טורי פוריה והתמרות אינטגרליות - תרגול

מתרגל: עמית ענב

19 בספטמבר 2004

$Id: forier_tirgol.lyx,v 1.16 2004/09/19 23:33:03 itay Exp $

תוכן עניינים

1 מבוא

מרחבים וקטורים אוסף של איברים אם שתי פעולות כפל בסקלר (משדה מסוים) וחיבור. האוסף צריך להיות סגור לפעולות הנ"ל. חבורה אבלית של חיבור

תת מרחב תת קב' של מרחב ווקטורי היא מרחב ווקטורי בעצמה אם לא ריקה וגם סגורה לגבי כפל בסקלר וחיבור.

תרגיל אילו מהקבוצות הבאות מהוות מרחב וקטורי:

1. $c(\mathbb{R})$ עם פעולות חיבור נק' וכפל נק'
2. אוסף הפולינומים ממעלה בדיוק n ביחס לחיבור וכפל בסקלר רגיל.
3. הפונקציות הרציפות למקוטעין בקטע $[0,1]$ כך ש $\int_0^1 f(t)dt = 0$ (כל המרחבים מעל $\mathbb{R}$)

פתרון אוסף הפונקציות עם אותו תחום הגדרה הנו מרחב ווקטורי ביחס לחיבור וכפל בסקלר רגילים. מספיק לבדוק אם הקב' שלו הנם ת"מ

1. $0 \in C(\mathbb{R})$ לכן לא ריקה, סגור כי $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha f + \beta g \in c(\mathbb{R})$
2. $o \notin \mathbb{P}_n[x]$ ולכן לא ת"מ
3. אם f, g רציפות למקוטעין אזי $\alpha f + \beta g$ גם כן (מספר נק' אי הרציפות של $\alpha f + \beta g$ קטן שווה לסכום נק' אי הרציפות של f, g). $0 \in G$, כמוכן $\int_0^1 [\alpha f + \beta g]dx = \alpha \int_0^1 f dx + \beta \int_0^1 g dx = 0$

תרגיל הוכיחו שבכל מרחב ווקטורי מממד ∞ יש מרחב ווקטורי מממד n (לכל $n \in \mathbb{N}$)

פתרון לכל n יש וקטורים $e_1, e_2, ..., e_n$ ב.ת.ל אחרת ממד המרחב היה קטן או שווה ל n.
נגדיר $v = \{\vec{v} | \vec{v} = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i, a_i \in \mathbb{R}\}$
■

1.1 נורמה

אנו נדון בעיקר במ"ו מממד ∞ נרצה עדיין להגדיר שלמרחב יש בסיס כלומר נרצה לכתוב $\vec{v} = \sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i$ אבל זה אומר ש $\sum_{i=1}^{n} a_i e_i$ מקרב את $\vec{v}$ בשביל זה נצטרך מושג של מרחק בתוך המרחב

הגדרה יהי V מ"ו מעל שדה $\mathbb{R}$ או $\mathbb{C}$ פונקציה $\| - \| : V \to \mathbb{R}_+$ נקרא נורמה אם:

1. $\forall x \in V, \|x\| > 0$ וגם $\|X\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2. $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$, $\forall \alpha \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}$, $x \in V$

$\forall x, y \in V, \|x + y\| = \|x\| + \|y\|$
המרחב יוגדר ע"י $d(x,y) = \|x - y\|$

יש תכונה נוספת אפשרית למ"ו הנקראת מ"פ מושג זה נותן "גאומטריה" למרחב.

הגדרה יהי V מ"ו מעל $\mathbb{C}$ או $\mathbb{R}$. מ"פ ב- V הנה פעולה בינרית

$$< -, - >: V \times V \mapsto \mathbb{C}$$

המקיים:

1. $\forall v \in V < v, v > \geq 0$ וגם $v = 0 \Leftrightarrow < v, v > = 0$
2. $< \alpha u + \beta v, w > = \alpha < u, w > + \beta < v, w >$, $\forall u, v, w \in V$, $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$

3. $< u,v >= \overline{< v,u >}$

מ"פ כנורמה כל מ"פ יוצרת נורמה ע"י $\|x\| = \sqrt{< x,x >}$ אז אי שיוון המשולש מוכיחים בעזרת אי שוויון ק"ש $| < v,u > | \leq \sqrt{< v,v >}\sqrt{< u,u >}$

תרגיל בדוק אם התבניות הבאות מגדירות נורמה על $c[a,b]$

1. $\|f\| = \int_a^b |f(x)|dx$
2. $\|f\| = \int_a^b |f(x)|^2 dx$

פתרון

1. ראשון

(א) $\|f\| \geq 0$ מה קורה אם $\|f\| = 0$ נניח כי $\int_0^1 |f(x)|dx = 0$ ונניח כי יש x_0 כך ש $|f(x_0)| > 0$ אזי מהרציפות $|f|$, נובע שיש סביב של x_0 בה $|f(x)| > \frac{|f(x_0)|}{2}$ לכן

$$0 = \int_a^b |f(x)|dx \geq \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} |f(x)|dx \geq \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} |f(x_0)/2|dx = \frac{|f(x_0)|}{2}2\varepsilon > 0$$

בסתירה להנחה.

(ב) $\|\alpha f\| = \int_a^b |\alpha f|dx = |\alpha| \int_a^b |f|dx = |\alpha|\|f\|$

(ג) אי שוויון המשולש

$$\begin{aligned}
\|f+g\| &= \int_a^b |f(x)+g(x)|dx \\
&\leq \int_a^b (|f(x)|+|g(x)|)dx \\
&= \int_a^b |f(x)|dx + \int_a^b |g(x)|dx = \|f\|+\|g\|
\end{aligned}$$

2. שני: $\|\alpha f\| = \int_a^b |\alpha f|^2 dx = |\alpha|^2 \int_a^b |f|dx = |\alpha|^2\|f\|$ לכן זה לא נורמה

תרגיל הראו כי אם הנורמה מוגדרת ממ"פ אזי. הסיקו כי הנורמה הראשונה איננה מושרת ממ"פ (רמז: $sin^2x + cos^2x = 1$)

פתרון $\|u-v\| + \|u+v\| = 2 < u,u > +2 < v,v >= 2(\|u\|^2 + \|v\|^2)$ לכן כדי להראות שהנורמה שקיבלנו איננה מושרת ממ"פ נוכיח ששוויון זה אינו מתקיים לכל u,v נציב $f(x) = \sin x, g(x) = \cos x$ וגם $[a,b] = [0,2\pi]$ וגם

$$\begin{aligned}
\|f\| &= \int_0^{2\pi} \sin^2 x dx = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(1-\cos 2x)dx = \pi \\
\|g\| &= \int_0^{2\pi} \cos^2 x dx = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(1+\cos 2x)dx = \pi \\
\|g+f\| &= \int_0^{2\pi} 1dx = 2\pi \\
\|g-f\| &= \int_0^{2\pi} |\cos^2 x - \sin^2 x|dx = \int_0^{2\pi} |\cos 2x|dx = \int_0^{4\pi} |\cos x|\frac{dx}{2} = 4 \\
\Rightarrow \|g+f\| + \|g-f\| &= 16 + 4\pi^2 \neq 4\pi^2 = 2(\|f\|^2 + \|g\|^2)
\end{aligned}$$

תרגיל תהא $p(x)$ פונ' ממשית ורציפה בקטע $[a,b]$ נגדיר לכל $f,g:[a,b]\mapsto\mathbb{C}$ רציפות $<f,g>=\int_a^b p(x)f(x)\overline{g(x)}dx$

1. הראו שאם $p(x)>0$ לכל $x\in[a,b]$ זה מ"פ על $c[a,b]$
2. האם התנאי $p(x)\geq 0$ מספיק לכך שזו מ"פ?
3. האם התנאי $p>0$ פרט למספר סופי של נק' מספיק
4. נאמר ששתי מ"פ פרופ' אם יש K כך ש $<f,g>_1=k<b,g>_2$ הוכיחו שיש ∞ מ"פ לא פרופ' על $c[a,b]$

פתרון

1. נפתור

(א) לינאריות

$$\begin{aligned}<\alpha f+\beta g,h> &= \int_a^b p(x)(\alpha f+\beta g)\overline{h(x)}dx\\ &= \alpha\int_a^b p(x)f(x)\overline{h(x)}dx+\beta\int_a^b p(x)g(x)\overline{h(x)}dx\end{aligned}$$

(ב) $<f,g>=\int_a^b p(x)f(x)\overline{g(x)}dx=\int_a^b\overline{\overline{p(x)b(x)}g(x)}dx=\int_a^b\overline{p(x)g(x)\overline{b(x)}}dx=\overline{<g,f>}$ כי $\overline{p(x)}=p(x)$

(ג) $<f,f>=\int_a^b p(x)|f(x)|^2dx\geq 0$ כאשר $p(x)\geq 0$ נשים לב כי $p(x)|f(x)|^2\geq 0$ אבל $p(x)|f(x)|^2=0\Leftrightarrow <f,f>=0$ ואז $\forall x\in[a,b],|b(x)|^2=0\Leftrightarrow b\equiv 0$

2. לא נכון לדוגמא $p(x)\equiv 0$ ואז לכל $f(x)$ מתקיים $<f,f>=0$
3. כמו ב 1 $|f(x)|^2=0$ פרט למספר סופי של הנק'. מרציפות f אז $f\equiv 0$. לכן זה מגדיר ממ"פ
4. מתי $<f,g>_1=k<f,g>_2$. נניח שהם פרופ' אז

$$\int p_1(x)f(x)\overline{g(x)}dx = \int kp_2(x)f(x)\overline{g(x)}dx$$

כלומר $\int(p_1(x)-kp_2(x))f(x)\overline{h(x)}dx=0$ נבחר $g(x)=p_1(x)-kp_2(x)$ וגם $f(x)=1$

$$0 = \int(p_1(x)-kp_2(x))f(x)\overline{g(x)}dx=\int|p_1(x)-kp_2(x)|^2dx$$

לכן $p_1(x)=kp_2(x)$ בשביל ליצר ∞ מ"פ לא פרופ' נבחר פונקציותp לא פרופ'

■

תרגיל בדקו אילו מהתבניות הבאות מגדירות מ"פ

1. $<f,g>=f(0)\overline{g(0)}+f(1)\overline{g(1)}$
2. $<f,g>=f(0)\overline{g(0)}+f(1)\overline{f(1)}+f'(0)\overline{g'(0)}$

   (א) על $c^1[0,1]$

   (ב) על $sp\{1,x,x^2\}$

פתרון

1. $<f,f>=|f(0)|^2+|f(1)|^2\geq 0$ מתקיים שעבור $f(x)=x(x-1)=x^2-x$ $<f,f>=0$ אבל $f\neq 0$

2. נבדוק חיוביות $< f,f >= |f(0)|^2 + |f(1)|^2 + |f'(0)|^2 \geq 0$

(א) עבור $f(x) = x^2(1-x)$ מקבלים $< f,f >= 0$ עבור $f \neq 0$ לכן זאת לא מ"פ.

(ב) $f(x) = a + bx + cx^2, f'(x) = b + 2cx$ לכן

$$< f,f >= |a|^2 + |b|^2 + |a+b+c|^2 \quad = \quad 0$$

$$\begin{matrix} a = 0 \\ b = 0 \\ a+b+c = 0 \end{matrix} \quad \Leftarrow \quad f \equiv 0$$

הטענות האחרות:

$$\begin{aligned} < \alpha f + \beta g, h > &= (\alpha f + \beta g)(0)\overline{h(0)} + (\alpha f + \beta g)(1)\overline{h} + (\alpha f + \beta g)'(0)\overline{h'(0)} \\ &= \alpha f(0)\overline{h(0)} + \beta g(0)\overline{h(0)} + \alpha f(1)\overline{h(1)} + \beta g(1)\overline{h(1)} + \alpha f'(0)\overline{h'(0)} + \beta g'(0)\overline{h'(0)} \\ &= \alpha < f,h > + \beta < g,h > \end{aligned}$$

באותו אופן $< f,g >= \overline{< g,f >}$

1.2 ניצבות ומע' א"ג/א"נ

הגדרה יהי V מ,ו עם מ"פ.

1. נאמר כי u ו-v ניצבים אם $< u,v >= 0$
2. נאמר כי מע' של איברים, $\{u_n\}$, היא א"ג אם המע' אינה מכילה את וקטור האפס וכל שני איברים ניצבים
3. נאמר שהמע', $\{u_n\}$, היא א"נ אם היא א"ג ו-$\forall n \in \mathbb{N}, \|u_n\| = 1$

תרגיל הוכיחו שאם המע', $\{u_n\}$,היא א"ג אזי אזי, $\{u_n\}$, ב.ת.ל (כלומר כל מספר סופי של וקטורים בתוך, $\{u_n\}$, ב.ת.ל)

פתרון יהיו, $v_1, .., v_k$ וקטורים במע' נניח כי

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i &= 0 \\ < \sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i, v_j > &= < 0, v_j > \end{aligned}$$

מצד שני

$$< \sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i, v_j > \quad = \quad \sum_{i=1}^{k} \alpha_i < v_i, v_j >= \alpha_j < v_j, v_j >$$

וגם $< v_j, v_j > \neq 0$ לכן לכל $1 \leq j \leq k$, $\alpha_j = 0$. ולכן ב.ת.ל.

תרגיל נסמן ב $C'[-a,a]$ (סימון אקראי), את אוסף הפונקציות הרציפות והאי-זוגיות בקטע $[-a,a]$. ונסמן ב $C''[-a,a]$ (סימון אקראי), את אוסף הפונקציות הרציפות והזוגיות בקטע $[-a,a]$. הוכיחו כי במ"פ

$$< f,g > \quad = \quad \int_{-a}^{a} f(x)\overline{g(x)}dx$$

המרחבים הנ"ל ניצבים כלומר לכל $f \in C', g \in C''$ מתקיים $< f,g >= 0$

הוכחה

$$< f,g > \quad = \quad \int_{-a}^{a} f\overline{g}dx$$

נשים לב כי $f\overline{g}$ אי-זוגית לכן $< f,g >= 0$

1.2.1 בסיסים א"נ

אנו מעוניינים לומר כי $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ הנו בסיס למרחב V ולכתוב שכל $v \in V$ ניתן לכתיבה כ $v = \sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n$

הגדרה

1. נאמר כי w_n שואף ל w בנורמה אם $\lim_{n\to\infty} \|w_n - w\| = 0$
2. תהי $u_1, .., u_n, ..$ סדרה אינסופית של וקטורים ב-V נאמר כי $\sum_{k=1}^{\infty} a_k u_k$ מתכנס (בנורמה) ל-V אם $\lim_{n\to\infty} \|v - \sum_{k=1}^{\infty} a_k u_k\| = 0$.

זה נותן לנו משמעות לבסיס נחפש מע' ב.ת.ל ושניתן כל וקטור לרשום בצורה יחידה ע"י $\sum_{k=1}^{\infty} a_k u_k$

טענה נניח כי ה $\|\|$ נוצרת ע"י מ"פ ונניח כי w_n שואף ל w בנורמה וגם v_n שואף לv בנורמה אזי $< w_n, v_n > \to < w, v >$ בנוסף $\|w_n\| \to \|w\|, \|v_n\| \to \|v\|$

מסקנה אם $w = \sum \alpha_k u_k, v = \sum \beta_j u_j$ אזי $< w, v > = \sum_{k,j=1}^{\infty} \alpha\overline{\beta} < u_k, u_j >$ **הסבר** $w_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k u_k, v_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k u_k$ לכן

$$\begin{aligned} < w_n, v_n > &= < \sum_{k=1}^{n} \alpha_k u_k, \sum_{k=1}^{n} \alpha_k u_k > \\ &= \sum_{k,j=1}^{n} \alpha\overline{\beta} < u_k, u_j > \to \sum_{k,j=1}^{\infty} \alpha\overline{\beta} < u_k, u_j > \end{aligned}$$

בממד סופי אם $\{u_k\}$ מע' א"ג פורסת אזי $\forall v \in V, v = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k u_k$ כאשר $\alpha_k = \frac{<v,u_k>}{\|u_k\|}$

תרגיל הוכיחו כי אם $\{u_k\}$ מע' א"נ פורסת במרחב ∞ ממדי אזי $v = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k u_k$ כאשר $\alpha_k = \frac{<v,u_k>}{\|u_k\|}$

הוכחה $< v, u_j > = < \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k u_k, u_j > = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k < u_k, u_j > = \alpha_j \|u_j\|^2$ לכן $\alpha_j = \frac{<v,u_j>}{\|u_j\|^2}$

הגדרה מע' א"נ נקראת סגורה אם לכל $u \in V$ מתקיים

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} < u, e_n > e_n$$

משפט תנאים שקולים

1. שוויון פרסוול

$$\forall u \in V, \|u\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} | < u, e_n > |^2 \qquad (1)$$

2. שוויון פרסוול המוכלל $< u, v > = \sum_{n=1}^{\infty} < u, e_n > \overline{< v, e_n >}$

הערה נעיר כי הטור (1) מתכנס בעזרת אי שוויון בסל: אם $\{u_n\}$ מע' א"נ כלשהי אזי $\sum_{n=1}^{\infty} | < x, u_n > |^2 \le \|x\|^2$

הגדרה מע' א.נ. $\{e_n\}$ תקרא שלמה אם הוקטור היחיד שניצב לה הוא אפס.

תרגיל אם $\{u_n\}$ סגורה אז היא שלמה

הוכחה נניח כי u ניצב. משוויון פרסוול

$$\begin{aligned} \|u\|^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} | < u, e_n > |^2 = 0 \\ \Rightarrow \|u\| &= 0 \\ \Rightarrow u &= 0 \end{aligned}$$

הערה לא כל מע' שלמה היא סגורה.

תרגיל תהי V ממ"פ נתונה מע' א"נ שלמה $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ המע' $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתקבלת מהמע' $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ ע"י החלפת e_2, e_3

$$\begin{aligned} u_2 &= \frac{e_2 - e_3}{\sqrt{2}} \\ u_3 &= \frac{e_2 + e_3}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

האם המ"ע א"נ

פתרון $\|u_n\|^2 = \|e_n\|^2 = 1$ וגם

$$\begin{aligned} \|u_2\| &= \|\frac{1}{\sqrt{2}}(e_2 - e_3)\|^2 \\ &= \frac{1}{2}(\|e_2\|^2 + \|e_3\|^2) = 1 \end{aligned}$$

כמוכן אם $v \perp u$ אז $\|u+v\| = \|u\|^2 + \|v\|^2$
כנ"ל לגבי $\|u_3\| = 1$.
נבדוק ניצבות:

$$\begin{aligned} j,k \neq 2,3 < u_j, u_k > &= < e_j, e_k >= 0 \\ j,k \neq 2,3 < u_2, u_k > &= < \frac{1}{\sqrt{2}}(e_2 - e_3), e_k >= 0 \\ < u_2, u_3 > &= < \frac{1}{\sqrt{2}}(e_2 - e_3), \frac{1}{\sqrt{2}}(e_2 + e_3) >= 0 \end{aligned}$$

באותו אופן $< u_3, u_k >= 0$.
נניח כי $\{u_j\} \perp v$ לכל $j \neq 2,3$

$$0 =< v, u_j > \;=\; < v, e_3 >$$

וכן

$$\begin{aligned} 0 =< v, u_2 > &= \frac{1}{\sqrt{2}}(< v, e_2 > - < v, e_3 >) \Rightarrow < v, e_2 >= 0 \\ 0 =< v, u_3 > &= \frac{1}{\sqrt{2}}(< v, e_2 > + < v, e_3 >) \Rightarrow < v, e_3 >= 0 \end{aligned}$$

לכן אומנם $\{e_j\} \perp v$ אז $v = 0$.אז $\{u_j\}$ שלמה.

תרגיל מבחינה תהי $\{e_n\}$ מע' א"נ סגורה.יהי f וקטור כך ש $\forall n \in \mathbb{N}, < f, e_n >= \frac{1}{n}$

1. חשבו את $\|f\|$
2. חשבו את $\|f+e_2\|$

פתרון

1. משוויון פרסוול (מע' סגורה) $\|f\|^2=\sum_{k=1}^{\infty}|<f,e_n>|^2=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$
לכן $\|f\|=\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}}$
2. נפתור

$$\begin{aligned}\|f+e_2\| &= <f+e_2,f+e_2> \\ &= \|f\|^2+<f,e_2>+<e_2,f>+1 \\ &= 2+\|f\|^2\end{aligned}$$

הערה לא קיימת מע' א"נ סגורה $\{e_n\}$ כך שיש וקטור f המקיים

$$<f,e_n> = \sqrt{\frac{1}{n}}$$

אחרת אם היה כזה אזי משוויון פרסוול הנורמה היא אינסופית. לא הנו צריכים סגורה, מספיק מ"ע א"נ כללית וזאת כי

$$\sum_{n=1}^{\infty}|<f,e_n>|^2 \leq \|f\|^2$$

תרגיל מצאו

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}x\sin(nx)dx = 0$$

פתרון

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}x\sin(nx)dx &= \left(-x\frac{\cos nx}{n}\right)|_{-\pi}^{\pi}+\frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)dx \\ &= \frac{-1}{n}\left((-1)^n\pi-(-1)^n(-\pi)\right)+0 \\ &= \frac{2\pi}{n}(-1)^n\to 0\end{aligned}$$

פתרון ב תחת המ"פ $\langle f,g\rangle=\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\overline{g(x)dx}$ המע' $\{\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx\}$ א"נ ולכן לפי אי שוויון בסל

$$\sum\left|<b,\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx>\right|^2 < \infty$$
$$<b,\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx> \to 0$$

וזה הגבול שלנו

$$\sum|\langle b,e_n\rangle|^2 \leq \|b\|^2$$

תרגיל מצאו

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\sin^2(nx)dx &= 0\\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos(2nx)\end{aligned}$$

2 טורי פוריה

2.1 טורי פוריה טריגונומטריות

אנו מדברים על מע' $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}},\sin nx,\cos nx\right\}$ תחת מ"פ של אינטגרל. המע' שלנו יוצאת א"נ לכן לכל $f\in E$ נוכל להתאים וקטור שבמרחב שלנו

$$\begin{aligned}f(x) &\sim \frac{a_0}{2}+\sum\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right)\\ a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos\left(nx\right)dx\\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin\left(nx\right)dx\end{aligned}$$

תרגיל מצאו טור פורייה לפונקציות

1. $f(x)=x$
2. $f(x)=\frac{1}{2}+\sin^2 x$
3. $f(x)=\left|\frac{x}{a}\right|, a\neq 0$

פתרון

1. נשים לב כי

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos\left(nx\right)dx$$

האינטגרנד אי-זוגי ולכן $a_n=0$.

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\sin\left(nx\right)dx=\frac{2(-1)^n}{n}$$

לכן

$$x \sim 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin\left(nx\right)$$

2. $f(x)=\frac{1}{2}+\sin^2 x=1-\frac{1}{2}\cos(2x)$ אילו איברי במע' הא"נ לכן זהו טור פוריה בעצמו.

3. ראשית הפונקציה זוגית לכן $b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{f(x)}{n}\right|\sin(nx)\,dx$ האינטגרנד זוגי לכן האינטגרל שווה 0.

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx \\
&= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx \\
a_0 &= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{x}{|a|}dx = \frac{x^2}{\pi|a|}|_0^{\pi} \\
&= \frac{\pi}{|a|} \\
a_n &= \frac{2}{\pi|a|}\int_0^{\pi} x\cos(nx)\,dx \\
&= \frac{2}{\pi|a|}\left[\left(x\frac{\sin nx}{n}\right)|_0^{\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin(nx)\,dx\right] \\
&= \frac{2}{\pi|a|}\frac{1}{n}\cos(nx)|_0^{\pi} \\
&= \frac{2}{\pi|a|}\frac{(-1)^n-1}{n^2} \\
&= \begin{cases} 0 & n=2k \\ \frac{-4}{\pi|a|n^2} & n=2k+1 \end{cases} \\
\left|\frac{x}{a}\right| &= \frac{\pi}{2|a|} + \sum_{\substack{n=1 \\ n=2m+1}}^{\infty} \frac{-4}{\pi|a|n^2}\cos(nx) \\
&= \frac{\pi}{2|a|} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{-4}{\pi|a|(2k-1)^2}\cos((2k-1)x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx \\
a_0 &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{x}{|a|}dx = \left.\frac{x^2}{\pi|a|}\right|_0^{\pi} = \frac{\pi}{|a|} \\
n\ge 1, a_n &= \frac{2}{\pi|a|}\int_0^{\pi} x\cos(nx)\,dx \\
&= \frac{2}{\pi|a|}\left[\left.\left(x\frac{\sin(nx)}{n}\right)\right|_0^{\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin(nx)\,dx\right] \\
&= \frac{2}{\pi|a|}\left.\left(\frac{1}{n}\frac{\cos(nx)}{n}\right)\right|_0^{\pi} = \begin{cases} 0 & n=2k \\ \frac{-4}{\pi|a|n^2} & n=2k+1 \end{cases}
\end{aligned}$$

תרגיל תהא $f\in E[-\pi,\pi]$ מגדיר $g(x)=f(x+\pi)$ נניח $f\sim\frac{a_0}{2}+\sum(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ מצא טור פורייה ל-g בעזרת טור פוריה של f.

פתרון מבחינתנו נוכל להניח ש f מוגדרת על כל הישר ומחזורית. לכן $g\in[-\pi,\pi]$

$$\begin{aligned}
g &\sim \frac{\tilde{a_0}}{2}+\sum\left(\tilde{a_n}\cos nx+\tilde{b_n}\sin nx\right)\\
\tilde{a_0} &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(x)dx\\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+\pi)dx=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi}f(t)dt\\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)dt=a_0\\
n\geq 1, a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+\pi)\cos(nx)\,dx\\
&= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi}f(t)\cos(nt-n\pi)\,dt\\
&= \frac{(-1)^n}{\pi}\int_{0}^{2\pi}f(t)\cos(nt)\,dt\\
&= \frac{(-1)^n}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos(nt)\,dt\\
&= (-1)^n a_n\\
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+\pi)\sin(nx)\,dx\\
&= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi}f(t)\sin(nt-n\pi)\,dt\\
&= \frac{(-1)^n}{\pi}\int_{0}^{2\pi}f(t)\sin(nt)\,dt\\
&= \frac{(-1)^n}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin(nt)\,dt\\
&= (-1)^n b_n
\end{aligned}$$

לכן

$$g \sim \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)\right)$$

הגדרה מע' נוספת במ"פ אינטגרלית הנה מע' $\left\{e^{inx}\right\}_{n\in\mathbb{Z}}$

תכונות

1. $\left(e^{ix}\right)^n=e^{inx}$
2. $\overline{e^{ix}}=e^{-ix}$
3. $e^{ix}e^{iy}=e^{i(x+y)}$
4. $\frac{d}{dx}\left(e^{ix}\right)=ie^{ix}$

לכל $f\in E[-\pi,\pi]$ נתאים טור פוריה מורכב ע"י

$$\begin{aligned}
f(x) &\sim \sum_{n=-\infty}^{\infty}c_ne^{inx}\\
c_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-inx}dx
\end{aligned}$$

תרגיל התאימו טור פוריה מורכב ל $f(x) = x$

פתרון

$$\begin{aligned}
c_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x = 0 \\
c_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x e^{-inx} dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{-inx}}{in}\bigg|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{in}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx} dx\right] \\
\left(e^{in\pi} = \cos(n\pi) = (-1)^n\right) \Rightarrow &= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{-1}{in}\right)\left((-1)^n \pi - (-1)^n(-\pi)\right) \\
&= \frac{(-1)^{n+1}}{in}
\end{aligned}$$

2.2 שוויון פרסוול

המע' הטריגו' (ממשיות או מורכבות) הן מע' סגורות ב E תחת מ"פ המתאימה לכן אם

$$\begin{aligned}
f &\sim \frac{a_0}{2} + \sum (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \\
g &\sim \frac{c_0}{2} + \sum (c_n \cos nx + d_n \sin nx)
\end{aligned}$$

אזי

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx &= \frac{|a_0|}{2} + \sum \left(|a_n|^2 + |b_n|^2\right) \\
\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)} dx &= \frac{a_0\overline{c_0}}{2} + \sum (a_n c_n + b_n d_n)
\end{aligned}$$

ואם

$$\begin{aligned}
f &\sim \sum c_n e^{inx} dx \\
g &\sim \sum d_n e^{inx} dx
\end{aligned}$$

אזי

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx &= \sum |c_n|^2 \\
\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)} dx &= \sum c_n \overline{d_n}
\end{aligned}$$

תרגיל בעזרת טור פוריה של $f(x) = x$ מצאו את $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

פתרון

$$\begin{aligned} x &\sim 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin(nx)\,dx \\ \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2dx &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2} \\ \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2dx &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2dx \\ &= \frac{\pi^3}{3}\frac{2}{\pi}=\frac{2\pi^2}{3} \\ \Rightarrow\sum\frac{1}{n^2} &= \frac{\pi^2}{6} \end{aligned}$$

טריק נגדיר

$$\begin{aligned} f_{odd}(x) &= \frac{f(x)-f(-x)}{2} \\ f_{even}(x) &= \frac{f(x)+f(-x)}{2} \end{aligned}$$

מתקיים כי אם

$$\begin{aligned} f &\sim \frac{a_0}{2}+\sum(a_n\cos nx+b_n\sin nx) \\ f_{odd} &\sim \sum b_n\sin nx \\ f_{even} &\sim \frac{a_0}{2}+\sum a_n\cos nx \end{aligned}$$

בפרט

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{f(x)-f(-x)}{2}\right|^2dx &= \sum|b_n|^2 \\ \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{f(x)+f(-x)}{2}\right|^2dx &= \frac{|a_0|}{2}+\sum|a_n|^2 \end{aligned}$$

תרגיל מצאו את $\frac{|a_0|}{2}+\sum|a_n|^2$ כאשר a_n הנם מקדמי פוריה ליד ה $\cos$ של $f(x)=e^{-x}$

פתרון

$$\begin{aligned} \frac{|a_0|}{2}+\sum|a_n|^2 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{e^{-x}+e^{x}}{2}\right|^2dx \\ &= \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(e^{-2x}+2+e^{2x}\right)dx \\ &= 1+\frac{e^{2\pi}-e^{-2\pi}}{4\pi} \end{aligned}$$

2.3 משפט דריכלה

דריכלה (E') היא כל פונ' שרציפה למקוטעין והנגזרות החד צדדיות ושלא שוות במספר סופי של נק') אם $f \in E'[-\pi, \pi]$ אזי טור פוריה מתכנס בכל נק' אל $\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$ בנק' $x = \pm\pi$ יש התכנסות ל $\frac{f(\pi^-)+f(-\pi^-)}{2}$.

הצבות חשובות

1. $x = 0$ אז $\frac{a_0}{2} + \sum a_n = \frac{f(0^+)+f(0^-)}{2}$
2. $x = \pi; -\pi$ $\frac{a_0}{2} + \sum (-1)^n = \frac{f(\pi^-)+f(-\pi^-)}{2}$

תרגיל יהי $P \neq 0$ נגדיר $f_p(x) = e^{px}$ בקטע $[-\pi, \pi]$ (עם המשכה מחזורית). נתאים טור פוריה

$$f_p \quad \sim \quad \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$$

1. מצאו את a_n, b_n
2. חשבו את $\sum(|a_n|^2 + |b_n|^2)$
3. חשבו את $\frac{|a_0|^2}{2} + \sum |a_n|^2$
4. חשבו את $\sum a_n$
5. חשבו את $\sum(-1)^n a_n$

פתרון

1. מחישוב

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{e^{p\pi} - e^{-p\pi}}{\pi p} \\ n \geq 1, a_n &= \frac{(-1)^n p \left(e^{p\pi} - e^{-p\pi}\right)}{\pi(n^2 + p^2)} \\ b_n &= \frac{(-1)^{n+1} n \left(e^{p\pi} - e^{-p\pi}\right)}{\pi(n^2 + p^2)} \end{aligned}$$

2. לפי פרסוול

$$\sum \left(|a_n|^2 + |b_n|^2\right) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-2px} dx - \frac{|a_0|^2}{2}$$

3. כמקודם

$$\frac{|a_0|^2}{2} + \sum |a_n|^2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{e^{px} - e^{-px}}{2} \right|^2 dx$$

4. $b \in E'$ מדריכלה

$$\begin{aligned} \frac{a_0}{2} + \sum a_n &= \frac{f(0^+) + f(0^-)}{2} \\ &= f(0) = 1 \end{aligned}$$

5. מדריכלה $x=\pi$

$$\begin{aligned}\frac{a_0}{2}+\sum(-1)^n a_n &= \frac{f(\pi^+)+f(\pi^-)}{2}\\ &= \frac{e^{p\pi}+e^{-p\pi}}{2}\end{aligned}$$

תרגיל תהי $f(x)=\begin{cases}0 & 0\le x\le\pi\\ x+\pi & -\pi\le x<0\end{cases}$

1. התאימו ל-f טור פורייה
2. נגדיר $g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx$ כאשר b_n הנם המקדמים של $\sin nx$בפתוח של f לטור פורייה. שרטטו את g בקטע $[-\pi,\pi]$.
3. חשבו את $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$

פתרון

1. נחשב

$$\begin{aligned}a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}=\frac{1}{\pi}\left.\frac{(x+\pi)^2}{2}\right|_{-\pi}^{0}\\ &= \frac{\pi}{2}\\ a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(x+\pi)\cos(nx)\,dx\\ &= \left.\frac{\sin(nx)}{n\pi}(x+\pi)\right|_{-\pi}^{\pi}-\int_{-\pi}^{0}\frac{\sin(nx)}{n\pi}dx\\ &= \left.\frac{\cos(nx)}{n^2\pi}\right|_{-\pi}^{0}\\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(x+\pi)\sin(nx)\,dx\\ &= \left.-(x+\pi)\frac{\cos(nx)}{n\pi}\right|_{-\pi}^{0}\\ &= -\frac{1}{n}\end{aligned}$$

2. נגדיר $h\sim\sum b_n\sin(nx)\Rightarrow h(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}$. אבל $f\in E[-\pi,\pi]\,,f\in E'[-\pi,\pi]$ לכן $h\in E'[-\pi,\pi]$ ואז לפי דריכלה הטור פוריה שלה מתכנס נק'. כלומר g מוגדרת ו $g(x)=\frac{h(x+)+h(x-)}{2}$ (משפט דריכלה) נציב בנק'

$$f(-x) = \begin{cases}0 & -\pi\le x\le 0\\ -x+\pi & 0<x\le\pi\end{cases}$$

לכן

$$h(x) = \begin{cases}\frac{x-\pi}{2} & 0<x<\pi\\ 0 & x=0\\ \frac{x+\pi}{2} & -\pi\le x<0\end{cases}$$

קיבלנו ש

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x-\pi}{2} & 0 \le x \le \pi \\ \frac{x+\pi}{2} & -\pi < x < 0 \\ 0 & x = \pm\pi, 0 \end{cases}$$

3. ראינו כבר ש $f(x) \sim \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{n}\sin(nx) + \frac{2}{\pi(2n-1)^2}\cos((2n-1)x)$
ע"פ דריכלה

$$\begin{aligned} \frac{f(0+)+f(0-)}{2} &= \frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} \\ \frac{f(0+)+f(0-)}{2} &= \frac{0+\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

לסיכום

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} &= \frac{\pi^2}{8} \\ \left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}\right) \Rightarrow &= \frac{3}{4}\frac{\pi^2}{6} \end{aligned}$$

2.4 התכנסות במ"ש

משפט (תנאי מספיק) אם f רציפה על $[-\pi,\pi]$, $f(-\pi) = f(\pi)$ ו-$f' \in E[-\pi,\pi]$ אזי טור פוריה של f מתכנס במ"ש ל-f.

הערה חלק מתנאי המשפט הכרחים, אם טור פוריה מתכנס ל f במ"ש אזי f רציפה ו-$f(-\pi,\pi)$. החלק האחרון $f' \in E[-\pi,\pi]$ ביחד אם התנאים הכרחים הוא מספיק.

משפט (תנאי מספיק) יהא $[a,b] \subset (-\pi,\pi)$ בו f רציפה ו $f' \in E[a,b]$ אזי טור פוריה של f מתכנס ל-f במ"ש בקטע זה.

תרגיל נתונה הפונקציה $f(x) = \begin{cases} A+BX & -\pi \le x \le 0 \\ \cos x & 0 < x \le \pi \end{cases}$ עבור אלו מקדמים A, B טור פוריה של f מתכנס ל-f במ"ש?

פתרון נשים לב כי $f' \in E[-\pi,\pi]$ לכל A, B. מצאנו שיש התכנסות במ"ש אס"ם f רציפה, $f(\pi) = f(-\pi)$.

$$\begin{aligned} -1 &= A - B\pi \\ 1 &= A \\ B &= \frac{2}{\pi} \end{aligned}$$

מצאנו את המקדמים היחידים בהם הטור מתכנס במ"ש על כל המרחב.

תרגיל תהא $f(x) = \begin{cases} \cos x & -\pi \le x < 0 \\ \sin x & 0 \le x \le \pi \end{cases}$ נגדיר את $G(x)$ להיות טור פוריה של f בכל מקום בו הוא קיים.

1. מצאו מתי G מוגדר ותנו נוסחה ל-G.
2. האם ההתכנסות של G הנה במ"ש בקטע $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$?

3. אותה שאלה לקטע $\left[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right]$
4. נגדיר $h(x)=\int_{-\pi}^{x}g(t)dt+a\sin\left(\frac{x}{2}\right)$ עבור אילו ערכי a טור פוריה של h מתכנס במ"ש ל-h בקטע $[-\pi,\pi]$

פתרון

1. $f\in E'$ לכן G מוגדרת $\forall x\in[-\pi,\pi]$ $G(x)=\frac{f(x+)+f(x-)}{2}$ (משפט דריכלה)

$$G(x)=\begin{cases}\cos x & -\pi<x<0\\ \sin x & 0<x<\pi\\ \frac{1}{2} & x=0\\ -\frac{1}{2} & x=\pm\pi\end{cases}$$

2. ההתכנסות לא במ"ש כי אם הייתה התכנסות במ"ש בקטע היינו מקבלים ש-G רציפה בקטע. (טור של פונקציות רציפות)
3. בקטע זה f רציפה ו-$f'\in\left[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right]$ לכן מהמשפט שכתבנו יש התכנסות במ"ש.
4. נשים לב כי לכל a $h'\in E$ לכן טור פוריה של h מתכנס במ"ש אם"ם (כמו בתרגיל קודם) h רציפה ו $h(-\pi)=h(\pi)$. אינטגרל רציף תמיד.

$$\begin{aligned}h(\pi)&=\int_{-\pi}^{\pi}f(t)dt+a\\ h(-\pi)&=0-a\\ (h(\pi)=h(-\pi))\Leftrightarrow a&=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)dt=-1\end{aligned}$$

משפט גזירה איבר-איבר תהא f רציפה בקטע $[-\pi,\pi]$, $f(\pi)=f(-\pi)$ ו $f'\in E\,[-\pi,\pi]$.
אם

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)$$

אזי

$$f'(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}-na_n\sin(nx)+nb_n\cos(nx)$$

משפט אינטגרציה איבר-איבר תהא $f\in E\,[-\pi,\pi]$ וגם

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)$$

יהי $c\in[-\pi,\pi]$ אזי

$$(*)\int_c^x f(t)dt=\frac{a_0(x-c)}{2}+\sum\frac{a_n}{n}(\sin(nx)-\sin(nc))-\frac{b_n}{n}(\cos(nx)-\cos(nc))$$

הטור בצד ימין (בלי $\frac{a_0(x-c)}{2}$) מתכנס במ"ש בקטע $[-\pi,\pi]$

הערה מכיוון שהטור בצד הימני מתכנס ממש והוא טור פוריה של עצמו ולכן טור פוריה של $\int_c^x f(t)dt$ הוא הטור הנ"ל + טור פוריה של $\frac{a_0(x-c)}{2}$ $\Leftarrow$ טור פוריה של $\int_c^x f(t)dt$ מתכנס במ"ש לפונקציה אם"ם $a_0=0$.

הערה ניתן להציג את (*) בעזרת

$$F(x)=\int_c^x f(t)dt \quad = \quad \frac{a_0x}{2}+\sum\left(\frac{a_n}{n}\sin(nx)-\frac{b_n}{n}\cos(nx)\right)+\hat{C}$$

כאשר

$$\hat{C} \quad = \quad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(x)dx$$

תרגיל תהי $f(x)=|x|$ נניח כי

$$f \quad \sim \quad \frac{a_0}{2}+\sum a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)$$

1. מצאו את a_n, b_n
2. הוכיחו כי $\sum na_n\sin(nx)$ מתכנס לכל x בקטע $[-\pi,\pi]$ וחשבו את סכומו.

פתרון

1. $b_n=0$ כי f זוגית.

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}xdx=\pi\\
a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos(nx)\,dx=\frac{2}{\pi}\left.\frac{x\sin(nx)}{n}\right|_0^{\pi}-\frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi}\sin(nx)\,dx\\
&= \left.\frac{2\cos(nx)}{n^2\pi}\right|_0^{\pi}=\frac{2\left((-1)^n-1\right)}{\pi n^2}\\
\Rightarrow |x| &\sim \frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\left((2n-1)x\right)}{(2n-1)^2}
\end{aligned}$$

ממשפט ההתכנסות במ"ש

$$|x| \quad \sim \quad \frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\left((2n-1)x\right)}{(2n-1)^2}$$

2. מתנאי משפט הגזירות

$$f'(x) \quad \sim \quad \sum na_n\sin(nx)$$

וגם $f'(x)\in E, f''(x)\in E$ לפי דריכלה

$$\begin{aligned}
\frac{f'(x)+f'(-x)}{2} &= \sum_{n=1}^{\infty}na_n\sin(nx)\\
\sum_{n=1}^{\infty}na_n\sin(nx) &= \begin{cases}1 & 0<x<\pi\\ -1 & -\pi<x<0\\ 0 & x=0,\pm\pi\end{cases}
\end{aligned}$$

תרגיל תהי $f\in E\left[-\pi,\pi\right]$ ונתאים ל-f טור פורייה

$$f \sim \frac{a_0}{2}+\sum a_n\cos\left(nx\right)+b_n\sin\left(nx\right)$$

נגדיר

$$g\left(x\right) = \int_{-\pi}^{x}f(t)+f(-t)dt$$

התאימו ל-g טור פורייה.

פתרון

$$E\left[-\pi,\pi\right]\ni f\left(x\right)+f\left(-x\right) \sim 2\left(\frac{a_0}{2}+\sum a_n\cos\left(nx\right)\right)$$

ממשפט האינטגרציה

$$g\left(x\right) = a_0\left(x+\pi\right)+\sum a_n\frac{\sin\left(nx\right)}{n}$$

הטור שקיבלנו מתכנס במ"ש ונראה כמו טור פוריה. לכן הוא טור פורייה של עצמו. נפתח טור פורה ל x הרי

$$x \sim \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\left(-1\right)^{n+1}}{n}\sin\left(nx\right)$$

לכן מהליניאריות

$$g(x) \sim a_0\pi+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{n}+\frac{2a_0\left(-1\right)^{n-‘1}}{n}\right)\sin\left(nx\right)$$

תרגיל מצאו את טור פורייה של $f(x)=x^3$ בקטע $\left[-\pi,\pi\right]$

פתרון ידוע כי

$$\begin{aligned}
x &\sim 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{n-1}}{n}\sin\left(nx\right)\\
\frac{x^2}{2} &= \int_0^x tdt=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^n\cos\left(nx\right)}{n^2}+C\\
C &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{x^2}{2}\right)dx=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}x^2dx=\frac{\pi^2}{6}\\
x^2 &= \frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4\left(-1\right)^n}{n^2}\cos\left(nx\right)
\end{aligned}$$

זה טור פורייה, הטור מתכנס במ"ש. ממשפט האינטגרציה

$$\begin{aligned}
\frac{x^3}{3} &= \frac{\pi^2}{3}x+\sum\frac{4\left(-1\right)^n}{n^3}\sin\left(nx\right)+C_1\\
C_1 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x^3}{3}dx=0\\
\Rightarrow x^3 &= \pi^2x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{12\left(-1\right)^n}{n^3}\sin\left(nx\right)\\
x^3 &\sim 2\pi^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{n+1}}{n}\sin\left(nx\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{12\left(-1\right)^n}{n^3}\sin\left(nx\right)
\end{aligned}$$

תרגיל תהא $f \in [-\pi,\pi], f(\pi)=f(-\pi), f^{'} \in E[-\pi,\pi]$ נניח כי

$$f \sim \frac{a_0}{2}+\sum a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)$$

הוכיחו כי

$$\lim_{n\to\infty} na_n = \lim_{n\to\infty} nb_n = 0$$

האם גם ל- n^2a_n, n^2b_n הטענה נכונה?

פתרון ממשפט הגזירות

$$f^{'} \sim \sum_{n=1}^{\infty}(-na_n)\sin(nx)+(nb_n)\cos(nx)$$

לפי רימן-לבג

$$\lim_{n\to\infty} na_n = \lim_{n\to\infty} nb_n = 0$$

לגבי החלק שני אנו לא יודעים אם תנאי המשפט הגזירה מתקיימים לגבי $f^{'}$
למשל

$$x^2 \sim \frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^n}{n^2}\cos(nx)$$

אז $n^2a_n=4(-1)^n$ לא מתכנס.

תרגיל $f\in E[-\pi,\pi]$,מחזורית 2π, ומקיימת $\int_{-\pi}^{\pi}f(t)dt=0$ נגדיר $g(x)=\int_0^x f(t)dt$

1. הוכיחו כי g מחזורית 2π
2. נניח כי

$$f \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty}c_ne^{inx}$$

ול-g מתאים

$$g \sim \sum_{-\infty}^{\infty}d_ne^{inx}$$

הוכיחו כי

$$\begin{aligned}\forall x\in[-\pi,\pi], g(x) &= \sum_{-\infty}^{\infty}d_ne^{inx}\\ d_n &= \frac{c_n}{in}\end{aligned}$$

פתרון

1. נפתור

$$\begin{aligned}g(x+2\pi)-g(x) &= \int_x^{x+2\pi}f(t)dt\\ &= \int_{-\pi}^{\pi}f(t)dt=0\end{aligned}$$

2. ראשית מהסעיף הקודם

$$g(\pi) = g(-\pi)$$

כמו כן g רציפה כאינטגרל על פונקציה אינטגרבילית ו-$g^{'} \in E[-\pi,\pi]$ ולכן יש התכנסות במ"ש כלומר

$$g(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n e^{inx}$$

בנוסף ממשפט הגזירה

$$f = g^{'} \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} ind_n e^{inx}$$

מיחידות הטור

$$ind_n = c_n$$
$$n \neq 0, d_n = \frac{c_n}{in}$$

והרי $c_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 0$ לכן אין בעיה.

2.5 שינו קטע

2.5.1 טור סינוסים וטור קוסינוסים

הרעיון אנו רוצים למצוא מערכת סגורה לקטע $[0,\pi]$. ניקח $f \in [0,\pi]$ ונרחיב אותה ל $[-\pi,\pi]$ ונשתמש במידע שלנו על קטע זה. נרחיב בצורה "פשוטה" כלומר כך שנקבל טור פשוט.

הרחבה זוגית $f_{even}(x) = \begin{cases} f(x) & 0 \le x \le \pi \\ f(-x) & -\pi \le x < 0 \end{cases}$ להרחבה הזאת נתאים

$$f_{even} \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx)$$

ב- $[-\pi,\pi]$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx$$

זה טור קוסינוסים של f

הרחבה אי-זוגית $f_{odd}(x) = \begin{cases} f(x) & 0 \le x \le \pi \\ 0 & x = 0 \\ -f(-x) & -\pi \le x < 0 \end{cases}$ ונתאים לה

$$f_{odd} \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$$
$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx$$

זה טור הסינוסים.

מסקנות

1. יהי $E[0,\pi]$ מרחב הפונקציות הרציפות למקוטעין ב $[0,\pi]$ נגדיר מ"פ

$$\langle f,g\rangle = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\overline{g(x)}dx$$

אזי המערכת $\{\sin(nx)\}_{n=1}^{\infty}$ הנה מערכת א"נ סגורה. (נובע ישירות מסגירות $E[-\pi,\pi]$ ומהגדרת הסגירות)

2. באותו אופן המערכת $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}},\cos(nx)\right\}_{n=1}^{\infty}$ סגורה וא"נ באותה ממ"פ.

3. שיוויונות פרסבל

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}|f(x)|^2dx = \frac{|a_0|^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2$$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}|f(x)|^2dx = \sum_{n=1}^{\infty}|b_n|^2$$

משפטי דריכלה $f\in E^{'}[0,\pi]$

לטור סינוסים יש התכנסות ל- $\frac{f(x+)+f(x-)}{2}$ ב-$(0,\pi)$ ול-0 ב- $x=0,\pi$

לטור קוסינוסים יש התכנסות ל- $\frac{f(x+)+f(x-)}{2}$ ב-$(0,\pi)$, ב $x=0$ ל $f(0+)$ וב $x=\pi$ ל $f(\pi-)$

משפטי התכנסות במ"ש

לטור סינוסים f רציפה על $[0,\pi]$ $f(0)=f(\pi)=0$ ו-$f^{'}\in E[0,\pi]$

לטור קוסינוסים f רציפה על $[0,\pi]$ ו- $f^{'}\in E[0,\pi]$

תרגיל

1. התאימו טור סינוסים וקוסינוסים ל $f(x)=x(\pi-x)$
2. חשבו את $\sum\frac{1}{n^2}$
3. הוכיחו כי

$$\frac{\pi^3}{32} = \frac{1}{1^3}-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}-\frac{1}{7^3}+...$$

פתרון

1. טור קוסינוסים

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \left(\pi x - x^2\right) dx \\
&= \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi^3}{2} - \frac{\pi^3}{3}\right) = \frac{\pi^2}{3} \\
a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \left(\pi x - x^2\right)\cos(nx)\, dx \\
&= \frac{2}{\pi}\left[\left(\left(\pi x - x^2\right)\frac{\sin(nx)}{n}\right)\Big| - \frac{1}{n}\int_0^\pi (\pi - 2x)\sin(nx)\, dx\right] \\
&= \frac{2}{\pi n}\left[(\pi - 2x)\frac{\cos(nx)}{n} + \frac{2}{n}\int_0^\pi \cos(nx)\right] \\
&= -\frac{2}{n^2}\left((-1)^n + 1\right) \\
f(x) &\sim \frac{\pi^2}{6} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2nx)}{n^2}
\end{aligned}$$

טור הסינוסים

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \left(\pi x - x^2\right)\sin(nx)\, dx \\
&= \frac{2}{\pi}\left[\left(\pi x - x^2\right)\frac{-\cos(nx)}{n}\Big|_0^\pi + \frac{1}{n}\int_0^\pi \cos(nx)(\pi - 2x)\, dx\right] \\
&= \frac{2}{\pi n}\left[\left((\pi - 2x)\frac{\sin(nx)}{n}\right)\Big| + \frac{2}{n}\int_0^\pi \sin(nx)\, dx\right] \\
&= -\frac{4}{\pi n^3}\cos(nx)\Big|_0^\pi = \frac{4}{\pi n^3}\left(1 - (-1)^n\right) \\
f(x) &\sim \frac{8}{\pi}\sum\frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^3}
\end{aligned}$$

2. לפי פרסבל לטור סינוסים

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\pi |f(x)|^2\, dx = \frac{64}{\pi}\sum\frac{1}{(2n-1)^6}$$

לכן

$$\sum\frac{1}{(2n-1)^6} = \frac{\pi^6}{960}$$

נשים לב כי

$$\begin{aligned}
\sum\frac{1}{n^6} &= \sum\frac{1}{(2n)^6} + \sum\frac{1}{(2n-1)^6} \\
\sum\frac{1}{(2n)^6} &= \frac{1}{64}\sum\frac{1}{n^6} \\
\Rightarrow \sum\frac{1}{n^6} &= \frac{1}{1-\frac{1}{64}}\sum\frac{1}{(2n-1)^6} = \frac{\pi^6}{945}
\end{aligned}$$

3. נשתמש בדריכלה (לטור הסינוסים) עבור $x=\frac{\pi}{2}$ ונקבל

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{2}\left(\pi-\frac{\pi}{2}\right) &= \frac{8}{\pi}\sum\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^3}\\ \frac{\pi^3}{8} &= \sum\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^3}\end{aligned}$$

וזה מה שרצינו

תרגיל

1. פתחו את הפונקציה $b(x)=\cos x$ לטור קוסינוסים בקטע $[0,\pi]$
2. נגדיר $g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin(nx)$ הוכיחו ש-g מוגדרת לכל $x\in[0,\pi]$ וחשבו את ערכה
3. האם הטור שמייצג את g מתכנס במ"ש?

פתרון

1. נפתור

$$\begin{aligned}b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos x\sin(nx)\,dx\\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\sin(n+1)x+\sin(n-1)x)\,dx\\ b_1 &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(2x)\,dx=0\\ (n>1)\Rightarrow b_n &= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos(n+1)x}{n+1}-\frac{\cos(n-1)x}{n-1}\right]\Bigg|_0^{\pi}\\ &= \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n-1}\right)(1-(-1)^n)\\ &= \frac{2n}{\pi(n^2-1)}(1-(-1)^n)\\ \cos(x) &\sim \sum_{n=2}^{\infty}\frac{4(2n-1)}{\pi\left((2n-1)^2-1\right)}\sin((2n-1)x)\end{aligned}$$

2. $f\in E'[0,\pi]$ לכן לפי דריכלה g מוגדרת

$$g(x)=\begin{cases}\cos x & x\in(0,\pi)\\ 0 & x=0,\pi\end{cases}$$

3. ההתכנסות לא במ"ש כי g לא רציפה.

תרגיל תהי $f\in E'[0,\pi]$ יהי $\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin(nx)$ טור הסינוסים של f. יהי $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(nx)$ טור הקוסינוסים של f. נגדיר $g(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(nx)+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin(nx)$ מצאו את g לכל $x\in[-\pi,\pi]$

פתרון נשתמש בדריכלה

$$\begin{aligned}
\sum b_n \sin(nx) &= \begin{cases} \frac{f(x+)+f(x-)}{2} & 0<x<\pi \\ 0 & x=0,\pm\pi \\ -\frac{f((-x)+)+f((-x)-)}{2} & -\pi<x<0 \end{cases} \\
\frac{a_0}{2}+\sum a_n \cos(nx) &= \begin{cases} \frac{f(x+)+f(x-)}{2} & 0<x<\pi \\ \frac{f((-x)+)+f((-x)-)}{2} & -\pi<x<0 \\ \frac{f(0+)+f(0+)}{2} & x=0 \\ \frac{f(\pi-)+f(\pi-)}{2} & x=\pm\pi \end{cases} \\
g(x) &= \begin{cases} f(x+)+f(x-) & 0<x<\pi \\ f(0+) & x=0 \\ f(\pi-) & x=\pm\pi \\ 0 & -\pi<x<0 \end{cases}
\end{aligned}$$

2.5.2 טורי פורייה בקטע כללי

הגדרה יהי $E[a,b]$ מרחב הפונקציות הרציפות למקוטעין מעל $[a,b]$. ביחס למ"פ

$$\langle f,g\rangle=\frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx$$

המערכת

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2}},\cos\left(\frac{2}{b-a}n\pi x\right),\sin\left(\frac{2}{b-a}n\pi x\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$$

הנה מערכת א"נ סגורה. לכל $f\in E[a,b]$ נתאים טור פורייה ע"י

$$\begin{aligned}
f &\sim \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\left(\frac{2n\pi x}{b-a}\right)+b_n\sin\left(\frac{2n\pi x}{b-a}\right) \\
a_n &= \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\cos\left(\frac{2n\pi x}{b-a}\right)dx \\
b_n &= \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\sin\left(\frac{2n\pi x}{b-a}\right)dx
\end{aligned}$$

כל המשפטים עוברים לכאן.

הגדרה ביחס למ"פ $\langle f,g\rangle=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx$ המערכת

$$\left\{e^{i\frac{2n\pi x}{b-a}}\right\}_{n\in\mathbb{Z}}$$

א"נ סגורה. לכל $f\in E[a,b]$ נתאים טור פורייה

$$\begin{aligned}
f &\sim \sin\sum_{n=\mathbb{Z}} c_n e^{i\frac{2n\pi x}{b-a}} \\
c_n &= \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)e^{-i\frac{2n\pi x}{b-a}}dx
\end{aligned}$$

תרגיל נתונה הפונקציה $f(x)=\sin x$ בקטע $[0,\pi]$

1. התאימו ל f טור פוריה
2. חשבו את הסכומים $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}$ ו- $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n^2-1)^2}$

פתרון

1. $a=0,b=\pi$ המערכת היא $\frac{2}{b-a}=\frac{2}{\pi}$, $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}},\cos(2nx),\sin(2nx)\right\}$

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x dx=\frac{4}{\pi}\\
a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\cos(2nx)\,dx\\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left[\sin(2n+1)x-\sin(2n-1)x\right]dx\\
&= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos(2n+1)x}{2n+1}+\frac{\cos(2n-1)x}{2n-1}\right]\Big|_0^{\pi}\\
&= \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\left((-1)^{2n+1}-1\right)\\
&= \frac{-2}{\pi}\left(\frac{2}{4n^2-1}\right)=\frac{-4}{\pi\left(4n^2-1\right)}\\
b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(x)\sin(2nx)\,dx\\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin x\sin(2nx)\,dx=0
\end{aligned}$$

לכן ע"פ א"ג אברי הבסיס הסטנדרטי $b_n=0$.

$$\sin x \sim \frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n^2-1)}\cos(2nx)$$

2. לפי דריכלה ב $x=0$

$$\begin{aligned}
\frac{\sin(0+)+\sin(\pi-)}{2} &= \frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n^2-1)}\\
\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n^2-1)} &= \frac{2}{\pi}\\
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n^2-1)} &= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

לפי פרסבל

$$\begin{aligned}
\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin^2 x dx &= \frac{\frac{16}{\pi^2}}{2}+\frac{16}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(4n^2-1\right)^2}\\
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(4n^2-1\right)^2} &= \frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

תרגיל תהי $f(x)=\begin{cases}A\sin(\omega x) & 0<x<\frac{\pi}{2}\\ 0 & \frac{T}{2}<x<T\end{cases}$ התאימו טור פוריה מורכב ל-f בקטע $[0,T]$

פתרון $\omega_0=\frac{2\pi}{T},a=0,b=T,\frac{1}{b-a}=\frac{1}{T}$

$$\begin{aligned}
c_n &= \frac{1}{T}\int_0^{,\frac{T}{2}} A\sin(\omega_0 x)\,e^{-i\frac{2}{T}\pi nx}dx\\
&= \frac{A}{2iT}\int_0^{,\frac{T}{2}}\left(e^{i\omega_0 x}-e^{-i\omega_0 x}\right)e^{-i\omega_0 nx}dx\\
&= \frac{A}{2iT}\int_0^{,\frac{T}{2}}\left(e^{i\omega_0 x}e^{-i\omega_0 nx}-e^{-i\omega_0 x}e^{-i\omega_0 nx}\right)dx\\
&= \frac{A}{2iT}\int_0^{,\frac{T}{2}}\left(e^{i\omega_0(1-n)x}-e^{-i\omega_0(1+n)x}\right)dx\\
c_1 &= \frac{A}{2iT}\int_0^{,\frac{T}{2}}\left[1-e^{-i\omega_0 2x}\right]dx\\
&= \frac{A}{2iT}\left(\frac{x}{2}+\frac{e^{-i\omega_0 2x}}{i\omega_0 2}\right)\Bigg|_0^{\frac{T}{2}}\\
&= \frac{A}{2iT}\left(\frac{T}{2}+\frac{e^{-i2\pi}}{i\omega_0 2}-1\right)=\frac{A}{4i}\\
c_{-1} &= \frac{A}{2iT}\int_0^{,\frac{T}{2}}\left[e^{i\omega_0 2x}-1\right]dx\\
&= \frac{A}{2iT}\left(\frac{e^{i\omega_0 2x}}{i\omega_0 2}-\frac{x}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{T}{2}}\\
&= \frac{A}{2iT}\left(-\frac{T}{2}-\frac{e^{i2\pi}}{i\omega_0 2}+1\right)=-\frac{A}{4i}\\
c_n &= \frac{A}{2iT}\int_0^{,\frac{T}{2}}\left(e^{i\omega_0(1-n)x}-e^{-i\omega_0(1+n)x}\right)dx\\
&= \frac{A}{2iT}\left(\frac{e^{i\omega_0(1-n)x}}{i\omega_0(1-n)}+\frac{e^{-i\omega_0(1+n)x}}{i\omega_0(1+n)}\right)\Bigg|_0^{\frac{T}{2}}\\
&= \frac{-A}{4\pi}\left(\frac{(-1)^{1-n}}{(1-n)}+\frac{(-1)^{-1-n}}{(1+n)}-\frac{1}{1-n}+\frac{1}{1+n}\right)\\
&= \frac{-A}{4\pi}\left(\frac{(-1)^{1-n}}{(1-n)}+\frac{(-1)^{-1-n}}{(1+n)}-\frac{1}{1-n}+\frac{1}{1+n}\right)\\
&= \frac{-A}{4\pi}\left(\frac{1}{1-n}+\frac{1}{1+n}\right)\left((-1)^{n-1}-1\right)\\
f &\sim \frac{A}{4i}e^{i\frac{2\pi}{T}x}-\frac{A}{4i}e^{-i\frac{2\pi}{T}x}-\frac{A}{4}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(4n^2-1)}e^{\frac{2\pi i(2n)x}{T}}
\end{aligned}$$

תרגיל נתאים טור פורייה ל- $f(x)=x^2$ בקטע $[0,2\pi]$

$$f \sim \frac{a_0}{2}+\sum_{n=0}^{\infty}a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)$$

נתאים ל-f טור פורייה ב-$[-\pi,\pi]$

$$f \sim \frac{A_0}{2}+\sum_{n=0}^{\infty}A_n\cos(nx)+B_n\sin(nx)$$

נגדיר $h(x)=\frac{a_0-A_0}{2}+\sum_{n=0}^{\infty}(a_n-A_n)\cos(nx)+(b_n-B_n)\sin(nx)$

פתרון ממשפט ההתכנסות במ"ש

$$x^2 = \frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos(nx)+A_n\sin(nx)\,,x\in[-\pi,\pi]$$

לפי דריכלה

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx) = \begin{cases}x^2 & 0<x<2\pi\\ 2\pi^2 & x=0,2\pi\end{cases}$$

זה טור מחזורי 2π ע"פ המחזוריות בקטע $[-\pi,\pi]$

$$h(x) = \begin{cases}0 & 0<x<\pi\\ 2\pi^2 & x=0\\ 0 & x=\pi\\ (x+2\pi)^2-x^2=4\pi x+4\pi^2 & -\pi<x<0\\ 0 & x=-\pi\end{cases}$$

3 התמרת פורייה

3.1 הגדרה

הגדרה $g(\mathbb{R})$ מרחב כל הפונקציות הרציפות למקוטעין על $\mathbb{R}$ ואינטגרביליות בהחלט.

הגדרה לכל $f\in G(\mathbb{R})$ נגדיר

$$F(\omega) = \mathcal{F}[f](\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-i\omega x}dx$$

תכונות

1. F מוגדרת לכל ω
2. F רציפה
3. $\lim_{\omega\to\infty}F(\omega)=0$

תרגיל מצאו התמרת פורייה ל $f(x)=\begin{cases}1 & a\le x\le b\\ 0 & else\end{cases}$

פתרון מהכיתה $F(\omega)=\frac{1}{2\pi}e^{i\omega\frac{(a+b)}{2}}\sin\left(\frac{\omega(b-a)}{2}\right)$ כאשר $a=-b$

$$F_{[a,b]} = \frac{\sin(\omega b)}{\pi\omega}$$

תרגיל חשבו התמרת פורייה עבור $f(x)=\begin{cases}x & |x|\le a\\ 0 & else\end{cases}$

פתרון

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-a}^{a} xe^{-i\omega x}dx$$

עבור $\omega \neq 0$

$$\begin{aligned}
F(\omega) &= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{xe^{-i\omega x}}{-i\omega}\right)\Big|_a^b + \frac{1}{2\pi i\omega}\int_{-a}^{a} e^{-i\omega x}dx \\
&= \frac{ae^{-i\omega a} + ae^{i\omega a}}{-2\pi i\omega} + \frac{\sin(\omega a)}{\pi i\omega} \\
&= \frac{-a\cos(\omega a)}{\pi i\omega} + \frac{\sin(\omega a)}{\pi i\omega} \\
F(0) &= \lim_{\omega\to 0} F(\omega) = 0
\end{aligned}$$

תרגיל התאימו התמרה ל- $f(x) = \begin{cases} e^{x} & x<0 \\ -e^{-x} & x>0 \end{cases}$

פתרון $f \in G(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned}
F(\omega) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{0} e^{x}e^{-i\omega x}dx - \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty} e^{-x}e^{-i\omega x}dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\left[\left(\frac{e^{(1-i\omega)x}}{1-i\omega}\right)\Big|_{-\infty}^{0} + \left(\frac{e^{-(1+i\omega)x}}{1+i\omega}\right)\Big|_{0}^{\infty}\right] \\
&= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{1-i\omega} - \frac{1}{1+i\omega}\right] \\
&= \frac{i\omega}{\pi(1+\omega^2)}
\end{aligned}$$

תרגיל תהי $f \in G(\mathbb{R})$ הוכיחו כי

1. f ממשית גורר $F(-\omega) = \overline{F(\omega)}$
2. f זוגית גורר F זוגית

פתרון

1. נחשב

$$\begin{aligned}
\overline{F(\omega)} &= \frac{1}{2\pi}\overline{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx} \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(x)e^{-i\omega x}}dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i(-\omega)x}dx \\
&= F(-\omega)
\end{aligned}$$

2. נחשב

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-i\omega x}dx \\ (x=-t, dx=-dt) \Rightarrow &= \frac{1}{2\pi}\int_{\infty}^{-\infty} f(-t)\, e^{-i\omega(-t)}dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i(-\omega)t}dt \\ &= F(-\omega) \end{aligned}$$

3.2 תכונות של התמרת פוריה

ליניאריות $f,g\in G(\mathbb{R})$ **אזי** $af+bg\in G(\mathbb{R})$ ו-

$$\mathcal{F}[af+bg](\omega) = a\mathcal{F}[f](\omega)+b\mathcal{F}[g](\omega)$$

נוסחת הזזה $a\neq 0\,,\{a,b\in\mathbb{R}\}\,,f\in G(\mathbb{R})$ ו $g(x)=f(ax+b)$ **אזי**

$$\mathcal{F}[g](\omega) = \frac{1}{|a|}e^{i\frac{\omega b}{a}}\mathcal{F}[f]\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

נוסחת המודולציה $f\in G(\mathbb{R})\,,c\in\mathbb{R}$ **אזי**

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left[e^{icx}f(x)\right](\omega) &= \mathcal{F}[f](\omega-c) \\ \mathcal{F}[\cos(cx)\,f(x)](\omega) &= \frac{\mathcal{F}[f](\omega-c)+\mathcal{F}[f](\omega+c)}{2} \\ \mathcal{F}[\sin(cx)\,f(x)](\omega) &= \frac{\mathcal{F}[f](\omega-c)-\mathcal{F}[f](\omega+c)}{2i} \end{aligned}$$

נוסחת הנגזרת $f\in C^{n-1}$ ו $f^{(j)}\in G(\mathbb{R})\,,\{j=0,1,2,...,n\}$ובנוסף

$$\{j=0,1,2,...,n\}\,,\lim_{x\to\pm\infty} f^{(j)}(x) = 0$$

אזי

$$\mathcal{F}\left[f^{(n)}\right](\omega) = (i\omega)^n\,\mathcal{F}[f](\omega)$$

נוסחת בגזירה $f\in G(\mathbb{R})$ויש $n\in\mathbb{N}$ **כך ש** $\int_{-\infty}^{\infty}|x^nf(x)|\,dx<\infty$ **אזי** $\mathcal{F}[f]$ **גזירה ברציפות** n **פעמים וגם**

$$\mathcal{F}[x^nf(x)](\omega) = i^n\frac{d^n}{d\omega^n}\mathcal{F}[f](\omega)$$

תרגיל נתון כי

$$\mathcal{F}[f](\omega) = \frac{1}{\pi(1+i\omega)^2}$$

מצא את $\mathcal{F}\left[\cos x f\left(x\right)\right]\left(\omega\right)$ **לפי נוסחת המודולציה**

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left[\cos x f\left(x\right)\right]\left(\omega\right) &= \frac{\mathcal{F}\left[f\right]\left(\omega-1\right)+\mathcal{F}\left[f\right]\left(\omega+1\right)}{2}\\ &= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{\pi\left(1+i\left(\omega-1\right)\right)^{2}}+\frac{1}{\pi\left(1+i\left(\omega+1\right)\right)^{2}}\right]\end{aligned}$$

תרגיל מצאו התמרת פורייה של $f\left(x\right)=e^{-a|x|},a>0$

פתרון נגדיר $g(x)=e^{-|x|}$ ואז $f\left(x\right)=g\left(ax\right)$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left[g\right]\left(\omega\right) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}g\left(x\right)e^{-i\omega x}dx=\frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\infty}^{0}e^{x}e^{-i\omega x}dx+\int_{0}^{\infty}e^{-x}e^{-i\omega x}dx\right)\\ &= \frac{1}{2\pi}\left(\left.\frac{e^{(1-i\omega)x}}{1-i\omega}\right|_{-\infty}^{0}+\left.\frac{e^{-(i\omega+1)x}}{-\left(i\omega+1\right)}\right|_{0}^{\infty}\right)\\ &= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{1-i\omega}+\frac{1}{1+i\omega}\right)\\ \mathcal{F}\left[f\right]\left(\omega\right) &= \frac{1}{a}\mathcal{F}\left[g\right]\left(\frac{\omega}{a}\right)=\frac{1}{\pi a\left(a+\frac{\omega^{2}}{a^{2}}\right)}=\frac{a}{\pi\left(a^{2}+\omega^{2}\right)}\end{aligned}$$

תרגיל נתון כי $\mathcal{F}\left[e^{-x^{2}}\right]\left(\omega\right)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{w^{2}}{4}}$ חשבו את

1. $\mathcal{F}\left[e^{-4x^{2}-4x-1}\right]\left(\omega\right)$
2. $\mathcal{F}\left[4xe^{-x^{2}}\right]\left(\omega\right)$

פתרון

1. אם נשלים $-4x^{2}-4x-1=-\left(2x+1\right)^{2}$ ונסמן את $f\left(x\right)=e^{-x^{2}}$ נקבל כי

$$\begin{aligned}f\left(2x+1\right) &= e^{-4x^{2}-4x-1}\\ \mathcal{F}\left[e^{-4x^{2}-4x-1}\right]\left(\omega\right) &= \frac{1}{2}e^{i\omega\frac{1}{2}}\mathcal{F}\left[f\right]\left(\frac{\omega}{2}\right)\\ &= \frac{1}{4\sqrt{\pi}}e^{i\frac{\omega}{2}}w^{-\frac{\omega^{2}}{16}}\end{aligned}$$

2. $e^{-x^{2}}$ מקיים את נוסחת הגזירה ולכן

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left[4xe^{-x^{2}}\right]\left(\omega\right) &= 4\mathcal{F}\left[xe^{-x^{2}}\right]\left(\omega\right)=4i\frac{d}{d\omega}\mathcal{F}\left[e^{-x^{2}}\right]\left(\omega\right)\\ &= \frac{2i}{\sqrt{\pi}}\left(-\frac{\omega}{a}\right)e^{-\frac{\omega^{2}}{4}}\end{aligned}$$

תרגיל נתונה המשוואה הדיפרנציאלית

$$y^{''}+2xy^{'}+2y = 0$$

הניחו כי תנאי משפט הגזירה והנגזרת מתקיימים ומצאו את המשוואה הדיפרנציאל-
ית ל $\mathcal{F}\left[y\right]$

פתרון

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left[y^{''}\right](\omega) &= (i\omega)^2\mathcal{F}[y](\omega) = -\omega^2\mathcal{F}[y](\omega)\\ \mathcal{F}[xy](\omega) &= i\frac{d}{d\omega}\mathcal{F}[y'](\omega) = i\frac{d}{d\omega}(i\omega\mathcal{F}[y](\omega))\\ &= -\Big(\mathcal{F}[y](\omega)+\omega\mathcal{F}^{'}[y](\omega)\Big)\end{aligned}$$

לכן אם נעשה טרנספורם על המשוואה נקבל

$$\begin{aligned}-\omega^2\mathcal{F}[y](\omega)-2\Big(\mathcal{F}[y](\omega)+\omega\mathcal{F}^{'}[y](\omega)\Big)+2\mathcal{F}[y](\omega) &= 0\\ -\omega^2\mathcal{F}[y](\omega) &= -2\omega\mathcal{F}^{'}[y](\omega)\\ \mathcal{F}^{'}[y](\omega) &= -\frac{\omega}{2}\mathcal{F}[y](\omega)\\ \ln\mathcal{F}[y](\omega) &= -\frac{\omega^2}{4}\\ \mathcal{F}[y](\omega) &= e^{-\frac{\omega^2}{4}}\end{aligned}$$

3.3 התמרה הפוכה

הסבר בצורה אנלוגית לטור פוריה

$$\mathcal{F}[f](\omega) \quad\leftrightarrow\quad c_n$$

אזי

$$\int\mathcal{F}[f](\omega)e^{i\omega x}d\omega \quad\leftrightarrow\quad \sum c_ne^{inx}$$

משפט תהי $f\in G(\mathbb{R})$ ותהי $x\in\mathbb{R}$ נק' בה הנגזרות החד צדדיות של f קיימות

$$\lim_{M\to\infty}\int_{-M}^{M}\mathcal{F}[f](\omega)e^{i\omega x}d\omega = \frac{f(x+)+f(x-)}{2}$$

מסקנות

1. אם $f^{'}$ רציפה למקוטעין, $f\in G(\mathbb{R})$ ו-f רציפה אזי

$$\lim_{m\to\infty}\int_{-M}^{M}\mathcal{F}[f](\omega)e^{i\omega x}d\omega = f(x)$$

2. אם בנוסף $\mathcal{F}[f]\in G(\mathbb{R})$ אזי

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{F}[f](\omega)e^{i\omega x}d\omega = 2\pi\mathcal{F}[\mathcal{F}[f]](-x)$$

הערה $\mathcal{F}[f] \in G(\mathbb{R})$ אזי

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}[f](\omega) e^{i\omega x} d\omega = 2\pi \mathcal{F}[\mathcal{F}[f]](-x)$$

רציפה. אם f הייתה ב $G(\mathbb{R})$ וגם $f^{'}$ רציפה למקוטעין אזי

$$\frac{f(x+) + f(x-)}{2} = 2\pi \mathcal{F}[\mathcal{F}[f]](-x)$$

אבל אם ל f יש קפיצה אזי $\frac{f(x+)+f(x-)}{2}$ לא רציפה. כלומר אם $\mathcal{F}[f], f \in G(\mathbb{R})$ ו-$f^{'}$ רציפה למקוטעין אזי f רציפה.

תרגיל $f, g \in G(\mathbb{R})$ ו f, g רציפות למקוטעין ובעלות נגזרות רציפות למקוטעין . הוכיחו כי

$$f = g \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{F}[g] = \mathcal{F}[f]$$

פתרון $\Rightarrow$ ברור. $\Leftarrow$

$$g(x) = \lim_{M\to\infty} \int_{-M}^{M} \mathcal{F}[f](\omega) e^{i\omega x} d\omega = \lim_{M\to\infty} \int_{-M}^{M} \mathcal{F}[g](\omega) e^{i\omega x} d\omega = f(x)$$

תרגיל נתון כי $\mathcal{F}\left[e^{-|x|}\right] = \frac{1}{\pi(1+\omega^2)}$ נגדיר $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$ מצאו את $\mathcal{F}[g]$

פתרון $e^{-|x|} \in G(\mathbb{R})$ והעלות הגזרות רציפות למקוטעין. $\mathcal{F}\left[e^{-|x|}\right] \in G(\mathbb{R})$ רציפה. אז נתון

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[g](\omega) &= \mathcal{F}\left[\pi \mathcal{F}\left[e^{-|t|}\right](x)\right](\omega) \\ &= \pi \frac{1}{2\pi} e^{-|-\omega|} = \frac{1}{2} e^{-|\omega|} \end{aligned}$$

תרגיל תהא f רציפה השייכת ל $G \in (\mathbb{R})$ ובעלת נגזרת רציפה למקוטעין. נתון כי התמרת פורייה שלה, F היא

$$F(x) = \begin{cases} 1-\omega^2 & |\omega| \le 0 \\ 0 & else \end{cases}$$

מצאו את f.

פתרון $F(\omega) \in G(\mathbb{R})$. f רציפה ולכן

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega x} dx = \int_{-1}^{1} \left(1-\omega^2\right) e^{i\omega x} d\omega \\ (x \neq 0) &= \left[\left(\frac{e^{i\omega x}}{ix}\left(1-\omega^2\right)\right)\Big|_{-1}^{1} + \frac{2}{ix}\int_{-1}^{1} e^{i\omega x} \omega d\omega\right] \\ &= \frac{2}{ix}\left[\frac{e^{i\omega x}\omega}{ix}\Big|_{-1}^{1} + \frac{1}{ix}\int_{-1}^{1} e^{i\omega x} d\omega\right] \\ &= \frac{-2}{x^2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right) + \frac{2}{ix^3}\, e^{i\omega x}\Big|_{-1}^{1} \\ &= \frac{-4\cos(x)}{x^2} + \frac{4\sin(x)}{x^3} \end{aligned}$$

תרגיל בעזרת התמרת פוריה של

$$f(x) = e^{-a|x|}\sin(ax), a>0$$

חשבו את $\int_0^\infty \frac{t\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)}{t^4+16}dt$

פתרון ראינו כי התמרת פורייה $\mathcal{F}\left[e^{-a|x|}\right](\omega) = \frac{a}{\pi(\omega^2+a^2)}$ ע"פ נוסחת המודולציה

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\left[e^{-a|x|}\sin(ax)\right](\omega) &= \frac{\mathcal{F}\left[e^{-a|x|}\right](\omega-a) - \mathcal{F}\left[e^{-a|x|}\right](\omega+a)}{2i} \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{(\omega-a)^2+a^2} + \frac{1}{(\omega+a)^2+a^2}\right)\frac{1}{2i} \\
&= \frac{a}{\pi 2i}\left(\frac{(\omega+a)^2-(\omega-a)^2}{(\omega^2-2\omega a+2a^2)(\omega^2+2\omega a+2a^2)}\right) \\
&= \frac{2\omega a^2}{\pi i\left((\omega^2+2a^2)^2-4\omega^2a^2\right)} \\
&= \frac{2\omega a^2}{\pi i(\omega^4+4a^4)}
\end{aligned}$$

אנו מעוניינים להגיע ל-$\int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{F}[f](\omega)e^{i\omega x}d\omega$. $\frac{t}{t^4+16}$ אינטגבילית בהחלט ואי-זוגית

$$\int_0^\infty \frac{t\sin(\alpha t)}{t^4+16} \quad dt = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{t\sin(\alpha)}{t^4+16}$$

ובנוסף האינטגרל של

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{t\cos(\alpha t)}{t^4+16}dt = 0$$

ואז

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{t\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)}{t^4+16}dt &= \frac{1}{2i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{ti\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)}{t^4+16}dt \\
&= \frac{1}{2i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{t\left[i\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)+\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)\right]}{t^4+16}dt \\
&= \frac{1}{2i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{t}{t^4+16}e^{i\frac{\pi}{6}t}dt
\end{aligned}$$

עבור $4a^4=16, a=\sqrt{2}$ אזי

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2\omega a^2}{\pi i(\omega^4+4a^4)}e^{i\omega t}d\omega &= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{4\omega}{\pi i(\omega^4+16)}e^{i\omega t}d\omega \\
&= e^{-\sqrt{2}|t|}\sin\left(\sqrt{2}t\right) \\
\left(t=\frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow \int_0^\infty \frac{t}{t^4+16}\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)dt &= \frac{1}{2i}\left(\frac{\pi i}{4}e^{-\sqrt{2}\frac{\pi}{6}}\sin\left(\sqrt{2}\frac{\pi}{6}\right)\right)
\end{aligned}$$

3.4 נוסחת פלנשרל

1. אם $f\in G\left(\mathbb{R}\right)$ ו- $\int_{-\infty}^{\infty}\left|f\left(x\right)\right|^{2}dx<\infty$ אזי

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|\mathcal{F}\left[f\right]\left(\omega\right)\right|^{2}d\omega\quad<\quad\infty$$

וגם

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|\mathcal{F}\left[f\right]\left(\omega\right)\right|^{2}d\omega\quad=\quad\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|f\left(x\right)\right|^{2}dx$$

2. אם $g,f\in G\left(\mathbb{R}\right)$ ו- $\int_{-\infty}^{\infty}\left|f\left(x\right)\right|^{2}dx<\infty,\int_{-\infty}^{\infty}\left|g\left(x\right)\right|^{2}dx<\infty$ אזי

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{F}\left[f\right]\left(\omega\right)\overline{\mathcal{F}\left[g\right]\left(\omega\right)}d\omega\quad=\quad\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f\left(x\right)\overline{g\left(x\right)}dx$$

תרגיל בעזרת ההתמרה של $f\left(x\right)=\begin{cases}1 & \left|x\right|<a\\0 & else\end{cases}$ חשבו את

$$a,b>0,\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\left(\omega a\right)\sin\left(\omega b\right)}{\omega^{2}}d\omega$$

פתרון התמרת פורייה של $\mathcal{F}\left[f_{a}\right]\left(\omega\right)=\frac{\sin(\omega a)}{\pi\omega}$ ואז

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\left(\omega a\right)\sin\left(\omega b\right)}{\omega^{2}}d\omega & = \pi^{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\left(\omega a\right)\sin\left(\omega b\right)}{\omega^{2}}d\omega\\
 & = \pi^{2}\int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{F}\left[f_{a}\right]\left(\omega\right)\overline{\mathcal{F}\left[f_{b}\right]\left(\omega\right)}d\omega\end{aligned}$$

לפי פלנשרל המוכלל

$$\begin{aligned} & = \frac{\pi^{2}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f_{a}\left(x\right)\overline{f_{b}\left(x\right)}d\omega\\
 & = \frac{\pi}{2}\int_{-\min(a,b)}^{\min(a,b)}1dx=\pi\min\left(a,b\right)\end{aligned}$$

תרגיל נתון כי $\mathcal{F}\left[e^{-\left|x\right|}\right]\left(\omega\right)=\frac{1}{\pi(1+\omega^{2})}$

1. מצאו את התמרת פורייה של $\frac{1}{a^{2}+\omega^{2}}$
2. חשבו את $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(a^{2}+\omega^{2})^{2}}d\omega$
3. חשבו את $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u^{2}}{(a^{2}+u^{2})}du$
4. חשבו את $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{du}{(u^{2}+a^{2})(u^{2}+b^{2})}$

פתרון

1. לכל $a>0$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left[e^{-a|x|}\right](\omega) &= \frac{1}{a}\mathcal{F}\left[e^{-|x|}\right]\left(\frac{\omega}{a}\right)\\ &= \frac{1}{\pi a}\frac{1}{1+\frac{\omega^2}{a^2}}\end{aligned}$$

אזי

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left[\frac{\pi}{a}e^{-a|x|}\right](\omega) &= \frac{1}{a^2+\omega^2}\in G(\mathbb{R})\\ \Rightarrow \mathcal{F}\left[\frac{1}{a^2+x^2}\right](x) &= \mathcal{F}\left[\mathcal{F}\left[\frac{\pi}{a}e^{-a|x|}\right](\omega)\right](x)\\ &= \frac{1}{2\pi}\frac{\pi}{a}e^{-a|-x|}=\frac{1}{2a}e^{-a|x|}\end{aligned}$$

2. לפי פלנשרל

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{\left(a^2+\omega^2\right)^2} &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\left|\frac{\pi}{a}e^{-a|x|}\right|^2dx\\ &= \frac{\pi}{2a^2}\int_{\mathbb{R}}e^{-2a|x|}dx\\ &= \frac{\pi}{2a^2}\int_{-\infty}^{0}e^{2ax}dx+\frac{a}{2}\int_0^\infty e^{-2ax}dx\\ &= \frac{\pi}{a^3}\left(\frac{e^{2ax}}{4}\Big|_{-\infty}^{0}-\frac{e^{-2ax}}{4}\Big|_0^\infty\right)\\ &= \frac{\pi}{2a^3}\end{aligned}$$

3. נשים לב כי

$$\begin{aligned}\frac{u^2}{a^2+u^2} &= \frac{1}{a^2+u^2}-\frac{a^2}{\left(a^2+u^2\right)^2}\\ \int_{\mathbb{R}}\frac{1}{a^2+u^2}du &= \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{u}{a}\right)\Big|_{-\infty}^{\infty}=\frac{\pi}{a}\end{aligned}$$

אז

$$\int_{\mathbb{R}}\frac{u^2}{u^2+a^2} = \frac{\pi}{a}-a^2\frac{\pi}{2a^3}=\frac{\pi}{2a}$$

4. נחשב

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{\left(u^2+a^2\right)\left(u^2+b^2\right)}du &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\pi}{a}e^{-a|x|}\right)\left(\frac{\pi}{b}e^{-b|x|}\right)dx\\ &= \frac{\pi}{2ab}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(a+b)x}dx\\ &= \frac{\pi}{2ab}\frac{2}{(a+b)}=\frac{\pi}{ab\,(a+b)}\end{aligned}$$

עבור a,b כלליים כותבים $|a|,|b|$ כמקום a,b בכל מקום.

3.5 קונבולוציה

נסמן[1]

$$(f*g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, g(x-t)\, dt$$

בהנחה שהאינטגרל מוגדר

טענה אם $f,g\in G(\mathbb{R})$ (מספיק אינטגרביליות בהחלט) אזי $f*g\in G(\mathbb{R})$ (אינטגרביליות בהחלט)

משפט $f,g\in G(\mathbb{R})$ אזי

$$\mathcal{F}[f*g] = 2\pi\mathcal{F}[f]\,\mathcal{F}[g]$$

תרגיל נגדיר $f_a(x)=\begin{cases}1 & x\le|a|\\ 0 & else\end{cases}$ חשבו את f_a*f_a

פתרון

$$\begin{aligned}f_a(x-t) &= \begin{cases}1 & |x-t|\le a\\ 0 & else\end{cases}\\ &= \begin{cases}1 & x-a\le t\le x+a\\ 0 & else\end{cases}\end{aligned}$$

1. אם אין חפיפה בין הקטע $[-a,a]$ ל- $[x-a,x+a]$ אזי

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_a(t)\, f_b(x-t)\, dt = 0$$

זה קורה אם

$$\begin{aligned}&x-a\ge a \quad \wedge \quad x+a\le -a\\ &\Rightarrow x\ge 2a \quad \wedge \quad x\le -2a\end{aligned}$$

2. חפיפה אם

$$\begin{aligned}x+a>-a &\quad \vee \quad x+a\le a\\ -2a< &\quad x \quad \le 0\end{aligned}$$

3. חפיפה מצד שני

$$\begin{aligned}x-a>-a &\quad \vee \quad x-a\le a\\ 0< &\quad x \quad \le 2a\end{aligned}$$

[1] למעשה באינטואיציה זה מעין מיצוע של שני פונקציות בכל המישור אם הפרש של x ביניהם

אזי קיבלנו

$$\begin{aligned} f_a * f_a &= \int_{-\infty}^{\infty} f_a(t) f_b(x-t)\,dt \\ &= \begin{cases} 0 & x \geq |2a| \\ 2a+x & -2a < x \leq 0 \\ 2a-x & 0 < x < 2a \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & x \geq |2a| \\ 2a-|x| & x < |2a| \end{cases} \end{aligned}$$

תרגיל פתרו את המשוואה

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) f(x-t)\,dt = e^{-\frac{x^2}{2}}$$

פתרון נערוך התמרת פורייה

$$\mathcal{F}(f*f) = 2\pi \left(\mathcal{F}[f](\omega)\right)^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\omega^2}{2}}$$

לכן ($\mathcal{F}\left[e^{-\frac{x^2}{2}}\right](\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\omega^2}{2}}$ ידוע כי)

$$\mathcal{F}[f](\omega) = \pm \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{4}}} e^{-\frac{\omega^2}{4}}$$

אם $a > 0$ אזי

$$\mathcal{F}\left[e^{-ax^2}\right] = \mathcal{F}\left[e^{-\frac{(\sqrt{2a}x)^2}{2}}\right] = \frac{1}{\sqrt{2a}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\omega^2}{4a}}$$

לכן

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f](\omega) &= \pm \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{4}}} \mathcal{F}\left[2\sqrt{\pi} e^{-x^2}\right](\omega) \\ f(x) &= \pm \frac{2\sqrt{\pi}}{(2\pi)^{\frac{3}{4}}} e^{-x^2} \end{aligned}$$

לפי התוצאה אנו רואים $f \in G(\mathbb{R})$ ולכן כל התהליך תאם את מה שמותר.

תרגיל פתרו את המשוואה

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{h(z)}{(t-z)^2+4} dz = \frac{1}{t+16}$$

פתרון

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{h(z)}{(t-z)^2+4} dz = \left(h * \frac{1}{t^2+4}\right)(t) \tag{2}$$

נזכר כי התמרת פורייה

$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{a^2+x^2}\right](\omega) = \frac{1}{2a} e^{-a|x|}$$

מעשה התמרה על האגפים

$$\begin{aligned}(2) \Rightarrow 2\pi\mathcal{F}[h](\omega)\frac{1}{4}e^{-2|\omega|} &= \frac{1}{8}e^{-4|\omega|}\\ \Rightarrow \mathcal{F}[h](\omega) &= \frac{1}{2\pi}e^{-2|\omega|}\\ &= \frac{1}{\pi}\mathcal{F}\left[\frac{1}{x^2+4}\right](\omega)\\ \Rightarrow h(x) &= \frac{1}{\pi(x^2+4)}\end{aligned}$$

תרגיל תהי $\varphi \in G(\mathbb{R})$ עבור אלו ערכי $a,b>0$ יכול להתקיים

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(z)}{(t-z)^2+a^2}dz = \frac{1}{t^2+b^2}$$

פתרון נעשה התמרה ונקבל

$$\mathcal{F}[\varphi](\omega) = \frac{a}{2\pi b}e^{(a-b)|\omega|}$$

אזי $a<b$ כי תמיד $\mathcal{F}[\varphi](\omega) \to_{\omega\to\pm\infty} 0$
אם בנוסף ל-φ יש נגזרת רציפה

הערה עבור ללא תנאי $a,b>0$ ניתן להסיק $|a|<|b|$.

תרגיל עבור אילו ערכי $\lambda\in\mathbb{R}$ מתקיים

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2(ax)}{x^2}\cos(\lambda x)\,dx = 0$$

פתרון זה מזכיר התמרה הפוכה. לכן מעבוד בשביל לקבל את זה. נשים לב כי $\frac{\sin^2(ax)}{x^2}$ אינטגרבילית בהחלט וזוגית לכן

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2(ax)}{x^2}\sin(\lambda x)\,dx = 0$$

ואז ניתן להגיד ש

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2(ax)}{x^2}\cos(\lambda x)\,dx &= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2(ax)}{x^2}(\cos(\lambda x)+i\sin(\lambda x))\,dx\\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2(ax)}{x^2}e^{i\lambda x}dx\end{aligned}$$

מזכיר התמרה הפוכה. וגם

$$\mathcal{F}[f_a](\omega) = \frac{\sin(a\omega)}{\omega}$$

לכן ע"פ הקונבולוציה

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2(ax)}{x^2}e^{i\lambda x}dx &= \pi^2\int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{F}[f_a](\omega)\,\mathcal{F}[f_a](\omega)\,e^{i\lambda x}dx\\ &= \frac{\pi}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{F}[f_a*f_a](x)\,e^{i\lambda x}dx\end{aligned}$$

יש נגזרת רציפה למקוטעין והיא רציפה

$$= \frac{\pi}{2}(f_a*f_a)(\lambda)$$

ראינו כי $(f_a*f_a)(\lambda)=0 \Leftrightarrow |\lambda|\ge 2a$

4 התמרת לפלס

4.1 הגדרה

הגדרה תהי f ריציפה למקוטעין על הקטע $[0,\infty)$ המקבלת ערכים ב-$\mathbb{C}$. התמרת לפלס של f מוגדרת להיות

$$\mathcal{L}[f](s) \quad] = \quad \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt$$

בכל נקודה בה האינטגרל מוגדר

תרגיל מצאו התמרת לפלס (+תחום הגדרה) עבור $z \in \mathbb{C}, f(t) = e^{zt}$

פתרון

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[f](s) &= \int_0^\infty e^{-st} e^{zt} dt \\
&= \frac{e^{-st}e^{zt}}{(z-s)} = \frac{e^{(x-s)t}e^{iyt}}{(x+iy-s)} = \frac{1}{s-z} \\
\lim \mathcal{L}[f](s) &= \begin{cases} 0 & x-s<0 \\ 1 & x-s=0 \\ \infty & x-s>0 \end{cases}
\end{aligned}$$

משפט אם f רציפה למקוטעין על $[0,\infty)$ ומקבלת ערכים ב-$\mathbb{C}$ כך שיש קבועים ממשיים k,a המקיימים

$$|f(t)| \leq \quad k \quad e^{at}$$

אזי התמרת לפלס של f קיימת לכל $s > a$.

תרגיל תהי f פונקציה רציפה למקוטעין על $[0,\infty]$ ומחזורית $p, p > 0$. הוכיחו כי התמרת לפלס מוגדרת לכל $s > 0$

$$\mathcal{L}[f](s) \quad = \quad \frac{1}{1-e^{-ps}} \int_0^p e^{-st} f(t)\,dt$$

פתרון f רציפה למקוטעין על $[0,p]$ ולכן חסומה שם. ממחזוריות f. f חסומה על $[0,\infty]$ כלומר יש $k > 0$ כך ש

$$|f(x)| \quad \leq \quad ke^{0x}, \forall x \geq 0$$

לכן התמרת לפלס מוגדרת עבור $s > 0$

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty f(t)\,e^{-st} dt &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \int_{kp}^{kp+p} f(t)\,e^{-st} dt \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_0^{np+p} f(t)\,e^{-st} dt
\end{aligned}$$

ננסה לקשור בין $\int_{kp}^{kp+p}$ לבין $\int_0^p$

$$\begin{aligned}
(x = t-kp, dx = dt)\,; \int_{kp}^{kp+p} f(t)\,e^{-st} dt &= \int_0^p f(x+kp)\,e^{-s(x+kp)} dx \\
&= e^{-kps} \int_0^p f(x)\,e^{-sx} dx
\end{aligned}$$

לכן

$$\sum_{k=0}^{n}\int_{kp}^{kp+p}f\left(t\right)e^{-st}dt = \int_{0}^{p}f\left(x\right)e^{-sx}dx\sum_{k=0}^{\infty}\left(e^{-sp}\right)^{k}$$

בתחום $\left|e^{-sp}\right|<1$ התחום הוא $s>0$. ואז בתחום

$$\begin{aligned}\sum & \rightarrow \left(\int_{0}^{p}f\left(t\right)e^{-st}dt\right)\frac{1}{1-e^{-st}}\\ & \rightarrow \mathcal{L}\left[f\right]\left(s\right)\end{aligned}$$

4.2 תכונות של התמרת לפלס

ליניאריות

$$\mathcal{L}\left[af+bg\right] = a\mathcal{L}\left[f\right]+b\mathcal{L}\left[g\right]$$

אז $a,b\in\mathbb{C}$ וגם $\mathcal{L}\left[f\right],\mathcal{L}\left[g\right]$ קיימות.

נוסחת הזזה

$$\mathcal{L}\left[e^{at}f\left(t\right)\right] = \mathcal{L}\left[f\right]\left(s-a\right),a\in\mathbb{R}$$

נוסחת המתיחה

$$\mathcal{L}\left[f\left(at\right)\right] = \frac{1}{a}\mathcal{L}\left[f\right]\left(\frac{s}{a}\right),a>0$$

נוסחת הנגזרת $f,...,f^{(n-1)}$ רציפות ב-$[0,\infty]$ ו- $f^{(n)}$ רציפה למקוטעין ב- $[0,\infty]$. נניח כי קיימים קבועים k,a כך ש

$$j=1,..,n-1;\forall t\geq0,\left|e^{(j)}\left(t\right)\right| \leq ke^{at}$$

אזי התמרת לפלס של $f^{(n)}$ מוגדרת לכל $s>a$

$$\mathcal{L}\left[f^{(n)}\right]\left(s\right) = s^{n}\mathcal{L}\left[f\right]\left(s\right)-s^{n-1}f\left(0\right)-s^{n-2}f^{'}\left(0\right)-...-f^{(n-1)}\left(0\right)$$

נוסחת הגזירה בתנאים כמו של פורייה

$$\mathcal{L}\left[t^{n}f\left(t\right)\right]\left(s\right) = \left(-1\right)^{n}\frac{d^{n}}{ds^{n}}\mathcal{L}\left[f\right]\left(s\right)$$

שאיפה באינסוף אם f מקיימת $\left|f\left(t\right)\right|\leq ke^{at}$ עבור k ו-a מסוימים אזי

$$\lim_{s\rightarrow\infty}\mathcal{L}\left[f\right]\left(s\right) = 0$$

תרגיל מצאו התמרת לפלס עבור $\sin\left(ax\right),\cos\left(ax\right)$ כאשר $a\in\mathbb{R}$.

פתרון

$$\begin{aligned}\cos(ax) &= \frac{e^{iax}+e^{-iax}}{2}\\ \Rightarrow (s>0),\mathcal{L}[\cos(ax)](s) &= \frac{1}{2}\mathcal{L}\left[e^{iax}+e^{-iax}\right]\\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s+ia}+\frac{1}{s-ia}\right]=\frac{s}{s^2+a^2}\\ (s>0),\mathcal{L}[\sin(ax)](s) &= \frac{1}{2i}\mathcal{L}\left[e^{iax}-e^{-iax}\right]\\ &= \frac{1}{2i}\left[\frac{1}{s+ia}-\frac{1}{s-ia}\right]=\frac{a}{s^2+a^2}\end{aligned}$$

תרגיל נגדיר $c\geq 0, u_c(t)=\begin{cases}1 & t\geq c\\ 0 & else\end{cases}$ **חשבו** $\mathcal{L}[u_c](s)$

פתרון

$$\mathcal{L}[u_c](s) = \int_c^\infty e^{-st}dt=\left.\frac{e^{-st}}{-s}\right|_c^\infty=\frac{e^{-cs}}{s}$$

הערה פונקציה זאת חשובה ויש לה שם $heaviside$ ותכונה נוספת של לפלס ש

$$c>0,\mathcal{L}[u_c(t)f(t-c)](s) = e^{-cs}\mathcal{L}[f](s)$$

תרגיל מצאו התמרות לפלס לפונקציות

1. $e^{-4t}\cos(3t)$
2. $t^n u(t)$
3. $\frac{\sin t}{t}$

פתרון

.1

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[e^{-4t}\cos(3t)\right](s) &= \mathcal{L}[\cos(3t)](s+4)\\ &= \frac{(s+4)}{(s+4)^2+9}\end{aligned}$$

.2

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[t^n u_0(t)](s) &= (-1)^n\frac{d^n}{ds^n}\mathcal{L}[u_0](s)\\ &= (-1)^n\frac{d^n}{ds^n}\left(\frac{1}{s}\right)\\ &= (-1)^n\frac{(-1)^n}{s^{n+1}}n!\\ &= \frac{n!}{s^{n+1}}\end{aligned}$$

3. נגדיר $f(t) = \frac{\sin t}{t}$ אז $tf(t) = \sin t$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[tf(t)](s) &= -\frac{d}{ds}\mathcal{L}[f](s) \\ &= \frac{1}{1+s^2} \\ \Rightarrow \mathcal{L}[f(t)]'(s) &= \frac{-1}{1+s^2} \\ &= -\arctan(s) + c \end{aligned}$$

אבל f חסומה ולכן

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f(t)](s) &\to_{s\to\infty} 0 \\ 0 &= \lim_{s\to\infty}[c - \arctan(s)] \\ &= c - \frac{\pi}{2} \\ \Rightarrow \mathcal{L}[f(t)](s) &= \frac{\pi}{2} - \arctan(s) \end{aligned}$$

4.3 התמרות הפוכות ידועות

$\mathcal{L}^{-1}\boxed{\frac{a}{s-z}}(s) = ae^{zt}$
$\mathcal{L}^{-1}\boxed{\frac{1}{(s-z)^n}}(s) = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{zt}$
$\mathcal{L}^{-1}\boxed{\frac{a}{s^2+a^2}}(s) = \sin(nt)$
$\mathcal{L}^{-1}\boxed{\frac{s}{s^2+a^2}}(s) = \cos(nt)$
בקשר להביסיד $c>0, \mathcal{L}^{-1}\boxed{e^{-cs}\frac{s}{s^2+a^2}}(s) = u_c(t)\cos(a(t-c))$

אנו יודעים לעשות התמרת לפלס הפוכה לכל פונקציה רציונלית

תרגיל מצאו התמרות לפלס הפוכות לפונקציות

1. $F(s) = \frac{1}{(s+2)^2(s^2+4)}$
2. $F(s) = \ln\left(1 + \frac{1}{s^2}\right)$

פתרון

1. נפרק

$$\begin{aligned} \frac{1}{(s+2)^2(s^2+4)} &= \frac{A}{s+2} + \frac{B}{(s+2)^2} + \frac{Cs+D}{(s^2+4)} \\ 1 &= A(s+2)\left(s^2+4\right) + B\left(s^2+4\right) + (Cs+d)(s+2)^2 \\ 1 &= s^3(A+C) + s^2(2A+B+D+4C) + s(4A+4C+2D) + (8A+4B+4D) \\ \Rightarrow A+C &= 0 \\ 2A+B+D+2C &= 0 \\ 4A+4C+2D &= 0 \\ 8A+4B+4D &= 1 \\ \Rightarrow A &= \frac{1}{16} \\ B &= \frac{1}{8} \\ C &= -\frac{1}{16} \\ D &= 0 \end{aligned}$$

לכן התמרת לפלס הפוכה

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}[F] &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{16(s-2)}+\frac{1}{8(s-2)^2}-\frac{s}{16(s^2+4)}\right]\\ &= \frac{1}{16}e^{-2t}+\frac{1}{8}te^{-2t}-\frac{1}{16}\cos(2t)\end{aligned}$$

2. נשים לב כי

$$\begin{aligned}F'(s) &= \mathcal{L}'[f(t)]\\ &= -\mathcal{L}[tf(t)]\\ F'(s) &= \left(\ln\left(s^2+1\right)-\ln\left(s^2\right)\right)'\\ &= \frac{2s}{s^2+1}-\frac{2}{s}\\ \Rightarrow \mathcal{L}[tf(t)] &= \frac{2}{s}-\frac{2s}{s^2+1}\\ tf(t) &= 2u_0(t)-2\cos(t)u_0(t)\\ f(t) &= \frac{2u_0(t)-2\cos(t)u_0(t)}{t}\end{aligned}$$

תרגיל פתרו את מד"ר $y''+4y'+4y=0, y'(0)=0, y(0)=1$

פתרון נפתור בעזרת התמרות. למה לא בעזרת פורייה? ננסה ונקבל

$$\begin{aligned}-\omega^2\mathcal{F}[y]+4i\omega\mathcal{F}[y]+4\mathcal{F}[y] &= 0\\ \left(-\omega^2+4i\omega+4\right)\mathcal{F}[y] &= 0\\ \Rightarrow \mathcal{F}[y] &= 0\\ y &= 0\end{aligned}$$

זה לא מה שרוצים. ננסה אם לפלס

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[y''\right] &= s^2\mathcal{L}[y](s)-sy(0)-s^2y'(0)\\ &= s^2\mathcal{L}[y](s)-s\\ \mathcal{L}\left[y'\right] &= s\mathcal{L}[y](s)-y(0)\\ &= s\mathcal{L}[y](s)-1\end{aligned}$$

המשוואה נהפכת ל

$$\begin{aligned}s^2\mathcal{L}[y](s)-s+4\mathcal{L}[y](s)-4+4\mathcal{L}[y](s) &= 0\\ \mathcal{L}[y](s)(s+2)^2 &= s+4=(s+2)+2\\ \mathcal{L}[y](s) &= \frac{1}{(s+2)}+\frac{2}{(s+2)^2}\\ \Rightarrow y &= e^{-2t}+2te^{-2t}\end{aligned}$$

4.4 קונבולוציה

הגדרת הקונבולוציה $(f*g)(x)=\int_0^x f(x-y)\,g(y)\,dy$ בהנחה שהאינטגרל מוגדר.

משפט אם $f*g$ מוגדר אזי $g*f$ קיים ושווה לו

משפט הקונבולוציה תהנה f,g אינטגרביליות בכל תת קטע של $[0,\infty)$ ונניח שקיימים קבועים k_1,k_2,a כך ש

$$\begin{aligned}\forall t\geq 0;|f(t)| &\leq k_1e^{at}\\ |g(t)| &\leq k_2e^{at}\end{aligned}$$

אזי

$$\forall x\geq 0;|(f*g)(x)| \leq k_1k_2e^{at}$$

ולכל $s>a$ (שם ההתמרה מוגדרת)

$$\mathcal{L}[f*g](s) = \mathcal{L}[f](s)\,\mathcal{L}[g](s)$$

תרגיל תהא f רציפה למקוטעין על $[0,\infty)$ כך שקיימים k,a כך ש $\forall t>0;|f(t)|\leq ke^{at}$ נגדיר

$$\varphi(t) = \int_0^t f(x)\,dx$$

מצאו את

$$\mathcal{L}[\varphi]$$

פתרון

$$\begin{aligned}\int_0^t f(x)\,dx &= \int_0^t u_0(t-x)\,f(x)\,dx\\ &= (u_0*f)(t)\\ \mathcal{L}[\varphi] &= \mathcal{L}[u_0]\,\mathcal{L}[f]=\frac{\mathcal{L}[f](s)}{s}\end{aligned}$$

תרגיל הראו כי

$$2\int_0^t \sin(2z)\,h(t-z)\,dz = h(t)-\sin^2(t)$$

מצאו את h

פתרון

$$2(\sin(2x)*h(x))(x) = h(t)-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(2t)$$

נתמיר ונקבל

$$\begin{aligned}2\mathcal{L}[h]\frac{2}{s^2+4} &= \mathcal{L}[h]-\frac{1}{2s}+\frac{1}{2}\frac{s}{s^2+4}\\ \mathcal{L}[h]\left(\frac{4}{s^2+4}-1\right) &= \frac{s^2-\left(s^2+4\right)}{2s\left(s^2+4\right)}=-\frac{4}{2s\left(s^2+4\right)}\end{aligned}$$

נקבל

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[h\right](s) &= \frac{2}{s^3}\\ h(t) &= t^2 h_0(t)\end{aligned}$$

תרגיל פתרון את המשוואות האינטגרליות

1. $f(t)+\int_0^t (t-u)\,f(u)\,du=\sin(2t)$
2. $\int_0^t f(u)\,du-f'(t)=\sin(t)\,,f(0)=1$

פתרון

.1

$$\begin{aligned}f(t)+(xu_0(x)*f(x))(t) &= \sin(2t)\\ \mathcal{L}\left[f\right](s)+\frac{1}{s^2}\mathcal{L}\left[f\right](s) &= \frac{2}{s^2+4}\\ \mathcal{L}\left[f\right](s)\left(\frac{s^2+1}{s^2}\right) &= \frac{2}{s^2+4}\\ \mathcal{L}\left[f\right](s) &= \frac{2s^2}{(s^2+4)(s^2+1)}\\ &= \frac{8}{2(s^2+4)}-\frac{4}{3(s^2+1)}\\ f &= \frac{4}{3}\sin(2t)-\frac{4}{3}\sin t\end{aligned}$$

.2 נתמיר

$$\begin{aligned}\frac{\mathcal{L}\left[f\right](s)}{s}-\left(s\mathcal{L}\left[f\right](s)-f(0)\right) &= \frac{1}{s^2+1}\\ \mathcal{L}\left[f\right](s)\left(\frac{1}{s}-s\right) &= \frac{1}{s^2+1}-1=\frac{-s^2}{s^2+1}\\ \Rightarrow \mathcal{L}\left[f\right](s) &= \frac{s^3}{(1+s^2)(s^2-1)}\\ &= \frac{s\left(s^2+1-1\right)}{(1+s^2)(s^2-1)}=\frac{s}{s^2-1}-\frac{s}{(1+s^2)(s^2-1)}\\ \ldots &= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{s-1}+\frac{1}{s+1}+\frac{2s}{s^2+1}\right)\\ f(t) &= \frac{1}{4}e^t+\frac{1}{4}e^{-t}+\frac{1}{2}\cos(t)\end{aligned}$$