הפתק הסגול

www.technion.co.il

משוואות דיפרנציאליות חלקיות

104216

סיכום הקורס

הקדמה

דוגמא למד"ח: $u_x + u_y = 0$.

הפתרון שלה הוא $u = u(x,y) = f(x-y)$, כלומר כל פונקציה של $x-y$ תפתור משוואה זו.

תזכורת – מד"ר – באופן כללי נחפש $v(t)$ כך ש $G(t, u(t), u'(t), \dots) = 0$. מד"ח היא הכללה של מד"ר.

צורה כללית למד"ח, כאשר $u = u(x,y)$:

$$F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}, u_{xxx}, \dots) = 0$$

הגדרה:

סדר של משוואה דיפרנציאלית חלקית הוא הסדר של הנגזרת החלקית הגבוה ביותר המופיע במשוואה.

דוגמא ידועה: משוות לפלס:

$$\Delta u \equiv u_{xx} + u_{yy} = f(x,y)$$

משוואה דיפרנציאלית חלקית מסדר ראשון

צורה כללית:

$$a(x,y)u_x + b(x,y)u_y + c(x,y)u = d(x,y)$$

משוואה דיפרנציאלית חלקית מסדר שני

צורה כללית:

$$A(x,y)u_{xx} + B(x,y)u_{xy} + C(x,y)u_{yy} + D(x,y)u_x + E(x,y)u_y + F(x,y)u = G(x,y)$$

הגדרה:

פתרון של משוואה דיפרנציאלית חלקית $F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}, u_{xxx}, \dots) = 0$ היא פונקציה $u(x,y)$ גזירה ברציפות k פעמים, כאשר k הוא סדר המשוואה (כדי שיהיו מוגדרות הנגזרות שמופיעות במשוואה), כך שבהצבת u ונגזרותיה במשוואה נקבל שיוון לכל $(x,y) \in D$.

כמו שידוע ממד"ר, פתרון כללי של מד"ח ניתן ע"י פתרון כללי של המשוואה ההומוגנית המתאימה + פתרון פרטי של המשוואה הלא-הומוגנית.

משוואה דיפרנציאלית חלקית כללית: $Lu = f(x,y)$, וזו הומוגנית כאשר $f(x,y) \equiv 0$. האופרטור L הוא האופרטור שמבצע גזירה וסכימה של u ומשתניה.

טענה:

אם u_1 ו u_2 פתרונות של $Lu = 0$, ואם α, β מספרים, אזי הפונקציה $v = \alpha u_1 + \beta u_2$ פתרון לאותה משוואה הומוגנית $Lu = 0$ (עקרון הסופרפוזיציה)

דוגמא:

ראינו את המשוואה ההומוגנית מסדר ראשון הזו: $u_x + u_y = 0$.

$u_1 = 1$, $u_2 = x - y$ פתרונות למשוואה. ולכן $v = a(x-y) + 3$ גם פתרון.

הגדרה:

אוסף כל הפתרונות למשוואה דיפרנציאלית חלקית נקרא הפתרון הכללי של המשוואה.

טענה:

תהי $Lu = f$ מד"ח (לא הומוגנית), ויהי u_p פתרון כלשהוא של המשוואה. אזי הפתרון הכללי של המשוואה $Lu = f$ ניתן ע"י $u = u_h + u_p$, כאשר u_h הוא פתרון למשוואה ההומוגנית $Lu = 0$.

הוכחה:

א. נראה כי u_h+u_p פתרון:

נביט ב: $L\left(u_h+u_p\right)$. L אופרטר גזירה ולכן ליניארי, ולכן $L\left(u_h+u_p\right)=L\left(u_h\right)+L\left(u_p\right)$, ומהנתון בטענה: $L\left(u_h\right)+L\left(u_p\right)=0+f=f$

ב. נראה שכל פתרון הוא מהצורה $u=u_h+u_p$:

נניח u_1 פתרון של $Lu=f$, אז נסתכל על $v=u_1-u_p$. כעת: $Lv=L\left(u_1-u_p\right)=Lu_1-Lu_p=f-f=0$ כלומר, v פתרון למשוואה ההומוגנית, וגם $u_1=v+u_p$, כלומר הוא מהצורה $u=u_h+u_p$.

דוגמאות קלאסיות למשוואות מתחומי המדע:

1. משוואה קאווזי-ליניארית מסדר ראשון: $u_t+uu_x=f$. משוואה זו מופיעה בדינמיקה של נוזלים וגם מתארת מודל פשוט של גוף שנע באוויר, והיא קשורה בגלי הלם של גוף בתנועה המהירות הקול.
2. משוואה מסדר שני: $u_t=u_{xx}$. משוואת החום ההומוגנית.
3. משוואת הגלים: $u_{tt}=c^2u_{xx}$

משוואות מסדר ראשון ומשוואות קאווזי-ליניאריות מסדר ראשון

משוואה קאווזי-ליניארית היא משוואה ליניארית עבור הסדר הגבוה ביותר, אבל לא בסדרים הנמוכים יותר.
צורה כללית למשוואה קאווזי-ליניארית מסדר ראשון:

$$a(x,y,u)u_x+b(x,y,u)u_y=c(x,y,u)$$

נניח כי הפונקציות a,b,c בעלות נגזרות חלקיות. מחפשים פונקציה $u=u(x,y)$. גרף הפונקציה u מתאר לנו משטח במרחב, כלומר אנו מחפשים את המשטח. לפעמים נקבל את הפתרון u בצורה סתומה $F(x,y,u)=c$ (c קבוע), שכמובן מתאר משטח בצורה סתומה.

נרצה לדעת מתי המשטח $F(x,y,u)=c$ פותר את המשוואה. ניעזר במשפט הפונקציות הסתומות ונגזור את $F(x,y,u)=c$ לפי x ולפי y:

$$\begin{cases}F_x+F_uu_x=0\\ F_y+F_uu_y=0\end{cases}\Rightarrow\ u_x=-\frac{F_x}{F_u}\quad,\quad u_y=-\frac{F_y}{F_u}$$

אחרי הצבה במשוואה $a(x,y,u)u_x+b(x,y,u)u_y=c(x,y,u)$, נקבל:

$$-a\frac{F_x}{F_u}-b\frac{F_y}{F_u}=c\ \Rightarrow\ aF_x+bF_y+cF_u=0$$

וזהו תנאי הכרחי לכך ש $F(x,y,u)=c$ מתארת את הפתרון.

הגדרה:

משטח $F(x,y,u)=c$ שמקיים את המשוואה $aF_x+bF_y+cF_u=0$ נקרא משטח פותר של המד"ח הקוואזי-ליניארית $a(x,y,u)u_x+b(x,y,u)u_y=c(x,y,u)$.

נביט במשוואה

$$aF_x+bF_y+cF_u=0$$

ידוע ש $\vec{\nabla}F=\vec{\nabla}F(x,y,u)=\left(F_x,F_y,F_u\right)$. אם נגדיר וקטור (a,b,c) אזי בנקודה (x,y,u), הוקטור (a,b,c) ניצב ל $\vec{\nabla}F$, כי $(a,b,c)\bullet\vec{\nabla}F=0\ \Leftrightarrow\ (a,b,c)\perp\vec{\nabla}F$.

כעת, ידוע שהגראדינט $\vec{\nabla}F$ בנקודה על המשטח ניצב למשטח, ולכן הוקטור (a,b,c) נמצא במישור המשיק למשטח $F(x,y,u)=c$, בנקודה (x,y,u).

הגדרה (נוספת למשטח פותר):

$F(x,y,u)=c$ הוא משטח פותר אם בכל נקודה עליו, הוקטור $\left(a(x,y,u),b(x,y,u),c(x,y,u)\right)$ שייך למישור המשיק בנקודה זו.

הגדרה: קו אופייני
נתונה משוואה דיפרנציאלית מסדר ראשון, קוואזי-ליניארית:

$$a(x,y,u)u_x+b(x,y,u)u_y=c(x,y,u)$$

הקו $\left(x(t),y(t),u(t)\right)$ הגזיר המקיים את מערכת המשוואות הדיפרנציאליות הרגילות הבאות:

$$\begin{cases}(i) & \dfrac{dx}{dt}=a\left(x(t),y(t),u(t)\right)\\ (ii) & \dfrac{dy}{dt}=b\left(x(t),y(t),u(t)\right)\\ (iii) & \dfrac{du}{dt}=c\left(x(t),y(t),u(t)\right)\end{cases}$$

נקרא קו אופייני של המשוואה.
ממשפט הקיום והיחידות למערכת משוואות דיפרנציאליות ליניאריות רגילות, דרך כל נקודה במרחב עובר קו אופייני יחיד.

השלב ראשון בפתרון מד"ח יהיה למצוא את המשטח הפותר בצורה פרמטרית.

<u>תאור משטח בצורה פרמטרית</u>
ניקח t,s פרמטרים, $t\in I, s\in J$, ונבצע החלפת משתנים, שמגדירה את המשטח:

$$S=\left\{\left(x(t,s),y(t,s),u(t,s)\right)\middle| t\in I, s\in J\right\}$$

בתנאי שהיעקוביאן של החלפת המשתנים מקיים

$$|J|=\begin{vmatrix}x_t & y_t\\ x_s & y_s\end{vmatrix}\neq 0$$

משפט:
נניח $F(x,y,u)=c$ הוא משטח פותר ונניח שהקו $\left(x(t),y(t),u(t)\right)$ הוא קו אופייני החותך את המשטח הפותר בנקודה $(x_0,y_0,u_0)=\left(x(0),y(0),u(0)\right)$. אזי לכל t, הקו $\left(x(t),y(t),u(t)\right)$ מוכל במשטח הפותר.

מסקנה:
נוכל לבנות את המשטח הפותר ע"י משפחה של קווים אופייניים.

הוכחה:
נגדיר פונקצית עזר: $g(t)=F\left(x(t),y(t),u(t)\right)$, ולכן יש להראות ש $g(t)\equiv c$.
נתון כי $F(x_0,y_0,u_0)=c$ ולכן $g(0)=c$, ולכן מספיק להראות ש $g'(t)\equiv 0$, כי אז $g(t)\equiv c$.
נגזור את $g(t)$: $g'(t)=F_x x'+F_y y'+F_u u'$;
מכיוון שהקו $\left(x(t),y(t),u(t)\right)$ הוא קו אופייני: $g'(t)=F_x a+F_y b+F_u c$.
ואז $g'(t)=0$, כי F משטח פותר.

כעת, נרצה לבנות משפחה גדולה של קווים אופייניים שיבנו משטח פותר.
הגדרה:
קו גזיר $\Gamma_0(s)=\left\{\left(x_0(s),y_0(s),u_0(s)\right), s\in J\right\}$ שמקיים:

1. הקו $\left(x_0(s),y_0(s)\right)$, כלומר ההטלה של Γ_0 למישור xy, אינו חותך את עצמו;
2. טרנסברסליות: $\begin{vmatrix}a\left(x_0(s),y_0(s),u_0(s)\right) & b\left(x_0(s),y_0(s),u_0(s)\right)\\ x_0'(s) & y_0'(s)\end{vmatrix}\neq 0$, לכל $s\in J$

הוא קו התחלה של המשוואה הדיפרנציאלית החלקית הקוואזי-ליניארית:

$$a(x,y,u)u_x+b(x,y,u)u_y=c(x,y,u)$$

משפט הקיום והיחידות לבעיית קושי:

לבעיית קושי (מד"ח ותנאי התחלה)

$$\begin{cases} a(x,y,u)u_x + b(x,y,u)u_y = c(x,y,u) \\ \Gamma_0(s) \end{cases}$$

קיים משטח פותר יחיד המכיל את קו ההתחלה $\Gamma_0(s)$, בסביבת קו ההתחלה.

יתר על כן, קיים פתרון שניתן להצגה בצורה מפורשת $u = u(x,y)$.

הוכחה:

ראשית, נקבל את המשטח הפותר בצורה פרמטרית: $\{(x(t,s), y(t,s), u(t,s)) | s \in J, t \in I\}$

יהי קבוע $s \in J$ (נקודה על קו ההתחלה). נסתכל על מערכת המשוואות התלוייה בפרמטר s:

$$(*)\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a(x(t), y(t), u(t)) \\ \dfrac{dy}{dt} = b(x(t), y(t), u(t)) \\ \dfrac{du}{dt} = c(x(t), y(t), u(t)) \end{cases}$$

עם תנאי ההתחלה

$$x(0,s) = x_0(s) \quad , \quad y(0,s) = y_0(s) \quad , \quad u(0,s) = u_0(s)$$

כשמשנים את s, מקבלים אוסף חד-פרמטרי של קווים אופייניים, שיוצאים מקו ההתחלה Γ_0 בנקודה s.

טענת עזר:

ניתן לחלץ את $\begin{cases} t = t(x,y) \\ s = s(x,y) \end{cases}$ מהמערכת שיש לנו $\begin{cases} x = x(t,s) \\ y = y(t,s) \end{cases}$, בסביבת Γ_0, ואז $\tilde{u}(x,y) = u(t(x,y), s(x,y))$ פותר את המערכת.

הוכחת טענת העזר:

נסתכל על נקודה $(0,s)$. זו נקודה על קו ההתחלה. $y(0,s) = y_0(s) \quad , \quad x(0,s) = x_0(s)$.

מתנאי הטרנסברסליות אנו יודעים ש

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x(0,s)}{\partial t} & \dfrac{\partial y(0,s)}{\partial t} \\ \dfrac{\partial x(0,s)}{\partial s} & \dfrac{\partial y(0,s)}{\partial s} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a(x_0(s), y_0(s), u_0(s)) & b(x_0(s), y_0(s), u_0(s)) \\ \dfrac{dx_0(s)}{ds} & \dfrac{dy_0(s)}{ds} \end{vmatrix} \neq 0$$

לכן, ע"פ משפט הפונקציות הסתומות, אכן ניתן לחלץ את t,s כפונקציה של x,y.

ולכן, $\tilde{u}(x,y) = u(t(x,y), s(x,y))$ פותר את המערכת.

הערה:

הפתרון של המערכת $(*)$ גזיר גם בפרמטר s, ע"פ משפט על מד"ר שאומר שאם תנאי ההתחלה תלויים בפרמטר s בצורה גזירה, אז הפתרון הוא פונקציה גזירה בפרמטר s.

לכן מובטח ש $\{(x(t,s), y(t,s), u(t,s))\}$ גזיר לפי t ולפי s, ולכן, ע"פ משפט הפונקציות הסתומות, גם t,s גזירות ולכן הפתרון שלנו $\tilde{u}(x,y) = u(t(x,y), s(x,y))$ גזיר.

נותר להראות ש $\tilde{u}(x,y)$ הוא אכן פתרון. נציב:

$$a\tilde{u}_x + b\tilde{u}_y = a\left[u(t(x,y), s(x,y))\right]_x + b\left[u(t(x,y), s(x,y))\right]_y$$

$$a\tilde{u}_x + b\tilde{u}_y = a(u_t t_x + u_s s_x) + b(u_t t_y + u_s s_y) = u_t(at_x + bt_y) + u_s(as_x + bs_y)$$

נגזור את $\begin{cases} t = t(x,y) \\ s = s(x,y) \end{cases}$ לפי t ונקבל:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}t = \frac{d}{dt}t(x,y) \\ \frac{d}{dt}s = \frac{d}{dt}s(x,y) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 = \frac{dt}{dx}\frac{dx}{dt} + \frac{dt}{dy}\frac{dy}{dt} = t_x a + t_y b \\ 0 = \frac{ds}{dx}\frac{dx}{dt} + \frac{ds}{dy}\frac{dy}{dt} = s_x a + s_y b \end{cases}$$

ולכן $a\tilde{u}_x + b\tilde{u}_y = u_t\left(at_x + bt_y\right) + u_s\left(as_x + bs_y\right) = u_t = c$, וכך הראנו את קיום הפתרון.

יחידות נובעת מכך שהצגנו שיטה מוגדרת היטב לפיתרון.

בנוסף, מכיוון שכל משטח פותר שעובר דרך $\Gamma_0(s)$ חותך את משפחת הקווים האופייניים

$$\left\{x(t,s), y(t,s), u(t,s)\right\}$$

בקו ההתחלה, המשטח הפותר מכיל את אוסף הקווים האופייניים.

דוגמא:

נתונה המשוואה הליניארית וקו ההתחלה

$$\begin{cases} u_x + u_y = 1 - u \\ \left(x_0(s), y_0(s), u_0(s)\right) = \left(s, s^2 + s, \sin s\right) \end{cases}$$

מצא פתרון $u(x,y)$ שמקיים את תנאי ההתחלה, כלומר מקיים $u\left(x, x^2 + x\right) = \sin x$.

פתרון:

הקו הזה גזיר ואינו חותך את עצמו. נבדוק את תנאי הטרנסברסליות:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ \frac{dx_0}{ds} & \frac{dy_0}{ds} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1+2s \end{vmatrix} = 1 + 2s - 1 = 2s \underset{s\neq 0}{\underset{\uparrow}{\neq}} 0$$

מערכת משוואות הקווים האופייניים:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a = 1 \\ \frac{dy}{dt} = b = 1 \\ \frac{du}{dt} = c = 1 - u \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(t,s) = t + f(s) \\ y(t,s) = t + g(s) \\ u(t,s) = h(s)e^{-t} + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(0,s) = f(s) = s \\ y(0,s) = g(s) = s + s^2 \\ u(0,s) = h(s) + 1 = \sin s \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(t,s) = t + s \\ y(t,s) = t + s + s^2 \\ u(t,s) = (\sin s - 1)e^{-t} + 1 \end{cases}$$

כעת נחלץ את t,s:

$$x = s + t \;\Rightarrow\; t = x - s$$

$$y = x + s^2 \;\Rightarrow\; s = \sqrt{y - x}\;,\; y \geq x$$

נציב ב u ונקבל:

$$u(x,y) = 1 + \left(\sin\sqrt{y-x} - 1\right)e^{\sqrt{y-x} - x}$$

אנו רואים בעיתיות בנקודה $s = 0$, או בנקודה $(x,y) = (0,0)$.

היטל קו ההתחלה: $y = x + x^2$.

היטל הקווים האופייניים: $y = x + s^2$. בנקודה $(0,0)$, היטל קו ההתחלה משיק להיטל הקו האופייני.

דוגמא:

פתור את משוואת ברגרס:

$$\begin{cases} uu_x + u_y = 0\;,\; y \geq 0 \\ u(x,0) = f(x) \end{cases}$$

פתרון:

קו ההתחלה הוא: $\Gamma_0(s) = \left(s, 0, f(s)\right)$. מערכת משוואות הקווים האופייניים:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=a=u \\ \dfrac{dy}{dt}=b=1 \\ \dfrac{du}{dt}=c=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=c_3(s)t+c_1(s) \\ y=t+c_2(s) \\ u=c_3(s) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(0,s)=c_1(s)=s \\ y(0,s)=c_2(s)=0 \\ u(0,s)=c_3(s)=f(s) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(t,s)=f(s)t+s \\ y(t,s)=t \\ u(t,s)=f(s) \end{cases}$$

נחלץ את $u(x,y)$. ניקח את הפונקציה הספציפית:

$$f(s)=\begin{cases} 1, & s\le 0 \\ 1-s, & 0<s<1 \\ 0, & s\ge 1 \end{cases}$$

נקבל:

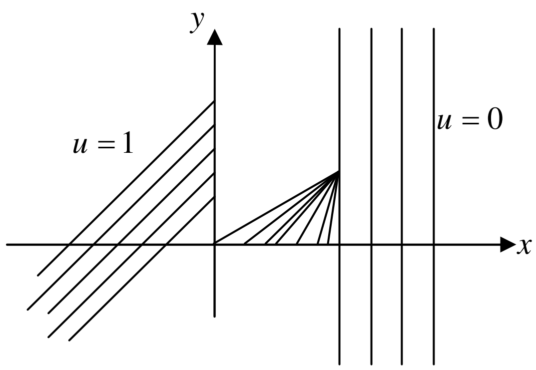
$$u=\begin{cases} 1, & s\le 0 \\ \dfrac{1-x}{1-y}, & 0<s<1 \\ 0, & s\ge 1 \end{cases}$$

היטל הקווים האופייניים:

$$(x,y)=\begin{cases} y=x-s, & s\le 0 \\ x=(1-s)y+s, & 0<s<1 \\ s, & s\ge 1 \end{cases}$$

תנאי הטרנסברסליות:

$$\begin{vmatrix} \dfrac{dx_0}{ds} & \dfrac{dy_0}{ds} \\ a & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ f(s) & 1 \end{vmatrix} = 1 \ne 0$$



לכאורה אין בעיה, אבל המשפט מבטיח רק פתרון בסביבת קו ההתחלה, ויכולות להיות נקודות סינגולריות באזורים אחרים במישור xy.

משוואות מסדר שני

נתעסק בעיקר עם משוואות ליניאריות מסדר II.

צורה כללית:

$$A(x,y)u_{xx}+B(x,y)u_{xy}+C(x,y)u_{yy}+D(x,y)u_x+E(x,y)u_y+F(x,y)u=G(x,y)$$

כאשר אם $G=0$, המשוואה היא הומוגנית.

ניתן לסמן בסימון האופרטורי: $Lu=G$, כאשר L הוא האופרטור של הגזירה והכפלה בפונקציות המתאימות.

מיון משוואות מסדר שני

התבנית הריבועית היא החלק הזה של המשוואה:

$$A(x,y)u_{xx}+B(x,y)u_{xy}+C(x,y)u_{yy}$$

A,B,C נקראים מקדמי התבנית הריבועית, והשאר הם האיברים מסדר נמוך (Low Order Terms):

$$D(x,y)u_x+E(x,y)u_y+F(x,y)u$$

עם סימונים אלו, נקבל משוואה מהצורה:

$$Lu=Au_{xx}+Bu_{xy}+Cu_{yy}+LOT=G$$

נרצה לבצע החלפת משתנים כך שלמשוואה תהיה צורה פשוטה יותר, או צורה קנונית.

כל משוואה מסדר II ניתן להביא לצורה קנונית. המעבר לצורה קנונית הוא החלפת המשתנים:

$$\begin{cases} q=q(x,y) \\ r=r(x,y) \end{cases}$$

כדי שמשפט הפונקציות הסתומות יהיה בתוקף להחלפת משתנים זו, צריך להתקיים:

$$|J|\equiv\begin{vmatrix} q_x & r_x \\ q_y & r_y \end{vmatrix}\neq 0$$

עם החלפת המשתנים הזו, נקבל:

$$u(x,y)=u\big(x(q,r),y(q,r)\big)=\tilde{u}(q,r)$$

$$u_x=\tilde{u}_q q_x+\tilde{u}_r r_x$$

$$u_y=\tilde{u}_q q_y+\tilde{u}_r r_y$$

$$u_{xx}=\tilde{u}_{qq}{q_x}^2+2\tilde{u}_{qr}q_x r_x+\tilde{u}_{rr}{r_x}^2+\underbrace{\tilde{u}_q q_{xx}+\tilde{u}_r r_{xx}}_{LOT}$$

$$u_{xy}=\tilde{u}_{qq}q_x q_y+\tilde{u}_{qr}\left(q_x r_y+q_y r_x\right)+\tilde{u}_{rr}r_x r_y+\underbrace{\tilde{u}_q q_{xy}+\tilde{u}_r r_{xy}}_{LOT}$$

$$u_{yy}=\tilde{u}_{qq}{q_y}^2+2\tilde{u}_{qr}q_y r_y+\tilde{u}_{rr}{r_y}^2+\underbrace{\tilde{u}_q q_{yy}+\tilde{u}_r r_{yy}}_{LOT}$$

נציב החלפת משתנים זו במשוואה:

$$Lu=Au_{xx}+Bu_{xy}+Cu_{yy}+LOT=0$$

$$\tilde{A}\tilde{u}_{qq}+\tilde{B}\tilde{u}_{qr}+\tilde{C}\tilde{u}_{rr}+LOT=0$$

כאשר:

$$\tilde{A}=A{q_x}^2+Bq_x q_y+C{q_y}^2$$

$$\tilde{B}=2Aq_x r_x+B\left(q_x r_y+q_y r_x\right)+2Cq_y r_y$$

$$\tilde{C}=A{r_x}^2+Br_x r_y+C{r_y}^2$$

ניתן לקבל בעזרת אלגברה את הנוסחה הבאה:

$$\begin{pmatrix} \tilde{A} & \frac{\tilde{B}}{2} \\ \frac{\tilde{B}}{2} & \tilde{C} \end{pmatrix}=J^t\begin{pmatrix} A & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & C \end{pmatrix}J=\begin{pmatrix} q_x & q_y \\ r_x & r_y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q_x & r_x \\ q_y & r_y \end{pmatrix}$$

ניקח את הדטרמיננט של שני האגפים ונקבל:

$$\tilde{A}\tilde{C}-\frac{\tilde{B}^2}{4}=|J|^2\left(AC-\frac{B^2}{4}\right)$$

לכן, סימן הדטרמיננט (דיסקרימיננטה) אינו משתנה אחרי החלפת המשתנים.

הגדרה:

נתונה משוואה דפירנציאלית חלקית ליניארית מסדר שני $Lu=G$. אז המשוואה נקראת:

א. אליפטית אם $\Delta(x,y)<0$

ב. היפרבולית אם $\Delta(x,y)>0$

ג. פרבולית אם $\Delta(x,y)=0$

כאשר $\Delta(x,y)\equiv B^2(x,y)-4A(x,y)C(x,y)$

דוגמא:

נביט במשוואת הפוטנציאל (משוואת לפלס) $u_{xx}+u_{yy}=0$.

כאן $A=C=1,B=0$, ולכן $\Delta=B^2-4AC=-4<0$ ולכן המשוואה היא אליפטית.

נביט במשוואת הגלים $u_{tt}-c^2u_{xx}=0$.

כאן $A=1,B=0,C=-c^2$, ולכן $\Delta=B^2-4AC=4c^2>0$ ולכן המשוואה היא היפרבולית.

נביט במשוואת החום $u_t-k^2u_{xx}=0$.

כאן $A=-k^2,B=C=0$, ולכן $\Delta=B^2-4AC=4k^2\cdot 0=0$ ולכן המשוואה היא פרבולית.

שלושת משוואות אלו טיפוסיות לכל אחד מסוג המשוואות ואופיין כללי לכל המשוואות מאותו הסוג.

<u>צורות קנוניות</u>

תהי $Lu=0$ משוואת דיפרנציאלית חלקית ליניארית מסדר שני לאחר החלפת משתנים:

$$\tilde{L}\tilde{u}=\tilde{A}\tilde{u}_{qq}+\tilde{B}\tilde{u}_{qr}+\tilde{C}\tilde{u}_{rr}+LOT=0$$

צורה קנונית של משוואה אליפטית היא כאשר:

$$\tilde{A}=\tilde{C}$$
$$\tilde{B}=0$$

צורה קנונית של משוואה היפרבולית היא כאשר:

$$\tilde{A}=\tilde{C}=0$$
$$\tilde{B}>0$$

צורה קנונית של משוואה פרבולית היא כאשר:

$$\tilde{A}\neq 0$$
$$\tilde{B}=\tilde{C}=0$$

<u>משוואה היפרבולית</u>

טענה:

תהי $Lu=0$ משוואה היפרבולית בתחום D במישור. אזי ניתן למצוא החלפת משתנים כך שהמשוואה במשתנים החדשים היא בצורה קנונית.

הוכחה:

רוצים להראות ש $\tilde{A}=\tilde{C}=0$. כעת:

$$\tilde{A}=0\ \Rightarrow\ Aq_x{}^2+Bq_xq_r+Cq_y{}^2=0$$

$$\tilde{C}=0\ \Rightarrow\ Ar_x{}^2+Br_xr_y+Cr_y{}^2=0$$

אלו הן משוואות דיפרנציאליות חלקיות מסדר שני.

נציב $w=\frac{q_x}{q_r}$ ונקבל:

$$Aw^2+Bw+C=0\ \Rightarrow\ w=\frac{q_x}{q_r}=\frac{-B\pm\sqrt{B^2-4AC}}{2A}$$

או במילים אחרות:

$$2Aq_x+\left(B\pm\sqrt{B^2-4AC}\right)q_y=0$$

וזו משוואה מסדר ראשון, שקל יותר לפתור. משוואת הקווי ם האופייניים:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{B\pm\sqrt{B^2-4AC}}{2A}$$

מקבלים שתי משפחות של קווים אופייניים, בגלל סימן ה $(\pm)$, והפתרון הוא שתי הפונקציות:

$$q(x,y)=Const$$
$$r(x,y)=Const$$

<u>דוגמא</u>

נתונה משוואת טריקומי:

$$u_{xx}+xu_{yy}=0 \quad , \quad x<0$$

נשים לב שזוהי משוואה היפרבולית:

$$A=1,B=0,C=x \;\;\Rightarrow\;\; \Delta=B^2-4AC=-4x>0$$

נביא משוואה זו לצורה קנונית. משוואת הקווים האופייניים:

$$\frac{dy}{dx}=\pm\sqrt{-x}$$

הפתרונות המתקבלים הם:

$$\begin{cases}\frac{3}{2}y+(-x)^{\frac{3}{2}}=q(x,y)=Const\\ \frac{3}{2}y-(-x)^{\frac{3}{2}}=r(x,y)=Const\end{cases} \;\;\Rightarrow\;\; x=-\left(\frac{q-r}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$$

נבטא את הנגזרות:

$$r_y=q_y=\frac{3}{2}$$

$$r_x=\frac{3}{2}\sqrt{-x} \quad , \quad q_x=-\frac{3}{2}\sqrt{-x}$$

$$u_x=\tilde{u}_q\left(q_x=-\frac{3}{2}\sqrt{-x}\right)+\tilde{u}_r\left(\frac{3}{2}\sqrt{-x}\right)$$

$$u_y=\frac{3}{2}\tilde{u}_q+\frac{3}{2}\tilde{u}_r$$

$$u_{xx}=\tilde{u}_{qq}\frac{9}{4}(-x)+\tilde{u}_{rr}\frac{9}{4}(-x)+2\tilde{u}_{rq}\frac{9}{4}x+\left(\tilde{u}_q-\tilde{u}_r\right)\frac{3}{4}\frac{1}{\sqrt{-x}}$$

$$u_{yy}=\frac{9}{4}\tilde{u}_{qq}+2\tilde{u}_{qr}+\tilde{u}_{rr}$$

$$\tilde{L}\tilde{u}=$$

ונוכל לבטא את $\tilde{L}\tilde{u}$:

$$\tilde{L}\tilde{u}=u_{xx}+xu_{yy}=9x(q,r)\left(\tilde{u}_{qr}+\frac{\tilde{u}_q-\tilde{u}_r}{6(q-r)}\right)=0$$

ולכן עלינו לפתור את המשוואה:

$$\tilde{u}_{qr}+\frac{\tilde{u}_q-\tilde{u}_r}{6(q-r)}=0$$

<u>דוגמא</u>

משוואת הגלים:

$$u_{tt}-c^2u_{xx}=0$$

ע"י מעבר $t=y$ נקבל:

$$u_{xx}-c^{-2}u_{yy}=0$$

זוהי משוואה היפרבולית, מכיוון ש:

$$A=1,B=0,C=-c^{-2} \;\;\Rightarrow\;\; \Delta=B^2-4AC=4c^{-2}>0$$

משוואת הקווים האופייניים:

$$\frac{dy}{dx}=\pm c^{-1}$$

הפתרונות המתקבלים:

$$\begin{cases} y+c^{-1}x=q(x,y) \\ y-c^{-1}x=r(x,y) \end{cases}$$

הנגזרות החלקיות:

$$q_x=c^{-1} \quad , \quad r_x=-c^{-1} \quad , \quad q_y=r_y=1$$

$$u_x=c^{-1}\tilde{u}_q-c^{-1}\tilde{u}_r$$

$$u_{xx}=c^{-2}\left(\tilde{u}_{qq}-2u_{qr}+u_{rr}\right)$$

$$u_y=\tilde{u}_q+\tilde{u}_r$$

$$u_{yy}=\tilde{u}_{qq}+2\tilde{u}_{qr}+\tilde{u}_{rr}$$

ולכן:

$$u_{xx}-c^{-2}u_{yy}=-4c^{-2}u_{qr}=0$$

ולכן נקבל את המשוואה הפשוטה:

$$u_{qr}=0$$

שפתרונה הכללי:

$$u(q,r)=F(q)+G(r)$$

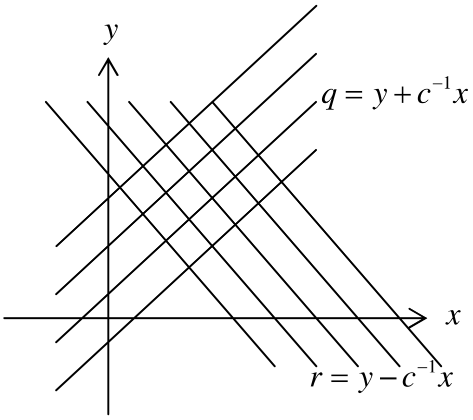
נחזור למשתנים הקודמים x,t ונקבל את הפתרון הכללי של משוואת הגלים:

$$\boxed{u(x,t)=F(x+ct)+G(x-ct)}$$

כעת נבדוק מהם הקווים האופייניים של משוואת הגלים.
קיבלנו ש:

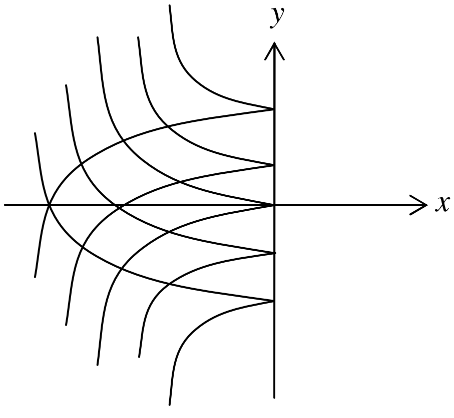
$$\begin{cases} q=y+c^{-1}x \\ r=y-c^{-1}x \end{cases}$$

אלו שתי משפחות של קווים ישרים.
במשוואה היפרבולית, סדר המשוואה יהיה מספר המשפחות של קווים האופייניים.



נבחן את הדוגמא הראשונה ונבדוק מהן שתי משפחות הקווים האופייניים של משוואת טריקומי. לא לשכוח ש $x<0$.
קיבלנו שתי משפחות של קווי ם אופייניים:

$$\begin{cases} y=-\frac{2}{3}(-x)^{\frac{3}{2}}+q \\ y=\frac{2}{3}(-x)^{\frac{3}{2}}+r \end{cases}$$



משוואה פרבולית

נטפל כעת במקרה הפרבולי, כאשר $\Delta=0$. הצורה הקנונית של המשוואה הפרבולי היא כאשר $\tilde{A}=\tilde{B}=0,\tilde{C}\neq 0$.
מכיוון שהדיסקרימיננטה $\Delta=B^2-4AC=0$, חייב להתקיים $\tilde{\Delta}=\tilde{B}^2-4\tilde{A}\tilde{C}=0$ כי שתיהן זהות בסימנן, ונקבל ש $\tilde{A}=0$ גורר $\tilde{B}=0$.
כדי לקבל $\tilde{A}=0$, דרוש כי $q(x,y)$ קבוע על הקווים האופייניים. כלומר:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{B\pm\sqrt{B^2-4AC}}{2A}=\frac{B\pm\sqrt{\Delta}}{2A}=\frac{B}{2A}$$

מה שמוביל אותנו לפתרון אחד.

המשתנה $r=r(x,y)$ ניתן לבחירה שרירותית, בתנאי שהיעקוביאן של הטרנספורמציה שנבחר לא מתאפס.

דוגמא

נביט במשוואה פרבולית:

$$x^2u_{xx}+2xyu_{xy}+y^2u_{yy}=0$$

נראה שהמשוואה אכן פרבולית. קל להבחין ש:

$$A=x^2, B=2xy, C=y^2$$

ולכן:

$$\Delta=B^2-4AC=4x^2y^2-4x^2y^2=0$$

נמצא צורה קנונית למשוואה פרבולית זו. משוואת הקוים האופייים:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{B}{2A}=\frac{y}{x}$$

הפתרון המתקבל:

$$q(x,y)=\frac{y}{x}$$

ונבחר את משפחת הקווים השנייה בצורה שרירותית ופשוטה:

$$r(x,y)=x$$

נחשב את הנגזרת החלקיות:

$$q_x=-\frac{y}{x^2}\quad,\quad q_y=\frac{1}{x}$$

$$r_x=1\quad,\quad r_y=0$$

$$u_x=u_qq_x+u_rr_x=-u_q\frac{y}{x^2}+u_r$$

$$u_y=u_qq_y+u_rr_y=u_q\frac{1}{x}$$

$$u_{xx}=\left(-\frac{y}{x^2}\right)^2u_{qq}-\frac{2y}{x^2}u_{qr}+u_{rr}+\frac{2y}{x^3}u_q$$

$$u_{xy}=u_q\left(-\frac{1}{x^2}\right)-\frac{1}{x}u_{qq}\frac{y}{x^2}+\frac{1}{x}u_{rq}$$

$$u_{yy}=\frac{1}{x^2}u_{qq}$$

נציב זאת במשוואה ונקבל:

$$u_{rr}=0$$

שאפשר בקלות לפתור:

$$u(x,y)=xF\left(\frac{y}{x}\right)+G\left(\frac{y}{x}\right)$$

הערה: ישנה סינגולריות בנקודה $(x,y)=(0,0)$, כי שם המשוואה כבר לא מסדר שני.

משוואה אליפטית

במשוואה כזו, $\Delta<0$. כדי להגיע לצורה הקנונית, נרצה לבצע החלפת משתנים ולדרוש $\tilde{B}=0$, $\tilde{A}=\tilde{C}$.

קיבלנו מקודם ש:

$$\tilde{A}=Aq_x^{\,2}+Bq_xq_y+Cq_y^{\,2}$$

$$\tilde{C}=Ar_x^{\,2}+Br_xr_y+Cr_y^{\,2}$$

$$\tilde{B}=2Aq_xr_x+B\left(q_xr_y+q_yr_x\right)+2Cq_yr_y$$

ולכן יש לדרוש ש:

$$Aq_x^{\,2}+Bq_xq_y+Cq_y^{\,2}=Ar_x^{\,2}+Br_xr_y+Cr_y^{\,2}$$
$$2Aq_xr_x+B\left(q_xr_y+q_yr_x\right)+2Cq_yr_y=0$$

מערכת זה נקראת מערכת בלטרמי. זוהי מערכת של שתי משוואות דיפרנציאליות חלקיות מסדר שני, עם שתי פונקציות נעלמות.

נכפול את המשוואה השנייה ב i, ונקבל:

$$A\left(q_x^{\,2}-r_x^{\,2}\right)+B\left(q_xq_y-r_xr_y\right)+C\left(q_y^{\,2}-r_y^{\,2}\right)=0$$
$$2iAq_xr_x+iB\left(q_xr_y+q_yr_x\right)+2iCq_yr_y=0$$

נחבר את המשוואות ונקבל:

$$A\left(q_x^{\,2}-r_x^{\,2}+2iq_xr_x\right)+B\left(q_xq_y-r_xr_y+i\left(q_xr_y+q_yr_x\right)\right)+C\left(q_y^{\,2}-r_y^{\,2}+2iq_yr_y\right)=0$$
$$A\left(q_x+ir_x\right)^2+B\left(q_x+ir_x\right)\left(q_y+ir_y\right)+C\left(q_y+ir_y\right)^2=0$$

נגדיר:

$$\phi(x,y)=q(x,y)+ir(x,y)$$

ומהגדרה זו, אנו עוסקים עם המשוואה:

$$A\phi_x^{\,2}+B\phi_x\phi_y+C\phi_y^{\,2}=0$$

וזו אותה המשוואה שקיבלנו במקרה ההיפרבולי, עם ההבדל שכאן הפונקציה הנעלמת היא מרוכבת.

אם נגדיר $w=\frac{\phi_x}{\phi_y}$, נקבל משוואה ליניארית חלקית מסדר ראשון, עם מקדמים מרוכבים:

$$\frac{\phi_x}{\phi_y}=-\frac{B\pm\sqrt{B^2-4AC}}{2A}\ \Rightarrow\ 2A\phi_x+\frac{B\pm\sqrt{B^2-4AC}}{2A}\phi_y=0$$

בתנאי ש A,B,C פונקציות אנליטיות (ניתן לפתח אותן לטור חזקות), ניתן להשתמש בשיטת הקווים האופייניים גם במשוואה עם מקדמים מרוכבים. משוואת הקווים האופייניים:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{B\pm i\sqrt{4AC-B^2}}{2A}$$

הפתרון הוא כמובן ש ϕ קבועה על הקווים האופייניים, ולכן:

$$q=\operatorname{Re}\phi$$
$$r=\operatorname{Im}\phi$$

שתי המשפחות של קווים שמתקבלות הן פתרון והצמוד שלו, ולכן יתרם רק זוג אחד של פתרונות עבור q,r.

נראה שהיעקוביאן המתאים מקיים:

$$|J|\equiv\begin{vmatrix}q_x & r_x\\ q_y & r_y\end{vmatrix}\neq 0$$

מהחישוב הבא, ומשיוויונות קושי-רימן עבור ϕ:

$$\frac{\phi_x}{\phi_y}=\frac{\phi_x\overline{\phi_y}}{\left|\phi_y\right|^2}=\frac{\left(q_x+ir_x\right)\left(q_y-ir_y\right)}{q_x^{\,2}+r_x^{\,2}}=\frac{\left(q_xq_y+r_xr_y\right)+i\left(q_xr_y-q_yr_x\right)}{q_x^{\,2}+r_x^{\,2}}$$

אנו רואים שהחלק המדומה מכיל את היעקוביאן. מצד שני:

$$\frac{\phi_x}{\phi_y}=-\frac{B}{2A}\pm\frac{i\sqrt{4AC-B^2}}{2A}$$

וכאן החלק המדומה שונה מ 0, כי זוהי משוואה אליפטית, כלומר $\Delta<0$.

<u>דוגמא</u>

המשוואה

$$u_{xx}+yu_{yy}=0\quad,\quad y>0$$
$$A=1,B=0,C=y$$
$$\Delta=B^2-4AC=-4y<0$$

אליפטית כאשר $y<0$. עוד נשים לב שהמשוואה היפרבולית כאשר $y<0$ ופרבולית כאשר $y=0$.

משוואת הקווים האופייניים :

$$\frac{dy}{dx}=\frac{B\pm\sqrt{B^2-4AC}}{2A}=\pm i\sqrt{y}$$

והפתרון הוא

$$\phi(x,y)=x+2i\sqrt{y}$$
$$\psi(x,y)=x-2i\sqrt{y}$$

ולכן ניקח

$$q=\operatorname{Re}\phi=x$$
$$r=\operatorname{Im}\phi=2\sqrt{y}$$

נחשב את הניגזרות :

$$u_x=u_q \quad , \quad u_y=\frac{u_r}{\sqrt{y}}$$
$$u_{xx}=u_{qq}$$
$$u_{yy}=\frac{u_{rr}}{y}-u_r\frac{1}{2\sqrt{y}}$$

ולכן

$$u_{xx}+yu_{yy}=u_{qq}+u_{rr}-\frac{u_r}{r}=0$$

<u>משוואת הגלים</u>

צורה כללית :

$$u_{tt}=c^2u_{xx} \quad , \quad t>0, x\in R$$

את הפתרון הכללי מצאנו :

$$u(x,t)=F(x+ct)+G(x-ct)$$

ובפרט

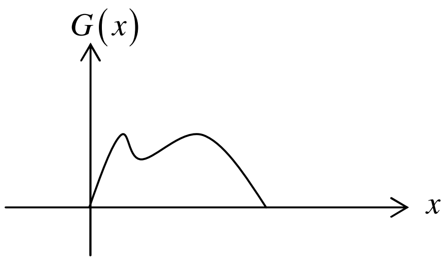
$$u(x,0)=F(x)+G(x)$$

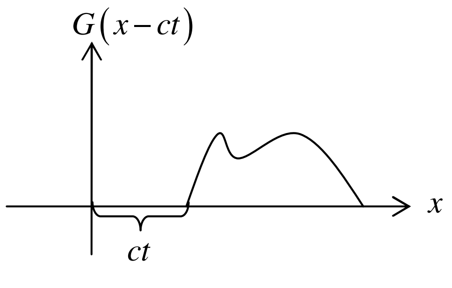
כאשר F,G שתי פונקציות שרירותיות של משתנה אחד, גזירות פעמיים ברציפות לפי אותו משתנה.

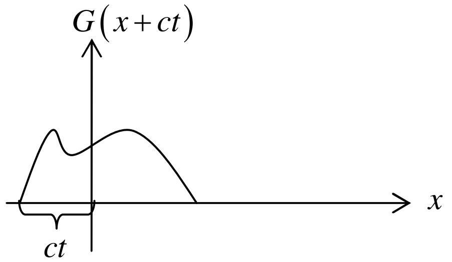
מהי המשמעות של הפונקציה $G(x-ct)$?

הגרף של $G(x-ct)$ הוא הגרף של $G(x)$ מוזז ימינה ב ct, ולכן זהו גל מתקדם במהירות c.

הגרף של $G(x+ct)$ הוא הגרף של $G(x)$ מוזז שמאלה ב ct, ולכן זהו גל נסוג במהירות c.







נביט במיתר הומוגני שבו גל (הפרעה), שמתנהג לפי המשוואה

$$u_{tt}=c^2u_{xx}$$

כאשר c קבוע שתלוי בתכונות הקפיץ.
ראינו שזו משוואה היפרבולית לא קנונית. לאחר מעבר לקואורדינאטות קנוניות, פתרנו אותה וקיבלנו שהפתרון הכללי הוא:

$$u(x,t)=F(x-ct)+G(x+ct)$$

כאשר F,G פונקציות כלשהן של משתנה אחד, שגזירות פעמיים ברציפות.

במציאות, יש לנו תנאי צד הכוללים תנאי התחלה ותנאי שפה.

תנאי שפה **הומוגנים**:

אם המיתר סופי בקטע $[0,L]$ והוא קשור בשני הקצוות אזי בעצם נתונים תנאי שפה (נקרא גם תנאי דיריכלה):

$$u(0,t)=u(L,t)=0$$

אם המיתר חופשי, אזי המתיחות של המיתר הקצוות היא אפס, ולכן נתונים לנו תנאי השפה (נקרא גם תנאי נוימן):

$$u_x(0,t)=u_x(L,t)=0$$

תנאי מעורב הוא לדוגמא (נקרא גם בעיית שפה מסוג שלישי):

$$u(0,t)+\alpha u(0,t)=0$$

תנאי התחלה:

מתעניינים בפתרונות $u(x,t)$, כאשר אנו יודעים איך נראה המיתר בזמן התחלתי $t=t_0$.
תנאי המיתר שקובעים את הפתרון:

א. צורת המיתר ההתחלתית ב $t=0$: $u(x,0)=f(x)$

ב. המהירות ההתחלתית של המיתר ב $t=0$: $u_t(x,0)=g(x)$

<u>בעיית קושי למיתר אינסופי</u>

רוצים לפתור את הבעיה הבאה:

$$\begin{cases} u_{tt}-c^2u_{xx}=0 \quad , \quad t>0, x\in R \\ u(x,0)=f(x) \\ u_t(x,0)=g(x) \end{cases}$$

שימו לב שזוהי משוואה מסדר שני, ולכן אנו זקוקים לשני תנאים לפתרון פרטי.
הפתרון הכללי לבעיה, כידוע הוא

$$u(x,t)=F(x-ct)+G(x+ct)$$

נותר למצוא את הפונקציות F,G, וזאת ע"י תנאי ההתחלה:

$$(1)\, u(x,0)=f(x)=F(x)+G(x)$$

$$(2)\, u_t(x,0)=g(x)=-cF'(x)+cG'(x)$$

נבצע אינטגרציה למשוואה (2) ונקבל

$$(3)\int_0^x g(s)ds+k=-cF(x)+cG(x)$$

נחבר את (1) עם (3):

$$\frac{1}{2c}f(x)+\frac{1}{2c}\int_0^x g(s)ds+k=G(x)$$

נחסר את (3) מ (1) ונקבל:

$$\frac{1}{2}f(x)-\frac{1}{2c}\int_0^x g(s)ds-k=F(x)$$

ולכן הפתרון הפרטי הוא (נוסחאת דאלמבר):

$$\boxed{u(x,t)=F(x-ct)+G(x+ct)=\frac{f(x+ct)+f(x-ct)}{2}+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}g(s)\,ds}$$

הערות:

1. נוסחת דאלמבר נכונה עבור $g\in C^1$ ו $f\in C^2$.
2. נוסחת דאלמבר מראה קיום של פתרון לבעיה
3. נוסחת דאלמבר מראה שהפתרון יחיד מכיוון שיש נוסחה מוגדרת היטב, שהגיע מאלגוריתם באופן חד-ערכי.
4. ישנה יציבות ביחס לתנאי ההתחלה, כלומר שינוי קטן בתנאי ההתחלה גורר שינוי קטן בפתרון.

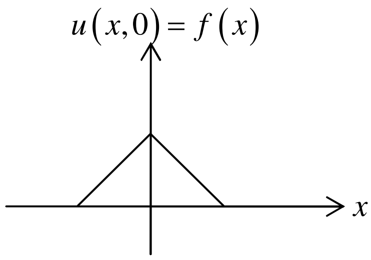
אם נניח כי $g(x)\equiv 0$, כלומר מהירות התחלתית 0. אזי הפתרון שנקבל במקרה זה הוא:

$$\boxed{u(x,t)=\frac{f(x+ct)+f(x-ct)}{2}}$$

דוגמא:

ניקח תנאי התחלה:

$$f(x)=\begin{cases}x+1 & -1\le x\le 0\\ x-1 & 0\le x\le 1\\ 0 & |x|>1\end{cases}$$



כאן f כלל לא גזירה. בהמשך נראה למה ניתן לפתור למרות זאת.

נניח לשם פשטות שמהירות התקדמות הגל היא $c=1$.

לא אפשרי כאן להציב את $f(x)$ בנוסחת דאלמבר, כי $f(x)$ נתונה ע"י מקרים. אם נביט בגרפים המתאימים של $\frac{1}{2}f(x-ct)$ ו $\frac{1}{2}f(x+ct)$ נראה שהפתרון הוא חיבור של הגרפים בכל נקודה. נשים לב ששתי הפונקציות יכולות "להיבנות" ונקבל ערכיםגבוהים יחסית, והן יכול גם "להההרס" ואז נקבל שקט הגל.

הגדרה – בעיה מוצגת היטב:

בעיה דיפרנציאלית לה יש קיום, יחידות ויציבות נקראת בעיה מוצגת היטב.

טענה:

בעית קושי למשוואת הגלים מוצגת היטב.

הוכחה:

אמרנו כבר שקיום ויחידות מובטחים בנוסחת דאלמבר.

יש להראות יציבות הפתרון:

נניח כי בנוסף ל f,g כתנאי התחלה, נתונים תנאי התחלה f_1,g_1.

נסמן את הפתרון של הבעיה החדשה ב $u_1(x,t)$.

כדי לבדוק יציבות, יש לבדוק האם $|u_1(x,t)-u(x,t)|$ קטן כאשר $|f_1(x)-f(x)|$ קטן וגם $|g_1(x)-g(x)|$ קטן. כלומר, נניח כי קיים $\delta>0$ כך ש $|f_1(x)-f(x)|<\delta$ וגם $|g_1(x)-g(x)|<\delta$ לכל x ונחשב:

$$|u(x,t)-u_1(x,t)|=\left|\frac{f(x+ct)+f(x-ct)}{2}+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}g(s)\,ds-\frac{f_1(x+ct)+f_1(x-ct)}{2}-\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}g_1(s)\,ds\right|$$

$$\le\left|\frac{f(x+ct)-f_1(x+ct)}{2}\right|+\left|\frac{f(x-ct)-f_1(x-ct)}{2}\right|+\frac{1}{2c}\left|\int_{x-ct}^{x+ct}g(s)-g_1(s)\,ds\right|$$

$$\le\tfrac{1}{2}\left|f(x+ct)-f_1(x+ct)\right|+\tfrac{1}{2}\left|f(x-ct)-f_1(x-ct)\right|+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}\left|g(s)-g_1(s)\right|ds$$

$$\le\tfrac{1}{2}\delta+\tfrac{1}{2}\delta+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}\delta\,ds=\delta+\delta t=\delta(t+1)$$

קיבלנו שהשגיאה גדלה עם הזמן, אך עם מרווחים קבועים נוכל לדאוג לכך שהשגיאה תהיה קטנה כרצוננו. ולכן הבעיה

$$\begin{cases} u_{tt}-c^2u_{xx}=0 \\ u(x,0)=f(x) \quad , \quad 0<t<T \\ u_t(x,0)=g(x) \end{cases}$$

מוצגת היטב. אם נרצה ש $\left|u_1(x,t)-u(x,t)\right|<\varepsilon$, אז $\delta(1+t)<\varepsilon$, כלומר ניקח $\delta=\dfrac{\varepsilon}{1+T}$.

דוגמא:

לא כל בעיה היא מוצגת היטב: בעיית הדאמאר, שהראתה שיחידות וקיום לא גורר יציבות.
נסתכל על בעיית קושי הבאה (סדרת הבעיות):

$$\begin{cases} \Delta u^n = u^n{}_{tt}+u^n{}_{xx}=0 \\ u^n(x,0)=0 \\ u^n{}_t(x,0)=n^{-k}\sin nx \quad , \quad k>0 \, , \, n\in N \end{cases}$$

פתרון הבעיה הוא:

$$u^n(x,t)=n^{-(k+1)}\sin nx \sinh nt$$

אבל, אם נציב $(x,t)=\left(\frac{\pi}{2},1\right)$ וניקח את הסדרה $n=4N+1$:

$$u^n\left(\tfrac{\pi}{2},1\right)=n^{-(k+1)}\sinh n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$$

למרות שתנאי ההתחלה שואפים ל 0.
ולכן אין יציבות בדוגמא זו!

<u>פתרונות מוכללים</u>

ראינו שלבעית קושי עבור משוואת הגלים קיימת יציבות בתנאי ההתחלה. נרצה להגדיר פתרון לבעית קושי גם כאשר הפונקציות $f(x),g(x)$ אינן פונקציות חלקות.

ראינו שאם יש לנו סדרה של פתרונות שבמידה שווה:

$$\left|g_n(x)-g(x)\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \, , \, \left|f_n(x)-f(x)\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

אז בתחום $0<t<T$ יש גבול במידה שווה:

$$\left|u_n(x,t)-u(x,t)\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

נניח כעת ש $f(x),g(x)$ רק רציפות וחסומות (לא גזירות), מחשבון דיפרנציאלי ידוע שניתן לכן למצוא סדרת פונקציות חלקות (גזירות פעמיים יספיק לנו) לכל אחת, $f_n(x),g_n(x)$ השואפות במידה שווה ל $f(x),g(x)$ בהתאמה.

אם נפתור את בעית קושי עבור תנאי התחלה $f_n(x),g_n(x)$, נקבל פתרונות קלאסיים $u_n(x,t)$ שמתכנסים במידה שווה ל $u(x,t)$, כלומר $u_n(x,t) \xrightarrow[n\to\infty]{} u(x,t)$, כאשר:

$$u(x,t)=\frac{f(x+ct)+f(x-ct)}{2}+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)\,ds$$

הגדרה – פתרון מוכלל:

גבול במידה שווה של פתרונות קלאסיים לבעית קושי של משוואת הגלים נקרא פתרון מוכלל.

נרצה לבדוק תופעה גלית שבה שינוי תנאי ההתחלה לא משפיע על נקודות רחוקות.

נקח נקודה (x_0,t_0) ונצייר את הקווים האופייניים היוצאים מנקודה זו.

יש לנו שתי משפחות של קווים אופייניים:

$$\begin{cases} x-ct=Const \\ x+ct=Const \end{cases}$$