גיליון 1

1. הפתרון ההומוגני $y_h(t)$ של $\ddot{y}+3\dot{y}+2y=t^2+5t+3$, כאשר שורשי הפולינום האופייני $r^2+3r+2=(r+1)(r+2)$ הם $r_{1,2}=-1,-2$, הוא $y_h(t)=c_1e^{-t}+c_1e^{-2t}$.

2. הפתרון הפרטי $y_p(t)$ של המשוואה הנ"ל יהיה, כמו תמיד, צירוף ליניארי של אות הכניסה $x(t)$ ושל ניגזרותיו. במקרה שלנו אות הכניסה הוא $x(t)=t^2+5t+3$, ולכן $y_p(h)=\alpha t^2+\beta t+\gamma$. נציב פתרון זה במשוואה למציאת המקדמים:

$$\frac{d^2}{dt^2}\left[\alpha t^2+\beta t+\gamma\right]+3\frac{d}{dt}\left[\alpha t^2+\beta t+\gamma\right]+2\left[\alpha t^2+\beta t+\gamma\right]=t^2+5t+3$$

$$2\alpha+6\alpha t+3\beta+2\alpha t^2+2\beta t+2\gamma=t^2+5t+3$$

$$\Rightarrow\begin{cases}t^2: & 2\alpha=1\\ t^1: & 6\alpha+2\beta=5\\ t^0: & 2\alpha+3\beta+2\gamma=3\end{cases}$$

3. תהי $f(t)=\begin{cases}e^{\frac{t}{2}}, & -5\le t\le -1\\ 0, & t>-1\ ,\ t<-5\end{cases}$. נביט ב

$g(t)=f(-t)=\begin{cases}e^{-\frac{t}{2}}, & -5\le -t\le -1\\ 0, & -t>-1\ ,\ -t<-5\end{cases}=\begin{cases}e^{-\frac{t}{2}}, & 5\ge t\ge 1\\ 0, & t<1\ ,\ t>5\end{cases}$.

כעת, עבור $1\le c\le 5$ נקבל $g(c)=e^{-\frac{c}{2}}$.

אפשר גם היה פשוט לחשב את $f(-c)$ מלכתחילה.

4. נביט ב $f(t)=e^{-\alpha t}u(t)$. כל פונקציה ניתנת לפירוק לחלק זוגי ולחלק אי-זוגי ע"י:

$f(t)=\dfrac{f(t)+f(-t)}{2}+\dfrac{f(t)-f(-t)}{2}$, ולכן במקרה שלנו

$f(t)=\dfrac{f(t)+f(-t)}{2}+\dfrac{f(t)-f(-t)}{2}=\dfrac{e^{-\alpha t}u(t)+e^{\alpha t}u(-t)}{2}+\dfrac{e^{-\alpha t}u(t)-e^{\alpha t}u(-t)}{2}$, והחלק הזוגי

הוא כמובן $f_{even}(t)=f(t)=\dfrac{e^{-\alpha t}u(t)+e^{\alpha t}u(-t)}{2}$. ועבור נקודה ספציפית $t=\frac{1}{\alpha}$ נקבל

$$f_{even}(t)=f(t)=\frac{\frac{1}{e}u\left(\frac{1}{a}\right)+eu\left(-\frac{1}{a}\right)}{2}$$

גיליון 2

1. אם האות $x(t)=0$ עבור $t<3$, אזי האות $x(1-t)+x(2-t)=0$ כאשר
$$1-t<3 \ \wedge \ 2-t<3$$
$$\Rightarrow \ t>-2 \ \wedge \ t>-1 \ .$$
$$\Rightarrow \ t>-1$$

2. אם האות $x(t)=0$ עבור $t<3$, אזי האות $x(3t)=0$ כאשר $t<1 \ \Rightarrow \ 3t<3$.

3. אם האות $x(t)=0$ עבור $t<3$, אזי האות $x\left(\frac{t}{3}\right)=0$ כאשר $t<9 \ \Rightarrow \ \frac{t}{3}<3$.

4. אם $x(t)=e^{-t}u(t)$ אזי הקונבולוציה $x(t)*u(t)\triangleq\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)u(t-\tau)d\tau$ היא $\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\tau}u(\tau)u(t-\tau)d\tau=0$ כי האינטגרנד עצמו מתאפס לכל τ.

5. $$\int_0^1 x^2e^xdx=x^2e^x\Big|_0^1-2\int_0^1 xe^xdx=e-2\left(xe^x\Big|_0^1-\int_0^1 e^xdx\right)=e-2\big(e-(e-1)\big)=e-2$$

6. מחדו"א 1: $\int_a^c f(t)dt=\int_a^b f(t)dt+\int_b^c f(t)dt$

7. ל $f(x)=|x|$ אין נגזרת ב $x=0$, כי הנגזרות החד-צדדיות שונות. ל $f(x)=\sqrt{x}$ אין נגזרת ב $x=0$ מימין כי גבול הנגזרת לא קיים (הגבול ∞), ולכן ל $f(x)=\sqrt{|x|}$ אין נגזרת ב $x=0$.

8. ע"פ ההגדרה, $f'(0^+)\triangleq\dfrac{h\sin\frac{1}{h}-f(0^+)}{h}=\dfrac{h\sin\frac{1}{h}-0}{h}=\sin\frac{1}{h}$ וגבול זה לא קיים.

9. $$\int x\left(x^2+5\right)^{75}dx\underset{\substack{u=x^2+5\\du=2xdx}}{=}\int\frac{du}{2dx}u^{75}dx=\frac{1}{2}\int u^{75}du=\frac{1}{2}\frac{u^{76}}{76}+C=\frac{\left(x^2+5\right)^{76}}{152}+C$$

10. $$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-2(x-2)}\delta(t-2)dt=e^{-2(x-2)}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-2)dt=e^{-2(x-2)}$$

11. מחדו"א 1: $\int_a^b f(t)+g(t)dt=\int_a^b f(t)dt+\int_a^b g(t)dt$

<u>גיליון 3</u>

1. הפונקציות $x(t)=A\cos(\omega t+\theta),\ -\pi<\theta<\pi$ לא מהוות מרחב וקטורי, כי הן לא סגורות לחיבור.
2. הפונקציות הבאות יכולות להיות נורמה:

$$\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|dt,\sqrt{\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|^2 dt},\sup_{t\in\mathbb{R}}|x(t)|$$

הפונקציה $\left|\int_{-\infty}^{\infty}x(t)dt\right|$ לא יכולה להיות נורמה.

3. אם $y(n)=\sum_{i=-\infty}^{n}x(i)$, אז יכולים להתקיים:

$\sup_{n\in\mathbb{Z}}|y(n)|<\sup_{n\in\mathbb{Z}}|x(n)|$ או $\sup_{n\in\mathbb{Z}}|y(n)|=\infty$ או $\sup_{n\in\mathbb{Z}}|y(n)|>\sup_{n\in\mathbb{Z}}|x(n)|$ או $\sup_{n\in\mathbb{Z}}|y(n)|=\sup_{n\in\mathbb{Z}}|x(n)|$

4. עבור המערכת $\ddot{y}-2\dot{y}-3y=5\dot{x}+4x$, המשוואה האופיינית היא $r^2-2r-3=(r-3)(r+1)=0$ ולכן הפתרון ההומוגני של המשוואה, באופן כללי, הוא $y_h(t)=c_1e^{3t}+c_2e^{-t}$
5. עבור המשוואה $\ddot{y}-2\dot{y}-3y=0$, פתרונה $y_h(t)=c_1e^{3t}+c_2e^{-t}$ יכול להתבדר עבור $t\to\infty$ וגם $t\to-\infty$.

<u>גיליון 4</u>

1. תזכורת: L_2 הוא מרחב הפונקציות המקיימות $\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2dx<\infty$, ו L_1 הוא מרחב הפונקציות המקיימות

$$\text{I.}\ \int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx<\infty$$

האינטגרל $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x}$ מתבדר אך $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^2}$ ולכן $u(t)\in L_2$, $u(t)\notin L_1$.

האינטגרל $\int_0^{\infty}e^{-ax}dx=\int_0^{\infty}\left|e^{(-a+ib)x}\right|dx$ ולכן $v(t)\in L_2$, $v(t)\in L_1$.

2. אם $x(t)$ זוגית, מתקיים

$$F(-\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{i\omega x}dx\underset{t=-x}{\overset{\uparrow}{=}}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-i\omega t}dt=F(\omega)$$

אם $x(t)$ גם ממשית, מתקיים

$$\overline{F(\omega)}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{i\omega x}dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-i(-\omega)x}dx=F(-\omega)=F(\omega)$$

וגם

$$-\overline{F(-\omega)}=-\overline{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{i\omega x}dx}=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-i\omega x}dx=-F(\omega)\neq F(\omega)$$

3. תהי $h(t)$ עם התמרת פורייה $H(\omega)$. אזי

$$F\{F\{F\{h\}\}\}=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-i\omega x}dx\right)e^{-i\omega x}dx\right)e^{-i\omega x}dx=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}H(\omega)e^{i(-\omega)x}dx\right)e^{-i\omega x}dx$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\left[2\pi h(-u)\right]e^{-i\omega u}du=2\pi\int_{-\infty}^{\infty}h(-u)e^{-i\omega u}du\underset{t=-u}{\overset{\uparrow}{=}}2\pi\int_{-\infty}^{\infty}h(t)e^{-i(-\omega)t}dt$$

$$=2\pi H(-\omega)$$

4. אם $x(t)\xrightarrow{F}\begin{cases}-\omega^2+1, & |\omega|\le 1\\ 0, & |\omega|>1\end{cases}$, אזי מנוסחת פנשרל להתמרה המוגדרת בשאלה 3, נקבל

$$\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|^2\,dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|F[x](\omega)|^2\,d\omega \;\Rightarrow\; 2\pi\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|^2\,dx=2\int_0^1\left(-\omega^2+1\right)^2 d\omega$$

$$=2\int_0^1\left(\omega^4-2\omega^2+1\right)d\omega=2\left(\frac{1}{5}-\frac{2}{3}+1\right)=\frac{16}{15}$$

<u>גיליון 5</u>

1. עבור המערכת $\ddot{y}(t)+6\dot{y}(t)+13y(t)=\dot{x}(t)-6x(t)$, פונקצית התמסורת היא $H(\alpha)=\dfrac{\alpha-6}{\alpha^2+6\alpha+13}$.

עבור $\alpha=3$ נקבל $H(3)=\dfrac{3-6}{3^2+6\cdot3+13}=-\dfrac{3}{40}$

2. נחשב את התמרת לפלס החד-צדדית של $u(t)$:

$$U(s)=\int_0^\infty u(t)e^{-st}dt=\int_0^\infty e^{-st}dt=\left.\frac{e^{-st}}{-s}\right|_0^\infty=\frac{1}{s},\qquad \mathrm{Re}\{s\}>0$$

נחשב את התמרת לפלס החד-צדדית $Y(s)$ של $u(t-a)$:

$$Y(s)=\int_0^\infty u(t-a)e^{-st}dt\underset{z=t-a}{=}\int_{-a}^\infty u(z)e^{-s(z+a)}dz=e^{-sa}\int_{-a}^\infty x(z)e^{-sz}dz=e^{-sa}\int_0^\infty e^{-sz}dz=\frac{e^{-sa}}{s},\qquad \mathrm{Re}\{s\}>0$$

ולכן, התמרת לפלס החד-צדדית של $x(t)=u(t)-u(t-1)$ (מליניאריות ההתמרה) היא

$$X(s)=\frac{1}{s}-\frac{e^{-s}}{s}$$

3. התמרת לפלס החד-צדדית של $\alpha\in\mathbb{R}$, $x(t)=\delta(t-\alpha)$, היא, ע"פ ההגדרה:

$$X(s)=\int_{0^-}^\infty x(t)e^{-st}dt=\int_{0^-}^\infty \delta(t-\alpha)e^{-st}dt=\begin{cases}e^{-s\alpha} & ,\alpha\ge0\\ 0 & ,\alpha<0\end{cases}$$

4. הזזה בזמן, כפי שניתן לראות בשאלה 2, לא תיתן לנו את התמרת לפלס המתאימה כפול פונקציה אקספוננציאלית – אך כשהיה מדובר בפונקצית מדרגה, אזי זה כן נכון.

אבל, אם האותות מוכפלים בפונקצית מדרגה, ולכך התכוון המשורר, אזי ניתן לומר שעבור $x(t)$ שהתמרת לפלס שלו היא $X(s)$, מקבלים את הזהויות $L\{x(t-a)\}=e^{-sa}X(s)$ וגם $L\{e^{at}x(t)\}=X(t-a)$

5. אחת התכונות של התמרת לפלס: $L\{x(t)*h(t)\}(s)=X(s)H(s)$, ולכן עבור האותות $x(t),u(t)$ שמקיימים $U(s)=\dfrac{1}{s}, X(s)=\dfrac{6}{(s-3)(s-2)}$, נקבל

$$L\left\{\int_{0^-}^t x(\tau)d\tau\right\}=L\left\{\int_{0^-}^t x(\tau)u(t-\tau)d\tau\right\}=L\{x(t)*u(t)\}(s)=X(s)H(s)X(s)=\frac{6}{s(s-3)(s-2)}$$

נבצע פירוק לשברים חלקיים:

$$\frac{1}{s(s-3)(s-2)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s-2}+\frac{C}{s-3}=\frac{A(s^2-5s+6)+B(s^2-3s)+C(s^2-2s)}{s(s-3)(s-2)}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}s^2: & 0=A+B+C\\ s^1: & 0=-5A-3B-2C\\ s^0: & 1=6A\end{cases}\Rightarrow A=\tfrac{1}{6},B=-\tfrac{1}{2},C=\tfrac{1}{3}$$

ולכן $L\left\{\displaystyle\int_{0^-}^t x(\tau)d\tau\right\}=\dfrac{1}{s}-\dfrac{3}{s-2}+\dfrac{2}{s-3}$