקראת פרבוליות, $\Delta<0$ המשוואה נקראת אליפטיות.

דוגמא ניקח את משוואת הגלים

$$\begin{gathered} u_{tt}-c^2u_{xx}=0 \\ a=1,b=0,c=-c^2 \\ \Delta=b^2-4ac=4c^2>0 \end{gathered}$$

כלומר המשוואה היפרבולית

דוגמא

$$\begin{gathered} xu_{xx}+xyu_{xy}+yu_{yy}=0 \\ \Delta=x^2y^2-4xy=xy(xy-4) \end{gathered}$$

יש תחומים בהם Δ גדול קטן או שווה לאפס לכן סוג המשוואה תלוי התחום.

לכל אחד מהסוגים יש צורה קנונית שהיא:

משוואות היפרבוליות $u_{st}+f(u_s,u_t,u)=0$

משוואות פרבוליות $u_{ss}+f(u_s,u_t,u)=0$

משוואות אליפטיות $u_{ss}+u_{tt}+f(u_s,u_t,u)=0$

2.1 משוואות היפרבוליות (משוואת הגלים)

2.1.1 משוואות הומוגניות

$$u_{tt}-c^2u_{xx} = 0, c>0$$

ע"י החלפת משתנים

$$\begin{aligned} \xi &= x+ct \\ \eta &= x-ct \end{aligned}$$

נקבל

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\partial u}{\partial\eta}\right) = 0$$

ע"י 2 אינטגרציות מקבלים

$$u(x,t) = f(x+ct)+g(x-ct)$$

תרגיל מצא פתרון לבעיית ההתחלה

$$\begin{aligned} u_{tt}-c^2u_{xx} &= 0 \\ u(x,0) &= \sin x \\ u_t(x,0) &= \cos x \end{aligned}$$

פתרון ע"פ דלאמבר

$$u(x,t) = f(x+ct)+g(x-ct)$$

נציב בתנאי ב- $t=0$

$$\begin{aligned} u(x,0) &= f(x)+g(x)=\sin x \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) &= cf'(x)-cg'(x)=\cos x \end{aligned}$$

נגזור את הראשון

$$\begin{aligned} f'(x)+g'(x) &= \cos x \\ \Rightarrow f'(x) &= \cos x - g'(x) \end{aligned}$$

הנציב בשני

$$\begin{aligned} c(\cos x - g'(x)) - cg' &= 2cg' \\ \Rightarrow g' &= \cos x\left(\frac{c-1}{2c}\right) \\ g(x) &= \sin x\left(\frac{c-1}{2c}\right) \\ \Rightarrow f'(x) &= \cos x - \cos x\left(\frac{c-1}{2c}\right) \\ f(x) &= \left(\frac{c+1}{2c}\right)\sin x \\ u(x,t) &= \left(\frac{c+1}{2c}\right)\sin(x+ct)+\left(\frac{c-1}{2c}\right)\sin(x-ct) \end{aligned}$$

הערה ניתן לעשות את אותו תהליך לפונקציות כלליות כלומר

$$\begin{aligned} -\infty<x<\infty, u_{tt}-c^2u_{xx} &= 0 \\ u(x,0) &= \alpha(x) \\ u_t(x,0) &= \beta(x) \end{aligned}$$

מקבלים שהפתרון הוא (נוסחת דאלמבר)

$$u(x,t) = \frac{\alpha(x+ct)+\alpha(x-ct)}{2}+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}\beta(s)ds$$

דוגמא

$$\begin{aligned} u_{tt}-u_{xx} &= 0\\ u(x,0) &= |x|\\ u_t(x,0) &= 0 \end{aligned}$$

פתרון אם α,β לא היה מוגדר ע"י מקרים אז פשוט היינו מציבים בנוסחה כללית.
נפרק את הבעיה לתחומים הבאים

1. $(1)\, x+ct>0, x-ct>0 \Rightarrow t\geq -\frac{x}{2}, t\leq \frac{x}{2}$
2. $(2)\, x-ct<0, x+ct>0 \Rightarrow t> -\frac{x}{2}, t> \frac{x}{2}$
3. $(3)\, x-ct<0, x+ct<0 \Rightarrow t< -\frac{x}{2}, t> \frac{x}{2}$
4. אין מקרה רביעי כי אם $x-ct>0, x+ct<0$ אז $t<0$

נפתור את הבעיה בכל אחד מהתחומים ע"י הצבה בנוסחת דאלמבר

1. מקרה ראשון

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{|x+ct|+|x-ct|}{2}+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}0ds\\ &= x \end{aligned}$$

2. המקרה השני

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{|x+ct|+|x-ct|}{2}+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}0ds\\ &= t \end{aligned}$$

3. המקרה השלישי

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{|x+ct|+|x-ct|}{2}+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}0ds\\ &= -x \end{aligned}$$

לכן ניתן לכתוב את הפתרון

$$u(x,t)=\begin{cases} x & (x,t)\in(1)\\ ct & (x,t)\in(2)\\ -x & (x,t)\in(3) \end{cases}$$

תרגיל יהא $u(x,t)$ הפתרון של

$$\begin{cases} u_{tt}-9u_{xx}=0\\ f(x)=u(x,0)=\begin{cases}1 & |x|\leq 2\\ 0 & |x|>2\end{cases}\\ g(x)=u_t(x,0)=\begin{cases}1 & |x|\leq 2\\ 0 & |x|>2\end{cases} \end{cases}$$

1. חשב את $u(0,\frac{1}{6})$
2. חשב את $\lim_{t\to\infty} u(0,t)$

פתרון

1. ע"פ נוסחת דלאמבר

$$u(x,t) = \frac{f(x+3t)+f(x-3t)}{2} + \frac{1}{6}\int_{x-3t}^{x+3t} g(s)ds$$

נציב $t=\frac{1}{6}, x=0$ ואת תנאי ההתחלה

$$\begin{aligned} u(0,\frac{1}{6}) &= \frac{f(\frac{1}{2})+f(-\frac{1}{2})}{2} + \frac{1}{6}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} 1ds \\ &= \frac{1+1}{2} + \frac{1}{6}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} 1ds = \frac{7}{6} \end{aligned}$$

2. נחשב לפי t ונקבל

$$\begin{aligned} L &= \lim_{t\to\infty}\left(\frac{f(3t)+f(-3t)}{2} + \frac{1}{6}\int_{-3t}^{3t} g(s)ds\right) \\ (\forall t>2) &= \lim_{t\to\infty}\left(\frac{0+0}{2} + \frac{1}{6}\left(\int_{-3t}^{-2} g(s)dx + \int_{-2}^{2} g(s)dx + \int_{-2}^{2} g(s)dx\right)\right) \\ &= \lim_{t\to\infty}\left(\frac{0+0}{2} + \frac{1}{6}\int_{-2}^{2} g(s)dx\right) = \frac{4}{6} \end{aligned}$$

שאלה נתונה שמשוואה

$$\begin{cases} u_{tt}-9u_{xx}=0 \\ u(x,0)=0 \\ u_t(x,0)=\begin{cases} 1 & |x|\le 1 \\ 0 & else \end{cases} \end{cases}$$

מצא פתרון ל- $\begin{matrix} -\infty<x<\infty \\ t>0 \end{matrix}$

פתרון התבונן במקרים הבאים (חלוקה לפי u_t, אנו יודעים ש $t>0 \Rightarrow x+3t > x-3t$)

1. $x+3t>1, x-3t>1$
2. $x+3t>1, -1<x-3t<1$
3. $x+3t>1, x-3t<-1$
4. $-1<x+3t<1, x-3t<-1$
5. $-1<x+3t<1, -1<x-3t<1$
6. $x+3t<-1, x-3t<-1$

לכן הפתרון הוא

1. $u(x,t)=\frac{1}{6}\int_{x-3t}^{x+3t} 0ds = 0$
2. $u(x,t)=\frac{1}{6}\int_{x-3t}^{1} 1ds + \int_{1}^{x+3t} 0ds = \frac{1}{6}(1+3t-x)$
3. $u(x,t)=\frac{1}{6}\int_{x-3t}^{-1} 0ds + \frac{1}{6}\int_{-1}^{1} ds + \frac{1}{6}\int_{1}^{x+3t} 0ds = \frac{1}{3}$
4. $u(x,t)=\frac{1}{6}\int_{x-3t}^{-1} 0ds + \frac{1}{6}\int_{-1}^{x+3t} 1ds = \frac{1}{6}(x+3t+1)$
5. $u(x,t)=\frac{1}{6}\int_{x-3t}^{x+3t} ds = t$
6. $u(x,t)=\frac{1}{6}\int_{x-3t}^{x+3t} 0ds = 0$

דוגמא נתונה הבעיה

$$\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0, -\infty<x<\infty \\ u(x,0)=1 \\ u_t(x,0)=\begin{cases} -1 & |x|<1 \\ 0 & |x|\ge 1 \end{cases} \end{cases}$$

מהו $u(x,1)$

פתרון נוסחת דלאמבר היא

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{f(x+ct)+f(x-ct)}{2}+\frac{1}{2}\left(\int_0^{x+ct} g(t)dt-\int_0^{x-ct} g(t)dt\right) \\ &= \left[\frac{f(x+ct)}{2}+\frac{1}{2}\int_0^{x+ct} g(t)dt\right]+\left[\frac{f(x-ct)}{2}-\frac{1}{2}\int_0^{x-ct} g(t)dt\right] \end{aligned}$$

נחשב את הגל הנסוג והמתקדם

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{f(x)}{2}+\frac{1}{2}\int_0^x g(s)ds \\ &= \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\begin{cases}\int_0^{-1}-1ds & x\le -1\\ \int_0^x -1ds & -1\le x\le 1\\ \int_0^1 -1ds & x\ge 1\end{cases} \\ &= \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\begin{cases}1 & x\le -1\\ -x & -1\le x\le 1\\ -1 & x\ge 1\end{cases} \\ &= \begin{cases}1 & x\le -1\\ \frac{1-x}{2} & -1\le x\le 1\\ 0 & x\ge 1\end{cases} \\ G(x) &= \frac{f(x)}{2}-\frac{1}{2}\int_0^x g(s)ds \\ &= \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\begin{cases}\int_0^{-1}-1ds & x\le -1\\ \int_0^x -1ds & -1\le x\le 1\\ \int_0^1 -1ds & x\ge 1\end{cases} \\ &= \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\begin{cases}1 & x\le -1\\ -x & -1\le x\le 1\\ -1 & x\ge 1\end{cases} \\ &= \begin{cases}0 & x\le -1\\ \frac{1+x}{2} & -1\le x\le 1\\ 1 & x\ge 1\end{cases} \\ U(x,1) &= F(x+1)+G(x-1) \\ &= \begin{cases}1 & x+1\le -1\\ \frac{1-(x+1)}{2} & -1\le x+1\le 1\\ 0 & x+1\ge 1\end{cases}+\begin{cases}0 & x-1\le -1\\ \frac{1+(x-1)}{2} & -1\le x-1\le 1\\ 1 & x-1\ge 1\end{cases} \\ &= \begin{cases}1 & x\le -2\\ \frac{-x}{2} & -2\le x\le 0\\ 0 & x\ge 2\end{cases} \\ &= \begin{cases}1 & x\le -1\\ \frac{-x}{2} & -1\le x\le 1\\ 1 & x\ge 1\end{cases}+\begin{cases}0 & x\le 0\\ \frac{x}{2} & 0\le x\le 2\\ 1 & x\ge 2\end{cases} \\ &= \begin{cases}1 & x\le -2\\ -\frac{x}{2} & -2<x<0\\ \frac{x}{2} & 0\le x\le 2\\ 1 & x\ge 2\end{cases} \end{aligned}$$

2.1.2 בעיה לא הומוגנית

$$u_{tt}-c^2u_{xx}=\varphi(x,t),\quad \begin{array}{c}-\infty<x<\infty\\ t>0\end{array}$$
$$u(x,0)=f(x)$$
$$u_t(x,0)=g(x)$$

אז נוסחת דלאמבר המוכללת היא

$$u(x,t) = \frac{f(x+ct)+f(x-ct)}{2}+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}g(s)ds+\frac{1}{2c}\int_0^t\int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)}\varphi(s,\tau)ds$$

למעשה החלק השלישי (התיקון לנוסחה המקורית) הוא אינטגרל על המשולש בקדקודים $((x-ct,0),(x+ct,0),(0,t))$

תרגיל $\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=-2e^{-x}\sin t\\ u(x,0)=\sin x\\ u_t(x,0)=1\end{cases}$ נפתור לפי חלקי האינטגרל

1. $\frac{\sin(x+t)+\sin(x-t)}{2}=\sin x\cos t$
2. $\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}1ds=t$
3. נפתור

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_0^t\int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)}-2e^{-s}\sin\tau dsd\tau &= -\int_0^t\sin\tau\left[e^{-(x+t-\tau)}+e^{-(x-t+\tau)}\right]dt\\ &= e^{-x}\left(\frac{e^t-e^{-t}}{2}\right)\left[e^t(\sin t-\cos t)+1\right]\end{aligned}$$

4. נחבר את החישובים ונקבל $u(x,t)=\sin x\cos t+t+e^x\left(\frac{e^t-e^{-t}}{2}\right)\left[e^t(\sin t-\cos t)+1\right]$

2.1.3 כלל המקבילית

יהא u פתרון של משוואת הגלים ההומוגנית $u_{tt}-c^2u_{xx}=0$ תהא $ABCD$ מקבילים אופייניים, כלומר, מקבילים הנוצרים מהקווים האופייניים

$$\begin{aligned}x-ct&=c_1\\ x-ct&=c_2\\ x+ct&=c_3\\ x+ct&=c_4\end{aligned}$$

אז $u(A)+u(C)=u(B)+u(D)$

תרגיל תהא $u(x,t)$ פונקציה המקיימת את המשוואה

$$\begin{aligned}u_{tt}-u_{xx}&=0\\ u(x,0)&=\frac{x}{x^2+1},0<x\\ u_t(x,0)&=0,x>0\\ u(0,t)&=t>0\end{aligned}$$

חשב את $u(1,3)$

פתרון יש לנו מספר בעיות הבעיה הראשונה היא ש $x \notin (-\infty,\infty)$ הבעיה השני-
יה שהמשולש שנוצר הוא עבור $t<0$. לכן נשתמש בכלל המקבילית. נבנה מקבילית שעוברת דרך השפה. נחשב את הקווים האופייניים העוברים דרך $(1,3)$.

$$\begin{aligned}
x-t &= c_1, 1-3=c_1=-2 \Rightarrow x-t=-2\\
x+t &= c_2, 2+0=c_2 \Rightarrow x+t=2\\
x-t &= c_3, 2+0=c_3 \Rightarrow x-t=2\\
x+t &= c_4, 3+1=c_3 \Rightarrow x+t=4
\end{aligned}$$

לפי כלל המקבילית

$$\begin{aligned}
u(1,3) &= u(3,1)+u(0,2)-u(2,0)\\
&= u(3,1)-\frac{2}{5}\\
u(3,1) &= \frac{f(4)+f(2)}{2}+\frac{1}{2}\int_2^4 g(s)ds=\frac{1}{2}\left(\frac{4}{17}+\frac{2}{5}\right)\\
u(1,3) &= \frac{1}{2}\left(\frac{4}{17}+\frac{2}{5}\right)-\frac{2}{5}
\end{aligned}$$

2.1.4 הרחבה אי-זוגית (וזוגית)

נסתכל על הבעיה
$$\begin{cases} u_{tt}-c^2u_{xx}=F(x,t) & x>0,t>0\\ u(x,0)=f(x) & x\geq 0\\ u_t(x,0)=g(x) & x\geq 0\\ u(0,t)=0 & t\geq 0\end{cases}$$
נגדיר הרחבות אי-זוגיות של f,g,F:

$$\overline{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x\geq 0\\ -f(-x) & x<0\end{cases}, \overline{g}(x)=\begin{cases} g(x) & x\geq 0\\ -g(x) & x<0\end{cases}, \overline{F}(x,t)=\begin{cases} F(x,t) & x\geq 0\\ -F(-x,t) & x<0\end{cases}$$

ונפתור את המע'

$$\begin{aligned}
\overline{u_{tt}}-c^2\overline{u_{xx}} &= \overline{F}(x,t)\\
u(x,0) &= \overline{f}(x)\\
u_t(x,0) &= \overline{g}(x)
\end{aligned}$$

נראה כי $u(x,t)=\overline{u}(x,t)$ כאשר $x>0,t>0$

$$\overline{u}(x,t) = \frac{1}{2}\left[\overline{f}(x+ct)+\overline{f}(x-ct)\right]+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}\overline{g}(s)\,ds+\frac{1}{2c}\int_0^t\int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)}\overline{F}(s,t)\,dsd\tau$$

נבדוק אם $\overline{u}(0,t)=0$

$$\begin{aligned}
\overline{u}(0,t) &= \frac{1}{2}\left[\overline{f}(x+ct)+\overline{f}(x-ct)\right]+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}\overline{g}(s)\,ds+\frac{1}{2c}\int_0^t\int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)}\overline{F}(s,t)\,dsd\tau\\
&= \frac{1}{2}\left[\overline{f}(ct)+-\overline{f}(ct)\right]+\frac{1}{2c}\int_{-ct}^{+ct}\overline{g}(s)\,ds+\frac{1}{2c}\int_0^t\int_{-c(t-\tau)}^{+c(t-\tau)}\overline{F}(s,t)\,dsd\tau\\
&= 0
\end{aligned}$$

באופן דומה

$$\begin{aligned}
\overline{u}(x,0) &= \frac{1}{2}\left[\overline{f}(x)+\overline{f}(x)\right]+\frac{1}{2c}\int_x^x \overline{g}(s)\,ds \\
&\quad +\frac{1}{2c}\int_0^0\int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)}\overline{F}(s,t)\,dsd\tau \\
&= \overline{f}(x) \\
\Rightarrow x\geq 0, u(x,0) &= \overline{u}(x,0)=\overline{f}(x,0)=f(x,0) \\
\overline{u_t}(x,0) &= \frac{1}{2}\left[c\overline{f}(x)-c\overline{f}(x)\right]+\frac{1}{2c}\left(c\overline{g}(x)+c\overline{g}(x)\right) \\
&\quad +\frac{1}{2c}\int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)}\overline{F}(s,t)\,ds \\
&= \overline{g}(x) \\
\Rightarrow x>0,t>0,u_t(x,0) &= \overline{u_t}(x,0)=\overline{g}(x)=g(x)
\end{aligned}$$

לכן ראינו ש-$\overline{u}$ מקיים את הדרישות ש-u צריך לקיים. מיחידות נובע ש $u=\overline{u}$.

הערה לו היה נתון התנאי $u_t(0,t)=0$ (ולא $u(0,t)=0$), כדי לקבל פתרון היה צריך לעשות הרחבה זוגית.

$$\overline{f}(x)=\begin{cases} f(x) & x\geq 0\\ f(-x) & x<0\end{cases},\overline{g}(x)=\begin{cases} g(x) & x\geq 0\\ g(-x) & x<0\end{cases},\overline{F}(x)=\begin{cases} F(x) & x\geq 0\\ F(-x) & x<0\end{cases}$$

הערה לו היה נתון $u(0,t)=h(t)$ היינו מציבים $v(x,t)=u(x,t)-h(t)$ ואז

$$v(0,t) = u(0,t)-h(t)=0$$

אבל המשוואה שנקבל ל-v תהיה עם תנאי התחלה וחלק הומוגני שונה מקודם:

$$\begin{aligned}
u_{tt}-c^2u_{xx} &= F(x,t) \\
v_{tt}+h_{tt}-c^2v_{xx} &= F(x,t) \\
\Rightarrow v_{tt}-c^2v_{xx} &= F(x,t)-h_{tt} \\
v(x,0) &= u(x,0)-h(0)=f(x)-h(0) \\
v_t(x,0) &= u_t(x,0)-h'(0)=g(x)-h_t(0)
\end{aligned}$$

תרגיל ממבחן יהא $u(x,t)$ פתרון של $u_{tt}-u_{xx}=0$ במישור. נתון ש- $u_x(x,t)$ קבועה על הישר $x=1+t$. כמוכן, נתון ש-$u(x,0)=1$ וש- $u(1,1)=3$ חשב את $u(x,t)$.

פתרון הפתרון הכללי של המשוואה נתון ע"י

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= F(x+t)+G(x-t) \\
u_x(x,t) &= F'(x+t)+G'(x-t)
\end{aligned}$$

נציב $x-t=1$ ונקבל

$$\begin{aligned}
u_x\left(t+1,t\right) &= F^{'}\left(2t+1\right)+G^{'}\left(1\right)=c \\
\Rightarrow F^{'}\left(s\right) &= k \\
\Rightarrow F\left(s\right) &= ks \\
u\left(x,0\right) &= 1 \\
\Rightarrow F\left(x\right)+G\left(x\right) &= 1 \\
ks+G\left(x\right) &= 1 \\
u\left(1,1\right) &= F\left(2\right)+G\left(0\right)=3 \\
&= 2k+\left(1-0k\right)=3 \\
\Rightarrow k &= 1 \\
\Rightarrow F\left(x\right) &= x \\
G(x) &= 1-x \\
u\left(x,t\right) &= 1+2t
\end{aligned}$$

תרגיל ממבחן תהא $u\left(x,t\right)$ פתרון של $u_{tt}-c^2u_{xx}=0$ ל $t>0,-\infty<x<\infty$ נתון ש- u קבועה לאורך הישר $x=2+ct$ הוכח ש $u_t+cu_x=0$

פתרון u ניתנת להצגה ע"י

$$\begin{aligned}
u\left(x,t\right) &= F\left(x+ct\right)+G\left(x-ct\right) \\
F\left(2-2ct\right)+G(2) &= const \\
\left(s=2+2ct\right)\Rightarrow F\left(s\right) &= const \\
u\left(x,t\right) &= G\left(x-ct\right)+const \\
u_t+cu_x &= -cG^{'}\left(x-ct\right)+cG^{'}\left(x-ct\right)=0
\end{aligned}$$

2.1.5 פתרונות בהפרדת משתנים

מרחב מכפלה פנימית

הגדרה מרחב וקטורי V יקרא מרחב מכפלה פנימית (ממ"פ). אם לכל 2 וקטורים u,v מוגדרת פונקציה מ $V\times V$ ל-$\mathbb{R}$, שתסומן ב $f(u,v)\equiv\langle u,v\rangle\in\mathbb{R}$ בעלת התכונות

1. $\forall u,v\in V,\langle u,v\rangle=\langle v,u\rangle$
2. $\forall u,v,w\in V,\langle u+v,w\rangle=\langle u,w\rangle+\langle v,w\rangle$
3. $\forall u,v\in V,\alpha\in\mathbb{R},\langle\alpha u,v\rangle=\alpha\left\langle u,v\right\rangle$
4. $\forall v\in V,\langle v,v\rangle\geq 0\vee v=0\Leftrightarrow\langle v,v\rangle=0$

דוגמא $\mathbb{R}^n$ הוא ממ"פ. למשל, ב-$\mathbb{R}^3$, המ"פ הסטנדרטית היא $\langle u,v\rangle=\sum_{i=1}^n u_iv_i$

הערה תהא $\{e_n\}$ סדרה וקטורים א"נ בממ"פ V. נניח ש- $\{e_n\}$ מהווה בסיס ל-V אז כל $u\in V$ ניתן להצגה כצרוף ליניארי של אברי הבסיס $u=\sum_n u_ne_n$

$$\langle u,e_j\rangle = \left\langle\sum_i u_ie_i,e_j\right\rangle=u_j$$

הגדרה לגבי מרחבי פונקציות ממשיות ניתן להגדיר מ"פ ע"י $\langle f,g\rangle = \int_0^\ell f(x)\,g(x)\,dx$.
ואז $\left\{1,\cos\left(\frac{2n\pi x}{\ell}\right),\sin\left(\frac{2n\pi x}{\ell}\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$ מהווה בסיס א"נ

$$h(x) = \sum a_n\cos\left(\frac{2n\pi x}{\ell}\right)+b_n\sin\left(\frac{2n\pi x}{\ell}\right)$$

לכן

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\ell}\int_0^\ell h(x)\cos\left(\frac{2n\pi x}{\ell}\right)dx \\ b_n &= \frac{2}{\ell}\int_0^\ell h(x)\sin\left(\frac{2n\pi x}{\ell}\right)dx \end{aligned}$$

דוגמאות

משוואת הגלים ההומוגנית
$$\begin{cases} u_{tt}-k^2u_{xx}=0 & k>0, x\in(0,\ell), t>0 \\ u(x,0)=f(x) & x\in(0,\ell) \\ u_t(x,0)=g(x) & x\in(0,\ell) \\ u(0,t)=u(\ell,t)=0 & t>0 \end{cases}$$
נניח פתר-
ון בהפרדת משתנים $u(x,t)=X(x)T(t)$ נציב במשוואה המקורית

$$\begin{aligned} XT''-k^2X''T &= 0 \\ \frac{T''(t)}{k^2T(t)} &= \frac{X''(x)}{X(x)}=-\lambda \end{aligned}$$

קיבלנו 2 בעיות:

1. בעיית שטורם ליוביל

$$\begin{aligned} X''+\lambda X &= 0 \\ X(0) &= X(\lambda)=0 \end{aligned}$$

הפתרון הכללי לבעיית שטורם ליוביל היא

$$\begin{aligned} X &= A\cos\sqrt{\lambda}x+B\sin\sqrt{\lambda}x \\ X(0) &= A=0 \\ X(\ell) &= B\sin\sqrt{\lambda}\ell \end{aligned}$$

מכאן $B=0$ או $n\in\mathbb{N}, n\pi=\sqrt{\lambda}\ell$
אם $B=0$ אז $X=0$ ולכן $u\equiv 0$
אם המשוואה לא הומוגנית (כולל ה-f וב-g), אז $u\equiv 0$ אינו פתרון ולכן $\sqrt{\lambda}=\frac{n\pi}{\ell}$. לכן כל קומבינציה ליניארית של λ הללו הוא פתרון. $X_n=B_n\sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)$

2. המשוואה ל-T

$$\begin{aligned} T''+\lambda k^2T &= 0 \\ T''+k^2\frac{n^2\pi^2}{\ell}T &= 0 \\ T_n &= C_n\cos\left(\frac{n\pi kt}{\ell}\right)+D_n\sin\left(\frac{n\pi kt}{\ell}\right) \\ \Rightarrow u(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty}\left[C_n\cos\left(\frac{n\pi kt}{\ell}\right)+D_n\sin\left(\frac{n\pi kt}{\ell}\right)\right]B_n\sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \end{aligned}$$

3. נסמן $\tilde{c_n} = c_n b_n, \tilde{d_n} = d_n b_n$ ואז

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\tilde{C_n}\cos\left(\frac{n\pi kt}{\ell}\right)+\tilde{D_n}\sin\left(\frac{n\pi kt}{\ell}\right)\right]\sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)$$

נמצא את $\tilde{c_n}, \tilde{d_n}$

$$\begin{aligned} u(x,0) &= f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\tilde{c_n}\sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \\ u_t(x,0) &= g(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\tilde{d_n}\frac{n\pi k}{\ell}\sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \end{aligned}$$

ולכן

$$\begin{aligned} \tilde{c_n} &= \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)dx \\ \tilde{d_n} &= \frac{2}{n\pi k}\int_0^{\ell} g(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)dx \end{aligned}$$

דוגמאות

.1
$$\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0 & 0<x<\pi, t>0 \\ u(x,0)=\sin^3 x & 0\le x\le\pi \\ u_t(x,0)=\sin 2x & 0\le x\le\pi \\ u(o,t)=u(\pi,t)=0 & \end{cases}$$

פתרון מניחים שאפשר להציג את הפתרון מהצורה $u(x,t)=X(x)T(t)$ נציב במשוואה

$$\begin{aligned} XT^{''}-X^{''}T &= 0 \\ \frac{T^{''}}{T} &= \frac{X^{''}}{X} = -\lambda \end{aligned}$$

קיבלנו

$$\begin{aligned} X^{''}+\lambda X &= 0 \\ X(0) &= 0 \\ X(\pi) &= 0 \end{aligned}$$

הע"ע הם $\lambda_n = n^2, n=1,2,$ והפ"ע הן $X_n(x)=\sin(nx), n=1,2,$. נעבור למשוואה

$$\begin{aligned} T^{''}+n^2T &= 0 \\ \Rightarrow T_n &= A_n\cos(nt)+B_n\sin(nt) \end{aligned}$$

לכן לכל $n\in\mathbb{N}$ קיים הפתרון

$$u_x(x,t) = (A_n\cos(nt)+B_n\sin(nt))\sin(nx)$$

והפתרון הכללי הוא צירוף ליניארי של $u(x,t)$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos(nt)+B_n\sin(nt))\sin(nx)$$

נציב את תנאי ההתחלה

$$\begin{aligned}
u(x,0) &= \sin^3 x = \sum A_n \sin(nx) \\
A_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(nx)\sin^3 x dx \\
\sin^3 x &= \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin(3x) \\
A_1 &= \frac{3}{4} \\
A_3 &= -\frac{1}{4} \\
\{\forall n \neq 1,3\}, A_n &= 0 \\
u_t(x,0) &= \sum_{n=1}^{\infty} nB_n \sin(nx) = \sin 2x \\
B_2 &= \frac{1}{2} \\
\{\forall n \neq 2\}, B_n &= 0 \\
\Rightarrow u(x,t) &= \frac{3}{4}\cos t \sin x - \frac{1}{4}\cos 3t \sin 3x + \frac{1}{2}\sin 2t \sin(2x)
\end{aligned}$$

הערה

(א) **בעיות מסוג דריכלה** $u(a,t) = A(t), u(b,t) = B(t)$

(ב) **בעיות מסוג נוימן** $u_x(a,t) = A(t), u_x(b,t) = B(t)$

(ג) **בעיות מסוג מעורב** $u(a,t) = A(t), u_x(b,t) = B(t)$ **או** $u_x(a,t) = A(t), u(b,t) = B(t)$

2. **בעיה**

$$\begin{cases} u_{tt} - 4u_{xx} = 0 & 0 < x < 1, t > 0 \\ u(x,0) = \cos^2 \pi x & 0 \le x \le 1 \\ u_t(x,0) = \sin^2 \pi x \cos \pi x & 0 \le x \le 1 \\ u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0 & t \ge 0 \end{cases}$$

פתרון $u(x,t) = X(x)T(t)$

ואז

$$\frac{T''}{4T} = \frac{X''}{X} = -\lambda$$

בעיית שטורם ליוביל

$$\begin{aligned}
X'' + \lambda X &= 0 \\
X'(0) &= X'(1) = 0
\end{aligned}$$

באופן כללי

$$\begin{aligned}
X &= A\cos\sqrt{\lambda}x + B\sin\sqrt{\lambda}x \\
X' &= \sqrt{\lambda}\left(-A\sin\sqrt{\lambda}x + B\cos\sqrt{\lambda}x\right) \\
X'(0) &= 0 = B\sqrt{\lambda}
\end{aligned}$$

או ש $B = 0$ **או ש** $\lambda = 0$. **אם** $B = 0$ **אז**

$$0 = X'(1) = -\sqrt{\lambda}A\sin\sqrt{\lambda}$$

קיבלנו אם $A \neq 0$

$$\sqrt{\lambda} = n\pi$$

אם $B \neq 0$ אז

$$\begin{aligned}\sqrt{\lambda} &= 0\\ X &= A+Bx\\ X^{'} &= B=0\\ X &= A\end{aligned}$$

הע"ע הם $\lambda_0 = 0$ וגם $\lambda_n = n^2\pi^2, n \in \mathbb{N}$ והפ"ע הן $X_0 = \frac{1}{2}, X_n = \cos(n\pi x)$ נחזור ל T

$$\begin{aligned}n=0 \Rightarrow T^{''} &= 0 \Rightarrow T_0 = A_0 + b_0 t\\ n \neq 0 \Rightarrow T_n(t) &= A_n \cos(2n\pi t) + B_n \sin(2n\pi t)\end{aligned}$$

סה"כ

$$u(x,t) = \frac{A_0 + B_0 t}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \sin(2n\pi t) + B_n \cos(2n\pi t)\right)\cos(n\pi x)$$

נשתמש בתנאי התחלה

$$\begin{aligned}u(x,0) &= \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\pi x) = \cos^3 x\\ \cos^3 x &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2\pi x)\\ \Rightarrow A_0 &= 1, A_2 = \frac{1}{2}, a_n = 0\\ u_t(x,0) &= \frac{B_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} 2n\pi B_n \cos(n\pi x) = \cos^2 \pi x\\ &= \sin^2(\pi x)\cos(\pi x)\\ &= \frac{1}{4}\cos\pi x - \frac{1}{4}\cos 3\pi x\\ B_1 &= \frac{1}{8\pi}, B_3 = -\frac{1}{24\pi}, B_n = 0\\ u(x,t) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{8\pi}\sin(2\pi t)\cos(\pi x) + \frac{1}{2}\cos(4\pi t)\cos(2\pi x) - \frac{1}{24\pi}\sin(6\pi t)\cos(3\pi x)\end{aligned}$$

3. משוואה הומוגנית שמתחפשת ללא הומוגנית

$$\begin{cases} u_{tt} - 4u_{xx} + u = 0 & 0 < x < \pi, t > 0\\ u(x,0) \equiv g(x) = \begin{cases}1 & 0 \le x \le \frac{\pi}{2}\\ x & \frac{\pi}{2} < x \le \pi\end{cases} & \\ u_t(x,0) = \sin 3x & 0 \le x \le \pi\\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 & t \ge 0\end{cases}$$

פתרון

$$\begin{aligned}u(x,t) &= X(t)T(t)\\ XT^{''} + X^{''}T + XT &= 0\\ \frac{T^{''}}{T} - 4\frac{X^{''}}{X} + 1 &= 0\\ \frac{T^{''}+T}{4T} &= \frac{X^{''}}{X} = -\lambda\end{aligned}$$

מצאנו כבר כי

$$\begin{aligned} X^{''}+\lambda X &= 0\\ X(0)=X(\pi) &= 0\\ \lambda_n=n^2, X_n &= \sin(nx) \end{aligned}$$

עבור T

$$\begin{aligned} T^{''}+T+4n^2T &= 0\\ T^{''}+\left(1+4n^2\right)T &= 0\\ T_n(t) &= A_n\cos\left(\sqrt{1+4n^2}t\right)+B_n\sin\left(\sqrt{1+4n^2}t\right)\\ u(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\left(\sqrt{1+4n^2}t\right)+B_n\sin\left(\sqrt{1+4n^2}t\right)\right)\sin(nx) \end{aligned}$$

נשתמש בתנאי התחלה

$$\begin{aligned} u(x,0) &= \sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin(nx)=g(x)\\ \Rightarrow A_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}g(x)\sin(nx)\,dx\\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(nx)\,dx+\frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}x\sin(nx)\,dx\\ u_t(x,0) &= \sum_{n=1}^{\infty}B_n\sqrt{1+4n^2}\sin(nx)=\sin x\\ \forall n\neq 3, B_n &= 0\\ B_3 &= \frac{1}{\sqrt{1+36}}=\frac{1}{\sqrt{37}}\\ u(x,t) &= \sum A_n\sin(nx)+\frac{1}{\sqrt{37}}\sin\sqrt{10}t\sin 3x \end{aligned}$$

2.1.6 משוואות הגלים עם חלקים לא הומוגנים

הגדרה

$$\begin{array}{cc} u_{tt}-k^2u_{xx}=F(x,t) & 0<x<\ell, t>0\\ u(x,0)=f(x) & 0\leq x\leq \ell\\ u_t(x,0)=g(x) & 0\leq x\leq \ell\\ u(0,t)=u(\ell,t)=0 & t>0 \end{array}$$

פתרון כללי נסמן

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

ונציב בחלק ההומוגני של המשוואה

$$\begin{aligned} XT^{''}-k^2X^{''}T &= 0\\ X^{''}+\lambda X &= 0\\ X_n &= \sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right), \lambda_n=\left(\frac{n\pi}{\lambda}\right)^2 \end{aligned}$$

נבנה את צורת הפתרון

$$u(x,t) = T_n(t)\sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)$$

נציב במשוואה המקורית

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[T_n^{''}+\tfrac{n^2\pi^2k^2}{\ell^2}T_n\right]\sin\left(\tfrac{n\pi x}{\ell}\right)=F(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}F_n(t)\sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)$$

כאשר

$$F_n(t)=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}F(x,t)\sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)dx$$

נשתמש בהשוואת מקדמים ונקבל

$$T_n^{''}+\frac{n^2\pi^2k^2}{\ell^2}T_n=F_n(t)\qquad(7)$$

ומכאן נקבל

$$T_n=A_n\cos\left(\frac{n\pi kt}{\ell}\right)+B_n\sin\left(\frac{n\pi kt}{\ell}\right)+\overline{F_n}(t)$$

כאשר $\overline{F_n}$ פתרון פרטי של (7)ואז

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n\cos\left(\frac{n\pi kt}{\ell}\right)+B_n\sin\left(\frac{n\pi kt}{\ell}\right)+\overline{F_n}\right]\sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)$$

נותר לבדוק את A_n ו- B_n ואת זה עושים כרגיל.

תרגיל

$$\begin{cases}u_{tt}-4u_{xx}=x & x\in(0,1),t>0\\ u(x,0)=\ell x & x\in[0,1]\\ u_t(x,0)=x^2+x & x\in[0,1]\\ u(0,t)=0 & t\in[0,\infty)\\ u_x(1,t)=e^t & t\in[0,\infty)\end{cases}$$

פתרון נעשה החלפת נעלמים. נגדיר $w(x,t)=u(x,t)-v(x,t)$ ונבחר את v כך של w יהיה בעיית שטורם ליוביל הומוגנית, כלומר $v(0,t)=0,v_x(1,t)=e^t$

נבחר
$$\begin{gathered}v(x,t)=a(t)x+b(t)\\ v(0,t)=b(t)=0\\ v_x(1,t)=a(t)=e^t\\ v(x,t)=xe^t\end{gathered}$$
נציב במשוואה $u=w+v$ וקיבלנו

$$\begin{aligned}u_{tt}-4u_{xx}&=w_{tt}+v_{tt}-4(w_{xx}+v_{xx})=w_{tt}-4w_{xx}+xe^t=x\\ \Rightarrow w_{tt}-4w_{xx}&=x\left(1-e^t\right)\\ u(x,0)&=w(x,0)+v(x,0)=w(x,0)+x=\ell x\\ \Rightarrow w(x,0)&=x(\ell-1)\\ u_t(x,0)&=w_t(x,0)+v_t(x,0)=w_t(x,0)+x=x^2+x\\ \Rightarrow w_t(x,0)&=x^2\end{aligned}$$

ע"פ הבניה שאר התנאים מתקיימים

$$\begin{aligned}w(0,t)&=0\\ w_t(1,t)&=0\end{aligned}$$

סה"כ קיבלנו $\begin{cases} w_{tt}-4w_{xx}=x\left(1-e^{t}\right)\\ w\left(x,0\right)=x\left(\ell-1\right)\\ w_{t}\left(x,0\right)=x^{2}\\ w\left(0,t\right)=w_{x}\left(1,t\right)=0\end{cases}$ נתחיל מפתרון החלק ההומוגני של המשוואה

$$\begin{aligned} XT^{''}-4X^{''}T &= 0\\ X^{''}+\lambda X &= 0,X\left(0\right)=0,X^{'}\left(1\right)=0\\ X\left(x\right) &= A\cos\sqrt{\lambda}x+B\sin\sqrt{\lambda}x\\ X\left(0\right) &= 0=A\Rightarrow X=B\sin\sqrt{\lambda}x\\ X^{'}\left(x\right) &= B\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}x\\ X^{'}\left(1\right) &= B\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}=0\end{aligned}$$

אם $B=0$ אז הפתרון טריוואלי ולכן $B\neq0$ ו $\sqrt{\lambda_{n}}=\frac{\pi}{2}\left(2n-1\right)$

$$X_{n} = B_{n}\sin\left(\pi\left(n-\frac{1}{2}\right)x\right)$$

עבור $\lambda=0$

$$\begin{aligned} X^{''} &= 0\\ \Rightarrow X &= A+Bx\\ X\left(0\right) &= 0\Rightarrow A=0\\ X^{'}\left(1\right) &= 0\Rightarrow B=0\end{aligned}$$

לכן הפתרון טריוואלי ולכן $\lambda=0$ הוא לא ע"ע.
נבנה צורה כללית לפתרון.

$$w\left(x,t\right) = \sum_{n=1}^{\infty}T_{n}\left(t\right)\sin\left(\pi\left(n-\frac{1}{2}\right)x\right)$$

נציב במשוואה הלא הומוגנית של w:

$$\begin{aligned} w\left(x,t\right) &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(T_{n}^{''}+4\pi^{2}\left(n-\frac{1}{2}\right)^{2}T_{n}\right)\sin\left(\pi\left(n-\frac{1}{2}\right)x\right)\\ &= x\left(1-e^{t}\right)=\left(1-e^{t}\right)\sum_{n=1}^{\infty}A_{n}\sin\left(\pi\left(n-\frac{1}{2}\right)x\right)\\ A_{n} &= 2\int_{0}^{1}x\sin\left(\pi\left(n-\frac{1}{2}\right)x\right)dx\\ T_{n}^{''}+4\pi^{2}\left(n-\frac{1}{2}\right)^{2}T_{n} &= A_{n}\left(1-e^{t}\right)\end{aligned}$$

מכאן יש

1. לפתור את A_{n}
2. לפתור את המד"ר ולהציב ב w
3. כדי למצוא את הקבועים שיתקבלו, יש להציב בתנאי התחלה.
4. להוסיף ל-w שקבלתם את v

2.2 משוואת החום (ע"פ שטורם ליוביל)

דוגמא
$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = x\left(\frac{1+\pi t}{\pi}\right) & x\in(0,\pi), t>0 \\ u(x,0) = 2-\frac{2x^2}{\pi} & x\in[0,\pi] \\ u(0,t)=2 & t\geq 0 \\ u(\pi,t)=t & t\geq 0 \end{cases}$$

פתרון נגדיר $w(x,t)=u(x,t)-v(x,t)$ כאשר v מקיים אי-הומוגניות של בעיית שטורם ליוביל הקשורה למשוואה המקורית. נגדיר

$$\begin{aligned} v(x,t) &= a(t)x+b(t) \\ v(0,t) &= b(t)=2 \\ v(\pi,t) &= a(t)\pi+2=t \\ a(t) &= \frac{t-2}{\pi} \\ v(x,t) &= \frac{t-2}{\pi}x+2 \end{aligned}$$

הדרישה היא ש-v מקיים את אותה אי-ההומוגניות של u. ואז נגדיר $w(x,t)=u(x,t)-v(x,t)$

$$\begin{cases} w_t - w_{tt} = xt & x\in(0,\pi), t>0 \\ w(x,0) = \frac{2x}{\pi}(1-x) & x\in[0,\pi] \\ w(0,t)=0 & t\geq 0 \\ w(\pi,t)=0 & t\geq 0 \end{cases}$$

נתחיל מהחלק ההומוגני ונניח שהפתרון מהצורה $w(x,t)=X(x)T(t)$

$$\begin{aligned} \frac{X''}{X} &= -\lambda \\ X''+\lambda X &= 0 \\ X(0)=X(\pi) &= 0 \\ X_n &= \sin(nx) \\ \lambda_n &= n^2, n\in\mathbb{N} \end{aligned}$$

נבנה את הפתרון כצרוף ליניארי של המכפלה של פ"ע בכיוון x כפונקציות עצמיות בכיוון t

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\sin(nx)$$

נציב במשוואה הלא הומוגנית ל-w

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(T_n'+n^2T_n\right)\sin(nx) = tx$$

נפתח את tx לטור בפונקציות העצמיות של בעיית שטורם ליוביל.

$$\begin{aligned}
x &= \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin nx \\
B_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin(nx)\,dx = \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \\
\sum_{n=1}^{\infty}\left(T_n^{'}+n^2T_n\right)\sin(nx) &= t\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}}{n}\sin nx \\
\forall n\in\mathbb{N}, T_n^{'}+n^2T_n &= t\frac{2(-1)^{n+1}}{n} \\
T_n(t) &= \frac{2(-1)^{n+1}}{n^5}\left(n^2t-1\right)+C_ne^{-n^2t} \\
w(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2(-1)^{n+1}}{n^5}\left(n^2t-1\right)+C_ne^{-n^2t}\right]\sin(nx)
\end{aligned}$$

את C_n מוצאים ע"י הצבה בתנאי התחלה

$$\begin{aligned}
w(x,0) &= \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2(-1)^n}{n^5}+C_n\right]\sin(nx) = \frac{2x}{\pi}(1-x) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} B_n\frac{2x}{\pi}(1-x) \\
B_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{2x}{\pi}(1-x)\sin(nx)\,dx \\
C_n &= \frac{-2(-1)^n}{n^5}+\frac{4}{\pi^2}\int_0^4 x(1-x)\sin(nx)\,dx \\
u(x,0) &= \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2(-1)^n}{n^5}\left(n^2t-1\right)+C_ne^{-n^2t}\right]\sin(nx)+2+(t-2)\frac{x}{\pi}
\end{aligned}$$

הערה ההצבה $v(x,t)=a(t)x+b(t)$ מתאימה לבעיות שטורם ליוביל מעורבים או דריכלה. במקרה של תנאי נוימן לא הומוגני ניקח $v(x,t)=a(t)x^2+b(t)x$

2.3 שיטת אינטגרל האנרגיה

תרגיל באמצעות שיטת אינטגרל האנרגיה , הוכח יחידות הפתרון של הבעיה.

$$\begin{cases}
u_t-ku_{xx}=F(x,t) & 0<x<L, t>0 \\
u(0,t)-\alpha u_x(0,t)=a(t) & t\geq 0 \\
u(L,t)-\beta u_x(L,t)=b(t) & t\geq 0 \\
u(x,0)=f(x) & 0<x<L
\end{cases}$$

כאשר $\alpha,\beta>0, k>0$

פתרון נניח שהפתרון לא יחיד, כלומר, שיש 2 פתרונות u_1,u_2, מסתכלים על

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^t w^2(x,t)\,dx$$

כאשר

$$w(x,t) = u_2(x,t)-u_1(x,t)$$

$E(t) \geq 0$ כי אינטגרל של פונקציה אי-שלילית.

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2}\int_0^L 2ww_T dx$$

$w(x,t)$ מקיימת את המשוואה

$$\begin{aligned} w_t - w_{xx} &= 0 \\ w(0,t) - \alpha w_x(0,t) &= 0 \\ w(L,t) - \beta w_x(L,t) &= 0 \\ w(x,0) &= 0 \end{aligned}$$

לכן

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \int_0^L wkw_{xx}dx \\ &= k\left[\left(ww_x\right)|_0^L - \int_0^L w_x^2 dx\right] \\ &= k\left[\left(\frac{-w^2(L,t)}{\beta} - \frac{w^2(0,t)}{\alpha}\right) - \int_0^L w_x^2 dx\right] \leq 0 \end{aligned}$$

לכן E מונוטונית לא עולה ב-t. כמוכן

$$\begin{aligned} E(0) &= \int_0^L w^2(x,0)\,dx \\ &= \int_0^L 0dx = 0 \end{aligned}$$

לכן $E(t)$ מונוטונית לא עולה מתחילה ב 0 ואי-שלילית ולכן חייבת להיות שווה ל-0. כלומר

$$\begin{aligned} w &= 0 \\ \Rightarrow u_1 &= u_2 \end{aligned}$$

2.4 בעיית שטורם ליוביל כללית

$$\begin{cases} \frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du}{dx}\right) - q(x)u + \lambda\rho(x)u = 0 & 0 < x < 1 \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

משפטים

1. פונקציות עצמיות המתאימות לע"ע של בעיית שטור ליוביל הן אורתוגונלית ביחס למכפלה הפנימית

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 fg\rho dx$$

2. הפתרון של הבעיה עם התנאים הנתונים הם קבוצה שלמה
3. אם u_n הן הפ"ע של הבעיה ורוצים לפתח $\Phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x)$ אז

$$c_n = \frac{\int_0^1 \rho\Phi u_n\rho dx}{\int_0^1 \rho u_n^2 dx}$$

תרגילים

1. משוואת הגלים עם מקדמים לא קבועים

$$\begin{cases} \frac{1}{(1+x)^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad 0 < x < t, t > 0 \\ u(x,0) = f(x) \\ u_t(x,0) = 0 \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 \end{cases}$$

אם מניחים הפרדת משתנים $u(x,t) = X(x)T(t)$ ומציבים מקבלים

$$\begin{aligned} X'' + \frac{\lambda}{(1+x)^2}X &= 0 \\ T'' + \lambda T &= 0 \\ X(0) = X(1) &= 0 \end{aligned}$$

ניתן לראות כי $(1+x)^a$ פתרון ל X בכדי לדעת מהו ה-a המתאים, נציב במשוואה

$$\begin{aligned} a(a-1) + \lambda &= 0 \\ a^2 - a + \lambda &= 0 \\ \Rightarrow a &= \frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{1-4\lambda}\right) \\ \Rightarrow X(x) &= A(1+x)^{\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{1-4\lambda}\right)} + B(1+x)^{\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{1-4\lambda}\right)} \end{aligned}$$

אם באמת יש שני פתרונות למשוואה הריבועית.

$$\begin{aligned} X(0) = A + B &= 0 \\ X(1) = A2^{\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{1-4\lambda}\right)} + B2^{\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{1-4\lambda}\right)} &= 0 \\ A &= -B \\ A\left(2^{\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{1-4\lambda}\right)} - 2^{\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{1-4\lambda}\right)}\right) &= 0 \\ 2^{\sqrt{1-4\lambda}} &= 1 \end{aligned}$$

אם $0 < \lambda < \frac{1}{4}$ אז $\sqrt{1-4\lambda}$ ממשי ואין פתרון.
אם $\lambda = \frac{1}{4}$, הפתרונות תלויים

ידוע שפתרונות בלתי תלויים למקרה זה הם $(1+x)^{\frac{1}{2}}\ln(1+x)$, $(1+x)^{\frac{1}{2}}$. הפתר-ונות לא מקיימים את תנאי השפה של שטורם ליוביל ולכן גם $\lambda = \frac{1}{4}$ לא ע"ע של הבעיה.
אם $\lambda > \frac{1}{4}$ יש שתי פתרונות קומפלקסים $(1+x)^{\frac{1}{2}\left(1+i\sqrt{4\lambda-1}\right)}$. 2 הפתרונות בלתי תלויים ניתנים ע"י החלק הממשי והדמיוני של הבעיה, יוצא ש-

$$\begin{aligned} X_\lambda(x) &= A(1+x)^{\frac{1}{2}}\cos\left(\sqrt{\lambda - \frac{1}{4}}\ln(1+x)\right) \\ &\quad + Bv(1+x)^{\frac{1}{2}}\sin\left(\sqrt{\lambda - \frac{1}{4}}\ln(1+x)\right) \\ X(0) &= A1 = 0 \\ X(1) &= B\sin\left(\sqrt{\lambda - \frac{1}{4}}\ln(2)\right) = 0 \\ \sqrt{\lambda - \frac{1}{4}}\ln(2) &= n\pi \\ \lambda_n &= \frac{n^2\pi^2}{\ln^2(2)} + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

והפונקציות העצמיות הן

$$X_n = (1+x)^{\frac{1}{2}} \sin\left(\frac{n\pi \ln(1+x)}{\ln(2)}\right)$$

עבור T

$$\begin{aligned}
T^{''} + \lambda T &= 0\\
\Rightarrow T_n(t) &= A_n \cos\left(\sqrt{\lambda} t\right) + B_n \sin\left(\sqrt{\lambda} t\right)\\
\Rightarrow u &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \cos\left(\sqrt{\lambda} t\right) + B_n \sin\left(\sqrt{\lambda} t\right)\right](1+x)^{\frac{1}{2}} \sin\left(\frac{n\pi \ln(1+x)}{\ln(2)}\right)\\
u(x,0) = f(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n (1+x)^{\frac{1}{2}} \sin\left(\frac{n\pi \ln(1+x)}{\ln(2)}\right)\\
A_n &= \frac{\int_0^1 f(x)(1+x)^{-\frac{3}{2}} \sin\left(\frac{n\pi \ln(1+x)}{\ln(2)}\right) dx}{\int_0^1 (1+x)^{-1} \sin^2\left(\frac{n\pi \ln(1+x)}{\ln(2)}\right) dx}\\
u_t(x,0) = 0 &= \sum_{n=1}^{\infty} B_n (1+x)^{\frac{1}{2}} \sin\left(\frac{n\pi \ln(1+x)}{\ln(2)}\right)\\
B_n &= 0\\
\Rightarrow u &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(t\sqrt{\frac{n^2\pi^2}{\ln^2(2)} + \frac{1}{4}}\right)(1+x)^{\frac{1}{2}} \sin\left(\frac{n\pi \ln(1+x)}{\ln(2)}\right)
\end{aligned}$$

הערה לא תמיד ניתן למצוא אנליטית את ע"ע של בעיית שטורם ליוביל; למשל לבעיה

$$\begin{cases}
u_t - u_{xx} = 0 & 0 < x < 1, t > 0\\
u(x,0) = f(x) & 0 \le x \le 1\\
u(0,t) = 0 & t > 0\\
u(1,t) - u_x(1,t) = 0 &
\end{cases}$$

מקבלים את בעיית שטורם ליוביל

$$\begin{aligned}
X^{''} + \lambda X &= 0\\
X(0) &= 0\\
X(1) - X^{'}(1) &= 0
\end{aligned}$$

אם $\lambda = 0$

$$X^{''} = 0 \Rightarrow X = ax + b$$

ע"י הצבת תנאי השפה מקבלים $X_0 = Ax$. אם $\lambda > 0$ אז

$$\begin{aligned}
X &= A\sin\left(\sqrt{\lambda} x\right) + B\cos\left(\sqrt{\lambda} x\right)\\
X(0) = 0 \Rightarrow B &= 0\\
X^{'} - X &= \left(A\sin\sqrt{\lambda} x - A\cos\sqrt{\lambda} x\right)\sqrt{\lambda} = 0\\
\sin\sqrt{\lambda} - \sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda} &= 0\\
\Rightarrow \tan\sqrt{\lambda_n} &= \sqrt{\lambda_n}
\end{aligned}$$

נסמן $k_n = \sqrt{\lambda_n}$ אז $\tan k_n = k_n$. אז הע"ע הם בחיתוך $y = x, y = \tan x$

תרגיל נתונה בעיית הע"ע

$$\begin{cases} u^{''}+\lambda u=0 & -1<x<1\\ u(1)+u(-1)=0 \\ u^{'}(1)+u^{'}(-1)=0 \end{cases}$$

1. הוכח שאם $u,v\in c^{2}[-1,1]$ מקיימות את הנתון אז

$$0 = \int_{-1}^{1}\left(u^{''}v-v^{''}u\right)dx$$

2. הוכח כי כל הע"ע של הבעיה ממשיים
3. מצא את כל הע"ע והפ"ע
4. מהי ריבוי הע"ע

פתרון

.1

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1}u^{''}v &= vu^{'}\Big|_{-1}^{1}-\int_{-1}^{1}v^{'}u^{'}\\
&= v(1)u^{'}(1)-v(-1)u^{'}(-1)-\int_{-1}^{1}v^{'}u^{'}\\
&= v(1)u^{'}(1)+v(-1)u^{'}(1)-v(-1)u^{'}(1)-v(-1)u^{'}(-1)-\int_{-1}^{1}v^{'}u^{'}\\
&= -\int_{-1}^{1}v^{'}u^{'}\\
... &= \int_{-1}^{1}v^{''}u\\
\Rightarrow\int_{-1}^{1}\left(u^{''}v-v^{''}u\right)dx &= 0
\end{aligned}$$

2. תהא u פ"ע אם ע"ע λ אז

$$u^{''}+\lambda u = 0$$

נעשה צמוד

$$\begin{aligned}
\overline{u}^{''}+\overline{\lambda}\overline{u} &= 0\\
\Rightarrow\overline{u}u^{''}+\lambda u\overline{u} &= 0\\
u\overline{u}^{''}+\overline{\lambda}\overline{u}u &= 0\\
\Rightarrow\int_{-1}^{1}\overline{u}u^{''}+\lambda u\overline{u} &= 0\\
\int_{-1}^{1}u\overline{u}^{''}+\overline{\lambda}\overline{u}u &= 0\\
\int_{-1}^{1}\overline{u}u^{''}-u\overline{u}^{''}+\lambda u\overline{u}-\overline{\lambda}\overline{u}u &= 0
\end{aligned}$$

אם u מקיימת את התנאים אז גם $\overline{u}$ מקיימת את התנאים. מהסעיף הראשון $\int_{-1}^{1}\overline{u}u'' - u\overline{u}'' = 0$

$$\lambda\int_{-1}^{1}|u|^2 = \overline{\lambda}\int_{-1}^{1}|u|^2\,dx$$

לכן λ ממשי.

3. יהא λ ע"ע. נראה קודם ש $\lambda \geq 0$

$$\begin{aligned}
u'' + \lambda u &= 0 \\
\int_{-1}^{1} uu'' + \lambda u^2 &= 0 \\
&= uu'\Big|_{-1}^{1} + \int_{-1}^{1}\left[-\left(u'\right)^2 + \lambda u^2\right] = 0 \\
(u \neq 0)\,\lambda &= \frac{\int_{-1}^{1}\left(u'\right)^2}{\int_{-1}^{1}u^2} \geq 0
\end{aligned}$$

לכן הע"ע אי שליליים הפונקציות העצמיות הן סינוסים וקוסינוסים ואפשר לפתור כמו תמיד. אם $\lambda > 0$ אז

$$\begin{aligned}
\lambda_n &= \left(\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi\right)^2 \\
u_n &= a_n\cos\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi x\right) + b_n\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi x\right)
\end{aligned}$$

4. ריבוי הע"ע הוא 2 כי תמיד 2 פונקציות מתאימות לאותו ע"ע

$$\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi x\right), \cos\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi x\right)$$

2.5 משוואות לפלס

תרגיל נתונה הבעיה

$$\begin{cases}
u_{xx} + u_{yy} = 0 & 0 < x < \pi, 0 < y < \pi \\
u(x, 0) = 0 & 0 \leq x \leq \pi \\
u(x, \pi) = \sin x & 0 \leq x \leq \pi \\
u(0, y) = \sin 2y & 0 \leq y \leq \pi \\
u(\pi, y) = 0 & 0 \leq y \leq \pi
\end{cases}$$

פתרון נפרק את הבעית לשתי בעיות

$$\begin{cases}\Delta v=0 & 0<x<\pi,0<y<\pi\\ v\left(x,0\right)=0 & 0\leq x\leq\pi\\ v\left(x,\pi\right)=\sin x & 0\leq x\leq\pi\\ u\left(0,y\right)=0 & 0\leq y\leq\pi\\ u\left(\pi,y\right)=0 & 0\leq y\leq\pi\end{cases}$$

$$\begin{cases}\Delta w=0 & 0<x<\pi,0<y<\pi\\ w\left(x,0\right)=0 & 0\leq x\leq\pi\\ w\left(x,\pi\right)=0 & 0\leq x\leq\pi\\ w\left(0,y\right)=\sin2y & 0\leq y\leq\pi\\ w\left(\pi,y\right)=0 & 0\leq y\leq\pi\end{cases}$$

אזי נקבל

$$\begin{aligned}v &= XY\\ \frac{X^{''}}{X} &= -\lambda\\ w &= XY\\ \frac{Y^{''}}{Y} &= -\lambda\\ u &= v+w\end{aligned}$$

1. עבור חלק ראשון

$$\begin{aligned}v\left(x,y\right) &= X\left(x\right)Y\left(y\right)\\ \Rightarrow X^{''}Y+XY^{''} &= 0\\ \frac{X^{''}}{X} &= -\frac{Y^{''}}{Y}=-\lambda\end{aligned}$$

בגלל שתנאי השפה מתאפסים על $(0,y)$ ו-(π,y) נקבל בעיית שטור ליוביל עם 0 בקצוות הקטע ל-

$$\begin{aligned}X^{''}+\lambda X &= 0\\ X\left(0\right)=X\left(\pi\right) &= 0\\ \Rightarrow\lambda_{n}=n^{2},X_{n} &= \sin\left(nx\right)\end{aligned}$$

נפתור את המשוואה ל-Y.קיבלנו

$$\begin{aligned}
Y^{''}-\lambda Y &= 0\\
\Rightarrow Y^{''}-n^2Y &= 0\\
\Rightarrow Y_n &= A_n\cosh ny+B_n\sinh ny\\
\Rightarrow v(x,y) &= \sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n\cosh ny+B_n\sinh ny\right]\sin(nx)\\
v(x,0) &= 0\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin(nx)\\
\Rightarrow A_n &= 0\\
v(x,\pi) &= \sin x=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sinh(n\pi)\sin(n)\\
\Rightarrow \forall n\neq 1, B_n &= 0, B_1=\frac{1}{\sinh\pi}\\
\Rightarrow v(x,\pi) &= \frac{1}{\sinh\pi}\sinh(y)\sin(x)
\end{aligned}$$

2. באותו אופן יש לפתור את w. מניחים

$$\begin{aligned}
w(x,y) &= XY\\
-\frac{X^{''}}{X}=\frac{Y^{''}}{Y} &= -\lambda\\
\Rightarrow Y^{''}+\lambda Y &= 0\\
Y(0)=Y(\pi) &= 0\\
\Rightarrow \lambda=n^2, Y_n &= \sin(ny)
\end{aligned}$$

עבור X

$$\begin{aligned}
X^{''}-n^2X &= 0\\
\Rightarrow w(x,y) &= \sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n\cosh nx+B_n\sinh nx\right]\sin ny
\end{aligned}$$

אחרי הצבה התנאים $w(0,y), w(\pi,y)$ מקבלים

$$w(x,y) = \cosh 2x\sin 2y-\coth 2\pi\sinh 2x\sin 2y$$

2.5.1 משוואה לא הומוגניות

אם בקדקודי התחום אין ערכי 0.

$$\begin{aligned}
u(0,0) &= \alpha\\
u(a,0) &= \beta\\
u(0,b) &= \gamma\\
u(a,b) &= \delta
\end{aligned}$$

מגדרים v כך של $w = v - u$ התנאים בקדקודים יתאפסו

$$\begin{aligned} v &= p + qx + vy + sxy \\ v(0,0) &= p = \alpha \\ v(a,0) &= p + qa = \beta \\ v(0,b) &= p + rb = \gamma \\ v(a,b) &= p + qa + rb + sab = \delta \end{aligned}$$

2.5.2 לפלס עיגול

משוואת לפלס

$$\begin{aligned} r^2 u_{rr} + r u_r + u_{\theta\theta} &= 0 \\ u(1,\theta) &= 0 \\ u(2,\theta) &= \sin\theta \end{aligned}$$

נניח הפרדת משתנים $u(r,\theta) = R(r)\Theta(\theta)$ אז

$$\begin{aligned} r^2 R^{''}\Theta + rR^{'}\Theta + R\Theta^{''} &= 0 \\ \frac{\Theta^{''}}{\Theta} &= -\left[\frac{r^2 R^{''} + rR^{''}}{R}\right] = -\lambda \end{aligned}$$

נפתור ראשית ל Θ

$$\Theta^{''} + \lambda\Theta = 0$$

נדרוש

$$\begin{aligned} u(r,\pi) &= u(r,-\pi) \\ u_\theta(r,\pi) &= u_\theta(r,-\pi) \end{aligned}$$

סה"כ נקבל ל-Θ את התנאים

$$\begin{aligned} \Theta^{''} + \lambda\Theta &= 0 \\ \Theta(\pi) &= \Theta(-\pi) \\ \Theta^{'}(\pi) &= \Theta^{'}(-\pi) \end{aligned}$$

אם $\lambda = 0$

$$\begin{aligned} \Theta^{''} &= 0 \\ \Rightarrow \Theta &= ax + b \\ \Rightarrow \Theta &= const = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

אם $\lambda > 0$

$$\Theta = A\cos\sqrt{\lambda}\theta + B\sin\sqrt{\lambda}\theta$$

ע"י הצבת תנאים של Θ מקבלים

$$\begin{aligned} \sin\sqrt{\lambda}\pi &= 0 \\ \Rightarrow \sqrt{\lambda} &= n \end{aligned}$$

אם $\lambda < 0$ יוצא שאין פתרונות שאינם טריוואלים

$$\Rightarrow \lambda_0 = 0, \Theta_0 = b_0$$
$$\lambda_n = n^2, T_n = A_n \cos n\Theta + B_n \sin n\Theta$$

נחזור למשוואה ל-R

$$r^2 R^{''} + rR^{'} - n^2 R = 0$$

זוהי משוואת אוילר. פתרונותיה הם מהצורה $R = r^\alpha$ או $\ln r$.

$$\begin{aligned}
\alpha(\alpha-1) r^\alpha + \alpha r^\alpha - n^2 r^\alpha &= 0\\
\alpha(\alpha-1) + \alpha - n^2 &= 0\\
\Rightarrow \alpha &= \pm n\\
R_n &= \begin{cases} A_n r^n + B_n r^{-n} & n \geq 1\\ A_0 + B_0 \ln r & n = 0\end{cases}\\
\Rightarrow u &= A_0 + B_0 \ln r + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n r^n + B_n r^{-n}\right)\left(\tilde{A_n}\cos n\theta + \tilde{B_n}\sin n\theta\right)
\end{aligned}$$

נוח לכתוב את הפתרון בצורה

$$u = A_0 + B_0 \ln r + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n r^n + B_n r^{-n}\right)\cos n\theta + \left(\overline{A_n} r^n + \overline{B_n} r^{-n}\right)\sin n\theta$$

ע"י שימוש בתנאי השפה מקבלים

$$u = \left(\frac{2}{3}r - \frac{2}{3}\frac{1}{r}\right)\sin\theta$$

2.5.3 משפט המקסימום ונוסחת פואסון

משפט המקסימום לפונקציה הרמונית תהא $u(x,y)$ פונקציה הרמונית לא קבועה בתחום חסום D אז המינימום והמקסימום של u מתקבלים בשפה של D ואינם מתקבלים באף נקודה פנימית.

נוסחת פואסון לפתרון בעיית דריכלה

$$\begin{cases}\Delta u = 0 & 0 < r < R, 0 < \theta < 2\pi\\ u(r,\theta) = f(\theta)\end{cases}$$

$$u(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(\varphi)\left(R^2 - r^2\right)}{R^2 - 2rR\cos(\theta-\varphi) + \varphi^2} d\varphi$$

ואז משפט הממוצע

$$u(0,0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi)\, d\varphi$$

תרגיל נתון ש- u,v פונקציות הרמוניות בתחום $0<x<1, o<y<1$, ורציפות בתחום $0\leq x,y\leq 1$, כאשר

$$\begin{cases} u(x,0)=x(x-1) & 0\leq x\leq 1\\ u(0,y)=\sin(\pi y) & 0\leq y\leq 1\\ u(x,1)=2x(x-1) & 0\leq x\leq 1\\ u(1,y)=\sin(2\pi y) & 0\leq y\leq 1\end{cases}$$

$$\begin{cases} v(x,0)=1 & 0\leq x\leq 1\\ u(0,y)=\cos(2\pi y) & 0\leq y\leq 1\\ u(x,1)=1 & 0\leq x\leq 1\\ u(1,y)=1 & 0\leq y\leq 1\end{cases}$$

חשב את $\max|u(x,y)-v(x,y)|$

פתרון נגדיר $w=u-v$ נשים לב כי w הרמונית כי $\Delta w=\Delta(u-v)$,כמוכן , לא רציפה בתחום הסגור. לפי משפט המקסימום לפונקציה הרמונית המינימום והמקסימום יתקבלו על השפה, ולכן נחפש אותם שם.

1. נדגים את החיפוש בשפה אחת

$$\begin{aligned}(y=0,0\leq x\leq 1)\Rightarrow w &= x^2-x-1\\ w^{'} &= 2x-1=0\Rightarrow x=\frac{1}{2}\\ w\left(\frac{1}{2}\right) &= -\frac{5}{4}, w(0)=-1, w(1)=-1\end{aligned}$$

2. עבור $x=0, 0\leq y\leq 1$

$$\begin{aligned} w(y) &= \sin(\pi y)-\cos(2\pi y)\\ w(0) &= -1, w(1)=-1, w(\cos m...)=\frac{9}{3}, w\left(\frac{1}{2}\right)=2\end{aligned}$$

ממשיכים באופן דומה על זוג צלעות הנותרות ובסוף יוצא שהמינימום של w על השפה הוא 2-, ולכן $\max|w|=2$

הערה לפלס בעיגול לחיפוש ערכים קיצון גוזרים את f לפי θ

תרגיל תהא $u(r,\theta)$ פונקציה המקיימת את משוואת לפלס בקואורדינטות קוטביות במ-עגל

$$D = \left\{(r,\theta)\mid \begin{array}{c}0<r<R\\ -\pi<\theta<\pi\end{array}\right\}$$

1. נתונים ערכי השפה של u

$$u(R,\theta) = \begin{cases}\pi-2|\theta| & |\theta|\leq\frac{\pi}{2}\\ 0 & \frac{\pi}{2}\leq|\theta|\leq\pi\end{cases}$$

מצא את $u(0,0)$ בלי לפתור את בעיית השפה

2. הוכח שבכל נקודות העיגול מתקיים $0<u(r,\theta)<\pi$

פתרון

1. לפי משפט הממוצע

$$
\begin{aligned}
u(0,0) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(R,\theta)\,d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}} 0d\theta + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} (\pi+2\theta)\,d\theta + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (\pi+2\theta)\,d\theta + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 0d\theta\right] \\
&= \frac{\pi}{4}
\end{aligned}
$$

2. כמו בשאלה הקודמת.

2.6 אמתיות הפתרון

- באופן כללי, טור פתרונות ונגזרותיו עד סדר המשוואה צריכים להתכנס במ"ש.
- לגבי משוואת החום - אם תנאי השפה ותנאי התחלה "מסוימים" (במובן של רציפות התנאים בפינות) אז הפתרון אמיתי.

דוגמא נתונה

$$
\begin{cases}
u_t - 9u_{xx} = 0 \\
u(x,0) = x(x-2) \\
u(0,t) = u_x(1,t) = 0
\end{cases}
$$

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= -\frac{32}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-\frac{9}{4}\pi^2(2n-1)^2 t}}{(2n-1)^3}\sin\left(\frac{(2n-1)}{2}\pi x\right) \\
u_n &\le \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^3}
\end{aligned}
$$

ולכן לפי המיורנטה של ווירשטרס ההתכנסות במ"ש. נסתכל על

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{\partial u_n}{\partial t}\right| &= \left|9\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right| = \left|\frac{\frac{9}{4}\pi^2 e^{-\frac{9}{4}\pi^2(2n-1)^2 t}}{2n}\sin(\ldots)\right| \\
&\le \frac{M}{2n-1}e^{-\frac{9}{4}\pi^2(2n-1)^2}
\end{aligned}
$$