מושגי בסיס

ישנה טענה: $a \Rightarrow b$, כלומר, קיומו של a גורר קיומו של b

הוכחה רגילה:

אם a נכון אז b נכון, ונסמן: $a \Rightarrow b$

הוכחה נגדית:

b לא יכול להתקיים ולכן גם a לא
מפני ש a חייב היה לגרור קיומו של b

הוכחה בדרך השלילה:

a לא b $a \not\Leftarrow b$, מראים שהשוואה ביניהם יוצרת סתירה לחוק מתמטי.

דוגמא:

טענה: $\sqrt{2}$ אי רציונאלי.
הוכחה: בדרך השלילה, נוכיח ש $\sqrt{2}$ לא יכול להיות רציונאלי.
נתונה הגדרה למספר רציונאלי: $Q = \left\{ \frac{m}{n} \middle| (Z \ni m,n)(n \neq 0) \right\}$

$$\frac{m^2}{n^2} = 2 \rightarrow m^2 = 2n^2$$

נסמן: p מספר הפעמים ש m מתחלק ב 2
q מספר הפעמים ש n מתחלק ב 2

$$m = 2^p \overline{m}$$
$$n = 2^q \overline{n}$$

ונציב:

$$2^{2p}\overline{m} = 2^{2q+1}\overline{n}$$

כעת ניתן להבחין כי המספר באגף שמאל מתחלק מספר זוגי של פעמים (לפי החזקה)
והמספר באגף ימין מתחלק ב 2 מספר אי זוגי של פעמים (לפי החזקה)
מכיוון שלפי סימן ה"שווה" שני האגפים חייבים להיות שווים נוצרת פה סתירה והוכחנו כי $\sqrt{2}$ לא יכול להיות שייך לקבוצת המספרים הרציונלים (שניתן לבטאם ע"י חלוקה של שני מספרים שלמים)

הנחות:

1. קיום כל אקסיומות שדה המספרים הממשיים:
2. בן כל שני מספרים רציונלים יש מספר אי רציונאלי.
3. בין כל שני מספרים ממשיים (רציונלים או אי רציונלים) יש מספר רציונאלי.

קטעים על ישר המספרים:

כל הישר $-\infty < x < \infty$

קטע פתוח:

$$(a,b)_{\in} x \Leftrightarrow a < x < b$$

קטע סגור:

$$[a,b]_{\in} x \Leftrightarrow a \le x \le b$$

$$(a,\infty)_{\in} x \qquad a < x$$
$$[a,\infty)_{\in} x \qquad a \le x$$

ערך מוחלט:

זהו למעשה המרחק של x מ 0

$$|x| = \begin{cases} +x \Leftarrow x \ge 0 \\ -x \Leftarrow x < 0 \end{cases}$$

המרחק בין שתי נקודות על ישר:

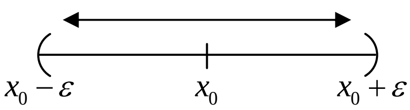
$$d = |a-b| = |b-a|$$

אי שיוויונים עם ערך מוחלט:

$a > \|x\|$	$a < \|x\|$
$-a < x < a$	$x < -a$ **<u>או</u>** $x > a$

- **המרחק מ a של כל הנקודות בקטע קטן מ** ε

$$|x - x_0| < \varepsilon$$
$$-\varepsilon + x_0 < x < \varepsilon + x_0$$

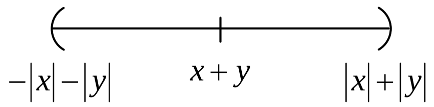


<u>אי שוויון המשולש (1):</u> $|x+y| \le |x|+|y|$

הוכחה:

$$-|x|-|y| \le x+y \le |x|+|y| \Leftarrow \begin{cases} -|x| \le x \le |x| \\ -|y| \le y \le |y| \end{cases} +$$

כעת נתבונן בציר המספרים:



זוהי למעשה ממש ההגדרה של אי שוויון בערך מוחלט... $a > |x| \quad -a < x < a \Leftrightarrow$

ולכן: $-|x|-|y| \le x+y \le |x|+|y| \Rightarrow |x+y| \le |x|+|y|$

<u>אי שוויון המשולש (2):</u> $|x-y| \ge \big||x|-|y|\big|$

הוכחה:

נדרוש שוויון המתקיים גם בערך מוחלט.

$x = (x-y)+y$

ולפי ההוכחה, אי שוויון משולש (1) ניצור אי שוויון... $|x| = |(x-y)+y| \le |x-y|+|y|$

$|x| \le |x-y|+|y|$

נעביר אגפים: $|x|-|y| \le |x-y|$

$y = (y-x)+x$

נעביר את אותו התהליך גם על y: $|y| = |(y-x)+x| \le |y-x|+|x|$

$|y| \le |y-x|+|x|$

$|y|-|x| \le |y-x|$

וכעת נתבונן בשני אי השוויונים שקיבלנו:

נעביר אגפים: $|y|-|x| \le |y-x|$

$$\Downarrow$$

$$-\underbrace{|x-y|}_{\Downarrow} \le \underbrace{|x|-|y|}_{\Downarrow} \qquad\qquad \underbrace{|x|-|y|}_{\Downarrow} \le \underbrace{|x-y|}_{\Downarrow}$$

$x \quad < \quad a$ **וגם** $- \quad a \quad < \quad x$

$a > |x|$

ושוב, לפי הגדרת הערך המוחלט..

$$\boxed{|x-y| \ge \big||x|-|y|\big|}$$

<u>אי שיוויון הממוצעים:</u>

סוגי ממוצעים: $\left(x, y > 0\right)$

חשבוני:	$\frac{x+y}{2}$	$\frac{x_0+x_1\cdots+x_n}{n}$
הנדסי:	$\sqrt{xy}$	$\sqrt[n]{x_0\cdot x_1\cdot\cdots\cdot x_n}$
הרמוני:	$\frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}$	$\frac{n}{\frac{1}{x_0}+\frac{1}{x_1}+\cdots+\frac{1}{x_n}}$

$$\frac{n}{\frac{1}{x_0}+\frac{1}{x_1}+\cdots+\frac{1}{x_n}} \leq \sqrt[n]{x_0\cdot x_1\cdot\cdots\cdot x_n} \leq \frac{x_0+x_1\cdots+x_n}{n}$$

סדרות

סדרה: רשימה אינסופית של מספרים ממשיים.

חסם: מספר כלשהו שחוסם את הסדרה.

הגדרת חסימות: סדרה a_n נקראת חסומה אם קיימים שני מספרים ממשיים m,n כך ש
$\forall n \in \mathbb{N}, \exists n \le a_n \le m$

הגדרה שקולה: סדרה a_n תהיה חסומה אם קיים מספר $M > 0$ כך ש
$\forall n \in \mathbb{N}, \exists -M \le a_n \le M \Leftrightarrow |a_n| \le M$

הגדרת חסימות מלמעלה/מטה: סדרה a_n תהיה תהיה חסומה מלמעלה אם קיים מספר M כך ש $a_n \le M$.
וחסומה מלמטה בהתאמה.

הגדרת חסם מלעיל: M חסם מלעיל/מלרע של a_n
- אם M חסם מלעיל אז כל $x > M$ הוא גם חסם מלעיל.

הגדרת סופרמום: מספר ממשי S נקרא הסופרמום של a_n אם הוא החסם מלעיל הכי קטן של a_n ונסמן $S = \sup A$.

- **אם הסופרמום שייך לקבוצה זהו מקסימום.**
- **אם הוא לא שייך לקבוצה, אומרים של a_n אין מקסימום.**

אקסיומת השלמות: לכל קבוצה חסומה מלמעלה יש סופרמום.

הגדרת אינפימום: מספר ממשי I נקרא אינפימום של a_n אם הוא החסם מלרע הגדול ביות של a_n.

- **אם I שייך לסדרה אומרים שהוא מינימום.**
- **אם I לא שייך לסדרה אומרים שאין לה מינימום.**

משפט: כל סדרת מספרים ממשיים תשאף למספר ממשי, דבר זה מתקיים רק במספרים ממשיים (ולא ברציונלים לדוג').

<u>גבול ("כרצוני")</u>

<u>הגדרה:</u> נאמר כי L הוא גבול הסדרה a_n אם בכל סביבה של L נמצאים כל אברי הסדרה חוץ ממספר סופי של אברים.

- הסביבה של L: הקטע $(L+\varepsilon, L-\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$
- כל האברים, חוץ ממספר סופי של אברים, קיים מספר n_0 כך שלכל $n > n_0$ מתקיים:

$$|a_n - L| < \varepsilon \Leftrightarrow L-\varepsilon \le a_n \le L+\varepsilon$$

לדוג':

$$\frac{1}{n} \to 0$$

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon \to \frac{1}{n} < \varepsilon \to n > \frac{1}{\varepsilon} \to n_0 = \frac{1}{\varepsilon}$$

$$\Rightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists n_0 = \frac{1}{\varepsilon}, n \ge n_0, \left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$$

$$\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| < \varepsilon \to \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} < \varepsilon \to n_0 = \frac{1}{\varepsilon}$$

$$\Rightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists n_0 = \frac{1}{\varepsilon}, n \ge n_0, \left|\frac{n}{n+1} - 1\right| < \varepsilon$$

<u>דוגמא:</u> הוכח: $|a_n| \to |L| \Leftarrow a_n \to L$

יהי $\varepsilon > 0$, נתון כי $a_n \to L$, לכן קיים n_0 כך שלכל $n \ge n_0$ קיים $|a_n - L| < \varepsilon$.

לפי אי שוויון משולשים:

$$||a_n| - |L|| \le |a_n - L| < \varepsilon$$
$$\Downarrow$$
$$|a_n| \to |L|$$

האם הדבר נכון גם עבור התהליך ההפוך? לא.

לדוג':

$$\left|(-1)^n\right| \to 1 \ne (-1)^n \to ?$$

זאת למעט מקרה פרטי שבו הקבוצה שואפת ל 0

<u>צ"ל:</u>

$$|a_n| \to 0 \Leftrightarrow a_n \to 0$$

הוכחה:

$$a_n \to 0 \Rightarrow |a_n| \to 0$$
$$|a_n| < \varepsilon \Rightarrow ||a_n|| < \varepsilon$$
$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$$

$$|a_n| \to 0 \Rightarrow a_n \to 0$$
$$||a_n|| < \varepsilon \Rightarrow |a_n| < \varepsilon$$
$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

<u>הגדרה:</u> אם לסדרה יש גבול, אומרים שהיא מתכנסת, אחרת, מתבדרת.

<u>משפטי הסדרות</u>

1. אם לסדרה יש גבול אז הוא יחיד.
2. סדרה מתכנסת היא חסומה.
3. אם $a_n \to A$ ו $b_n \to B$ ו $c = const.$
א. $Ca_n \to CA$
ב. $\left(a_n \pm b_n\right) \to A \pm B$
ג. $a_n b_n \to AB$
ד. $\frac{a_n}{b_n} \to \frac{A}{B}$

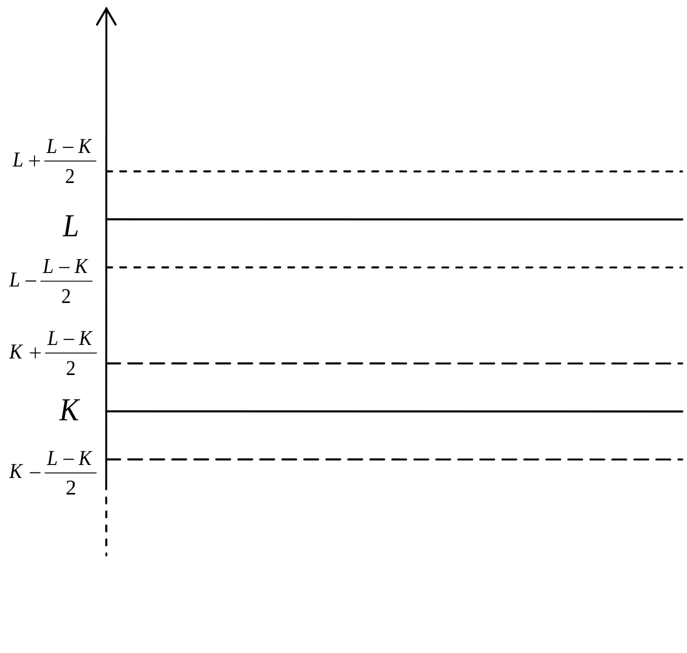
<u>צ"ל:</u> אם לסדרה יש גבול אז הוא יחיד

הוכחה: נניח בשלילה שיש לסדרה שני גבולות שונים L, K ונניח בלי הגדרת הכלליות כי $L > K$ יהי $\varepsilon = \frac{L-K}{2} > 0$, לכן קיים n_1 כך שלכל $n \geq n_1$ מתקיים: $\left(\frac{L+K}{2} =\right) L - \frac{L-K}{2} < a_n < L + \frac{L-K}{2}$

ולכל $n \geq n_2$ מתקיים: $K - \frac{L-K}{2} < a_n < K + \frac{L-K}{2} \left(= \frac{L+K}{2}\right)$

וכעת יש סתירה.

אז לכל $n > n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ מתקיים $\frac{L+K}{2} < a_n < \frac{L+K}{2}$ וזה כמובן בלתי אפשרי.



<u>צ"ל:</u> אם סדרה מתכנסת היא חסומה.

$\exists M > 0, \forall n \in \mathbb{N}, |a_n| \le M$

$\Rightarrow -M \le a_n \le M$

הוכחה:

יהא $0 < \varepsilon = 1$

נתון: $a_n \to L$ אז: $\exists n_0, \forall n \ge n_0, |a_n - L| < 1$

לפי אי שוויון המשולש (2):

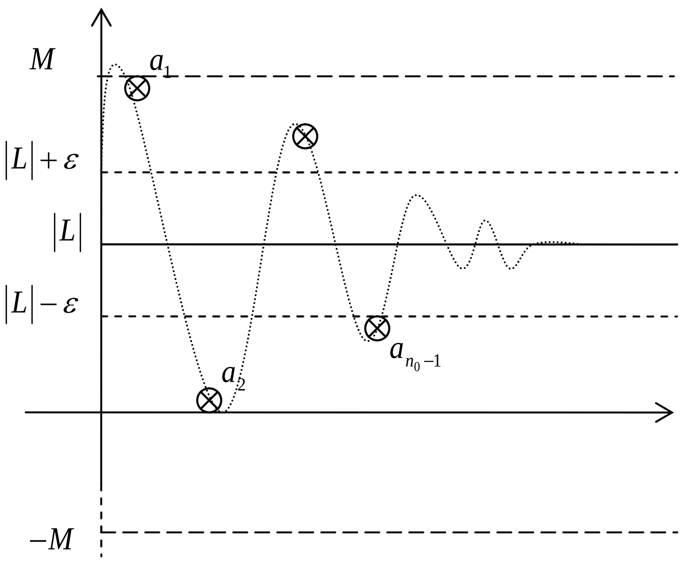
$$\big||a_n| - |L|\big| < |a_n - L| < 1$$
$$\Rightarrow |a_n| \le |L| + 1 = M$$

מתקיים לכל $n \ge n_0$

נבחר: $M = \max\left\{\overbrace{|a_1|, |a_2|, ..., |a_{n_0} - 1|}^{num \ne \infty}, |L| + 1\right\}$

ואז מתקיים:

$|a_n| \le M$



<u>הוכחת אריתמטיקה של גבלות</u>

יהיו $a_n \to A$ $b_n \to B$ שתי סדרות מתכנסות אזי:

1. **<u>כפל בקבוע:</u>**

צ"ל: אם $a_n \to A$ **אז** $Ca_n \to CA$

הוכחה:

נתון: $a_n \to A$ יהא $\varepsilon > 0$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_1, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_1 \Rightarrow |a_n - A| < \varepsilon$$

נחזור לטענה: $|Ca_n - AC| = |C||a_n - A| < \varepsilon |C|$

ולכן לכל $n \geq n_0 = n_1$ מתקיים גם $|Ca_n - CA| < \varepsilon |C|$ **(מ.ש.ל.)**

---

2. **<u>סכום</u>:**

צ"ל: אם $a_n \to A$ ו $b_n \to B$ אז $(a_n \pm b_n) \to A \pm B \Leftarrow |(a_n \pm b_n) - (A \pm B)| < \varepsilon$

הוכחה:

לפי הנתון: יהא $\frac{\varepsilon}{2} > 0$

$$(\mathrm{I}).\exists n_1, \forall n \geq n_1, |a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$(\mathrm{II}).\exists n_2, \forall n \geq n_2, |b_n - B| < \frac{\varepsilon}{2}$$

אזי לכל $n \geq n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ מתקיים גם (I) וגם (II).

ולכן לכל $n \geq n_0$ מתקיים:

(או: מצאנו n_0 כך שלכל $n \geq n_0$ מתקיים:)

(נחזור למה שצריך להוכיח**:)**

$$|(b_n - B) + (a_n - A)| = |(a_n + b_n) - (A + B)| \leq |b_n - B| + |a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

(מ.ש.ל.)

4. **<u>כפל</u>:**

צ"ל: אם $a_n \to A$ ו $b_n \to B$ אז $\left(a_n b_n\right) \to AB \Leftarrow$ $\left|\left(a_n b_n\right) - AB\right| < \varepsilon$

הוכחה:

נתון: $\begin{matrix} a_n \to A \\ b_n \to B \end{matrix}$, יהא $\varepsilon > 0$ אזי:

$$\left(\mathrm{I}\right).\exists n_1, \forall n \geq n_1, \left|a_n - A\right| < \varepsilon$$
$$\left(\mathrm{II}\right).\exists n_2, \forall n \geq n_2, \left|b_n - B\right| < \varepsilon$$

אזי לכל $n \geq n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ מתקיים גם $\left(\mathrm{I}\right)$ וגם $\left(\mathrm{II}\right)$.

a_n מתכנסת (ולכן חסומה) ולכן קיים $M > 0$ כך ש $\left|a_n\right| < M$

לכן לכל $n \geq n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ מתקיים:

$$\left|a_n b_n - AB\right| = \left|a_n B - AB + a_n b_n - a_n B\right| \leq \left|B\right|\left|a_n - A\right| + \left|a_n\right|\left|b_n - B\right| \underset{a_n \leq M}{\leq} \left|B\right|\left|a_n - A\right| + M\left|b_n - B\right| < M\varepsilon + \left|B\right|\varepsilon$$

אזי מצאנו n_0 כך שלכל $n \geq n_0$ מתקיים (גם): **(מ.ש.ל.)** $\Rightarrow \left|a_n b_n - AB\right| < M\varepsilon + \left|B\right|\varepsilon$

<u>הערה:</u>

(נוכל להכפיל את $\left(\mathrm{I}\right)$ ב $\left|B\right|$ ואת $\left(\mathrm{II}\right)$ ב M :)

(עדיין מתקיים לכל $n \geq n_0 = \max\{n_1, n_2\}$)

3. **__מנה:__**

צ"ל: אם $a_n \to A$ ו $b_n \to B$ $(b_n, B \neq 0)$ אז $\left(\frac{a_n}{b_n}\right) \to \frac{A}{B}$ $\Leftarrow$ $\left|\left(\frac{a_n}{b_n}\right) - \frac{A}{B}\right| < \varepsilon$

הוכחה:

א. נתון: $b_n \to B$ ויהא $0 < \varepsilon = \frac{|B|}{2}$ אזי:

$$\exists n_1, \forall n \geq n_1, |b_n - B| < \frac{|B|}{2}$$

$$\left||b_n| - |B|\right| \leq |b_n - B| < \frac{|B|}{2}$$

נפתח לפי אי שיווין משולש ונקבל שלכל $n \geq n_1$ מתקיים:

$$\Rightarrow |B| - \frac{|B|}{2} < |b_n| < |B| + \frac{|B|}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{|B|}{2} < |b_n| < \frac{3|B|}{2}$$

ב. **צ"ל:**

אם $b_n, B \neq 0$ אז $\frac{1}{b_n} \to \frac{1}{B}$

ונתון: $\exists n_2, \forall n \geq n_2, |b_n - B| < \varepsilon$

אזי לכל $n \geq n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ מתקיים:

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{B}\right| = \left|\frac{b_n - B}{b_n B}\right| = \frac{|b_n - B|}{|b_n||B|} \underset{\left(b_n > \frac{|B|}{2}\right)}{\leq} \frac{|b_n - B|}{\frac{|B|}{2}|B|} = \frac{2|b_n - B|}{|B|^2} \underset{\left(|b_n - B| < \varepsilon\right)}{\leq} \frac{2}{|B|^2}\varepsilon$$

ג. הוכחנו כי אם $b_n \to B$ אז $\frac{1}{b_n} \to \frac{1}{B}$ $(b_n, B \neq 0)$

ונתון $a_n \to A$ אז לפי אריתמטיקה של גבולות (כפל):

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(a_n \frac{1}{b_n}\right) = A\frac{1}{B} = \frac{A}{B}$$

(מ.ש.ל.)

משפט: תהי $a_n \to L$ אם $a_n \geq 0$ לכל $n \in \mathbb{N}$.
אזי גם $L \geq 0$

הוכחה:
נוכיח בשלילה. נניח $L < 0$
ניקח $\varepsilon = |L|$ (או $\varepsilon = -L > 0$)
נתון: $a_n \to L$ אזי:

$$\exists n_0, \forall n \geq n_0, |a_n - A| < -L \qquad \Rightarrow \left| \begin{array}{l} L < a_n - L < -L \\ 2L < a_n < 0 \end{array} \right.$$

אבל, $a_n \geq 0$
לכן $L \geq 0$

משפט: אם $a_n \to A$ ו $b_n \to B$ ולכל $n \in \mathbb{N}$ $a_n \leq b_n$ אזי $A \leq B$.

הוכחה:
נגדיר סדרה חדשה: $c_n = b_n - a_n \geq 0$
לפי אריתמטיקה: $c_n \to (B - A)$
נתון ש $c_n \geq 0$ אז הגבול שלה $B - A \geq 0$ ולכן $A \leq B$

משפט הסנדוויץ':

יהיו שלוש סדרות a_n, b_n, c_n ונתון $a_n \to L$ ו $c_n \to L$
אם $a_n \leq b_n \leq c_n$ לכל $n \in \mathbb{N}$ אזי גם $b_n \to L$
(נכון גם עבור $n \geq n_0$ מסויים)

הוכחה:
יהי $\varepsilon > 0$

נתון: $a_n \to L$ ו $c_n \to L$, לכן,

$$(\mathrm{I}).\exists n_1, \forall n \geq n_1, \boxed{L - \varepsilon < a_n} < L + \varepsilon$$
$$(\mathrm{II}).\exists n_2, \forall n \geq n_2, L - \varepsilon < \boxed{c_n < L + \varepsilon}$$

אזי לכל $n \geq n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ מתקיים גם (I) וגם (II).

ולכן לכל $n \geq n_0$ מתקיים גם:
$$L - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < L + \varepsilon$$
מצאנו שלכל $n \geq n_0$ מתקיים $|b_n - L| < \varepsilon$ ולכן $b_n \to L$

משפט: לכל $a_n > 0$ מתקיים $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{a_n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$

משפט: אם $a_n \to 0$ ו b_n חסומה אזי: $a_nb_n \to 0$

למשל: פונקצית סינוס היא חסומה. ואז: $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sin(n)}{n}\right) = \underbrace{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)}_{\downarrow \atop 0}\underbrace{\lim_{n\to\infty}\left(\sin(n)\right)}_{\downarrow \atop (-1\le\sin(n)\le1)} = 0$

שלילת הגדרת הגבול:

$a_n \to L$ אם לכל סביבה של L נמצאים כל אברי הסדרה חוץ ממשפר סופי של אברים.
$a_n \not\to L$ אם קיימת סביבה של L שמחוצה לה יש אינסוף איברים של הסדרה.

דוגמא:
$(-1)^n$ (מתבדרת)

נראה כי אין גבול בשלושה מקרים: $L>0$ $L<0$ ו $L=0$

1. $L=0$: מחוץ לקטע $\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$ נמצאים כל האברים.
2. $L>0$: מחוץ לקטע $\left(\frac{L}{2},\frac{3L}{2}\right)$ נמצאים באופן מובהק כל האברים (-1) ויש אינסוף כאלה.
3. $L<0$: מחוץ לקטע $\left(-\frac{3L}{2},-\frac{L}{2}\right)$ נמצאים באופן מובהק כל האברים (1) ויש אינסוף כאלה.

לכן לסדרה אין גבול סופי.

לסיכום:

$$a_n \to L : \forall\varepsilon>0, \exists n_0, \forall n\ge n_0, |a_n - L| < \varepsilon$$
$$a_n \not\to L : \exists\varepsilon>0, \forall n, \exists n_1 \ge n\ , |a_{n_1} - L| > \varepsilon$$

גבול במובן הרחב אינסופי

נאמר ש $a_n \to \pm\infty$ אם בכל סביבה של $\pm\infty$ נמצאים כל אברי הסדרה, חוץ ממספר סופי של אברים.

$a_n \to \infty$ **:** $\exists n_0, \forall n \ge n_0, a_n > A$

$a_n \to -\infty$ **:** $\exists n_0, \forall n \ge n_0, a_n < A$

דוגמא: יהי $a_n \to 0$ ו $a_n \neq 0$ לכל n אזי $\frac{1}{|a_n|} \to \infty$

הוכחה: יהי $A > 0$ ונסמן $\varepsilon = \frac{1}{A}$

נתון: $a_n \to 0$ אז מתקיים לכל $n \ge n_0$ טבעי ש $\frac{1}{|a_n|}$ גדול מ - A

$|a_n| < \varepsilon$

$\frac{1}{|a_n|} > \frac{1}{\varepsilon} = A$

משפט: אם $a_n \to \infty$ ו $b_n \to \infty$ אז $a_n + b_n \to \infty$

הוכחה: יהי $A > 0$

נתון: $a_n \to \infty$, $b_n \to \infty$ לכן:

$(\mathrm{I}).\exists n_1, \forall n \ge n_1, a_n > A$

$(\mathrm{II}).\exists n_2, \forall n \ge n_2, b_n > A$

אזי לכל $n \ge n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ מתקיים גם (I) וגם (II):

$a_n + b_n > A + A = 2A$

הערה: המשפט תקף רק עבור חיבור (ולא עבור חילוק או חיסור).

משפטים נוספים:

$\begin{cases} a_n \to 0 \\ b_n \to -\infty \end{cases}$ **אז** $(a_n - b_n) \to \infty$

$\begin{cases} a_n \to \infty \\ b_n \to \infty \end{cases}$ **אז** $(a_n b_n) \to \infty$

$\begin{cases} a_n \to \infty \\ b_n \to -\infty \end{cases}$ **אז** $(a_n b_n) \to -\infty$

משפט כלל הפיצה:

יהי a_n, b_n סדרות המקיימות $a_n \le b_n$ אז לכל n טבעי:

$b_n \to \infty \Leftarrow a_n \to \infty$

$a_n \to -\infty \Leftarrow b_n \to -\infty$

הוכחה:

נתון: $a_n \to \infty$ אזי $\exists n_0, \forall n \ge n_0, a_n > A$ ונתון $a_n \le b_n$ לכן: $b_n \ge a_n > A$ אזי קיים n_0 כך ש לכל n טבעי מתקיים גם: $b_n > A$

<u>**סדרות מונוטוניות**</u>

תהי a_n סדרה מונוטונית וחסומה אז יש לה גבול.

סדרה מונוטונית לא יורדת: $a_n \le a_{n+1}$

הוכחה: נניח כי a_n לא יורדת.

נתון שהסדרה חסומה מלעיל ויהי L החסם העליון שלה. היות וL חסם מלעיל אז $a_n \le L$ לכל n טבעי.
יהי $\varepsilon > 0$ וצ"ל שקיים N כך שלכל $n > N$: $L-\varepsilon < a_n < L+\varepsilon$
ידוע ש $L-\varepsilon$ אינו חסם מלעיל לכן קיים N כך ש $a_N > L-\varepsilon$.
לכן לכל $n > N$: $L-\varepsilon < a_N \le a_n < L+\varepsilon$

תתי סדרות

הגדרה: תהי a_n סדרה נתונה ותהי n_k סדרה מונוטונית עולה ממש של מספרים טבעיים, לכל k טבעי נגדיר:
$b_k = a_{n_k}$ אזי נקבל סדרה חדשה b_k אשר תקרא תת סדרה של הסדרה a_n. ונסמן a_{n_k}.

1. כל אברי תת-הסדרה "לקוחים" מן הסדרה המקורית.
2. אברי תת-הסדרה מופיעים באותו סדר כמו במקורית.

הגדרה: מספר ממשי a יקרא גבול חלקי של סדרה אם קיימת בה תת-סדרה המתכנסת ל a.

הגדרת גבול עליון ותחתון:

1. הגבול החלקי הגדול ביותר של סדרה a_n נקרא הגבול העליון של הסדרה. ונסמן:
$$\overline{\lim_{n\to\infty}} a_n \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}\left(\sup a_n\right)$$
2. הגבול החלקי הקטן ביותר של סדרה a_n נקרא הגבול התחתון של הסדרה ונסמן:
$$\underline{\lim_{n\to\infty}} a_n \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}\left(\inf a_n\right)$$

הערה:

1. אם הסדרה אינה חסומה מלמעלה אז הגבול העליון שלה הוא ∞.
2. אם הסדרה אינה חסומה מלמטה אז הגבול התחתון של הוא $-\infty$.

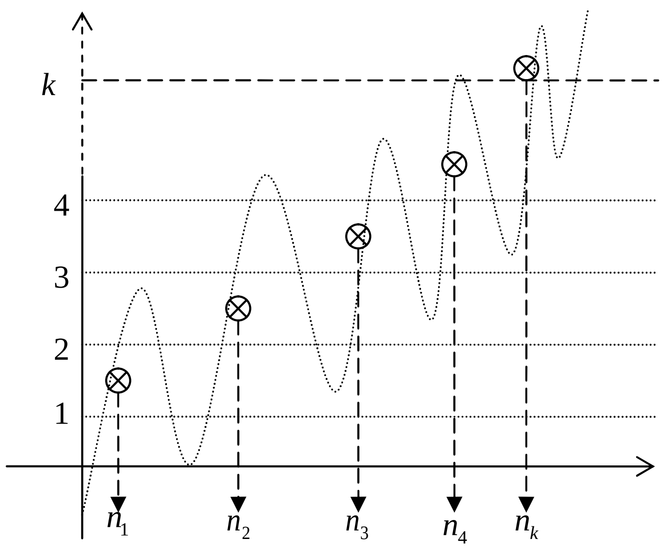
הוכחה:

נסמן M חסם מלעיל של a_n.

סדרה חסומה מלמעלה: $\exists M, \forall n \in \mathbb{N}, a_n \le M$

סדרה לא חסומה מלמעלה: $\forall M, \exists n_0 \in \mathbb{N}, a_n > M$

מתוך הסדרה הלא חסומה, נבחר תת סדרה,
כך שהמספר הסידורי של כל איבר יהיה קטן מהאבר עצמו. $\forall k \in \mathbb{N}, \exists n_k, a_{n_k} > k$ ואז $a_{n_k} > a_{n_{k-1}}$
אם $a_{n_k} > k$ לכל k ו $\lim_{k\to\infty} k = \infty$ אז מכלל הפיצה: $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = \infty$.



משפט: לכל סדרה גבול עליון וגבול תחתון.

משפט: יהי $\underline{A}$ הגבול התחתון של a_n (סדרה חסומה) ו $\overline{A}$ הגבול העליון. אז לכל $\varepsilon > 0$ בקטע $\left(\underline{A}-\varepsilon, \overline{A}+\varepsilon\right)$, נמצאים על אברי הסדרה חוץ ממספר סופי של אברים.

מסקנה: אם לסדרה יש גבול עליון (סופי) וגבול תחתון (סופי) אז היא חסומה.

<u>משפט בולצנו ווירשטראס</u>

לכל סדרה חסומה יש תת סדרה שמתכנסת

הוכחה:
לצורך ההוכחה נשתמש בשני משפטי עזר.

משפט א': תהי a_n סדרה מונוטונית עולה
ותהי b_n סדרה מונוטונית יורדת.
אם: א. $a_n < b_n$ לכל n טבעי.
ב. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(b_n - a_n\right) = 0$
אזי הסדרות a_n, b_n מתכנסות לאותו גבול.

הוכחה:
נתון: $a_n < b_n$ לכן:

$$a_1 \le a_2 \le .... \le a_n < M \Leftrightarrow I < b_n \le ... \le b_2 \le b_1$$

a_n סדרה מונוטונית עולה ו b_n מונוטונית יורדת.
שתיהן חסומות (אחת ע"י השנייה). ולכן מתכנסות בהתאמה.

נתון: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_n - b_n\right) = 0$ אז לפי אריתמטיקה של גבולות $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

משפט ב': (הלמה של קנטור)

תהי $[a_n,b_n]$ סדרה של קטעים סגורים כך שלכל n טבעי מתקיים $[a_n,b_n]\supseteq[a_{n+1},b_{n+1}]$ ו $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$ אזי קיימת נקודה אחת בלבד (c) המשותפת לכל הקטעים כלומר: $c\in[a_n,b_n]$

הוכחה:

תנאי משפט א' מתקיימים לכן שתי הסדרות חסומות, מונוטוניות ושואפות לאותו גבול.

$\uparrow a_n$ ולכן מתכנסת לסופרמום שלה.

$\downarrow b_n$ ולכן מתכנסת לאינפימום שלה.

אז $a_n\le c\le b_n$, אך האם זו הנקודה היחידה?

נניח קיימת נקודה נוספת d כך ש $a_n\le d\le b_n$.

אם $a_n\le d$ אז d הוא חסם מלעיל. c הוא הסופרמום ולכן $d>c$.

אם $d\le b_n$ אז d הוא חסם מלרע. c הוא האינפימום ולכן $d<c$. קיבלנו סתירה ולכן c יחידה.

הערה: הלמה של קנטור לא תעבוד עבור קטעים פתוחים. (a_n,b_n)

משפט BW:

לכל סדרה חסומה יש תת סדרה שמתכנסת.

הוכחה:

נתונה סדרה x_n חסומה.

לכן קיימים שני מספרים a_1,b_1 כך ש $a_1\le x_n\le b_1$ בקטע $[a_1,b_1]$ יש אינסוף אברים של x_n.

נחצה את הקטע $[a_1,b_1]$ לשני חצאים שווים ונקבל: $[a_1,h_1][h_1,b_1]$.

באחד מהקטעים הנ"ל חייב להיות (לפחות באחד) מספר אינסופי של אברים. נבחר אותו ונחצה גם אותו לשניים. לפחות באחד משני החצאים החדשים חייב להתקיים מספר אינסופי של איברים, נבחר אותו, וכך הלאה....

קיבלנו סדרת קטעים כך ש $[a_n,b_n]\supseteq[a_{n+1},b_{n+1}]$.

נחשב את הגבול כאילו היה סדרת הפרשים ששני אבריה הראשוני נחצים $n-1$ פעמים:

$$\lim_{n\to\infty}\left(b_n-a_n\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{b_1-a_1}{2^{n-1}}\right)=0$$

אזי, לפי הלמה של קנטור קיימת נקודה יחידה c המשותפת לכל הקטעים כך ש $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=c$

נבנה תת סדרה x_n בצורה הבאה:

יהי n_1 מספר טבעי כך ש $a_1\le x_{n_1}\le b_1$

יהי n_2 מספר טבעי כך ש $a_2\le x_{n_2}\le b_2$ ו $n_2>n_1$

נקבל לכל k טבעי מספר טבעי n_k כך ש $a_k\le x_{n_k}\le b_k$

$b_k\to c$ ו $a_k\to c$ אז לפי משפט הסנדוויץ' $x_{n_k}\to c$

אז מצאנו תת סדרה המתכנסת לגבול. **(מ.ש.ל.)**

משפט: לכל סדרה חסומה יש גבול חלקי סופי.

משפט: לכל סדרה יש תת סדרה שיש לה גבול סופי או אינסופי.

משפט: לכל סדרה גבול חלקי סופי או אינסופי.

משפט: לכל סדרה יש תת סדרה מונוטונית.
משפט עזר: להוכיח שלכל סדרה מתכנסת יש תת סדרה מונוטונית.

משפט: לסדרה 1. יש גבול אם ורק אם 2. יש לה גבול חלקי יחיד.

הוכחה: (למקרה של גבול סופי).

$\underline{(1)\Rightarrow(2)}$: תהי $a_n \to L$ לכן קיים n_0 כך שלכל $n \ge n_0$ מתקיים $|a_n - L| < \varepsilon$.

צ"ל: $\forall\varepsilon>0, \exists k_0, \forall k \ge k_0, |a_{n_k} - L| < \varepsilon$

יהי k_0 מספר טבעי כך ש $n_{k_0} \ge n_0$. (אברי הסדרה)
לכל $k \ge k_0$ n_k מונוטונית ממש כך ש: $n_k > n_{k_0} \ge n_0$
ואז לכל $k \ge k_0$ מתקיים: $|a_{n_k} - L| < \varepsilon$.
(למעשה, התחלנו "לבחור" אברים החל מה ε שבחרנו. ואז ההתכנסות עובדת עבור אותם אברים ממש כמו עבור אברי הסדרה המקוריים.

$\underline{(2)\Rightarrow(1)}$: נתון ל a_n גבול חלקי יחיד A. נניח בשלילה ש A אינו הגבול של a_n (הסדרה כולה). לכן קיים ε_0 כך שמחוץ לקטע $(A-\varepsilon_0, A+\varepsilon_0)$ יש אינסוף אברי הסדרה.
ניקח את כל האברים מחוץ לקטע ונבנה מהם תת סדרה של a_n, $b_k = a_{n_k}$
b_k היא בעצמה סדרה ולכן יש לה תת סדרה שמתכנסת, b_{k_l}. אבל זו אינה יכולה להתכנס ל A כי היא מחוץ לסביבה שלו $(A-\varepsilon_0, A+\varepsilon_0)$. וזו סתירה לכך שלתת סדרה קיים גבול חלקי יחיד, אם מצאנו עוד גבול (שאינו A).

מסקנות:
1. אם סדרה מתכנסת אז כל תת סדרה שלה מתכנסת לאותו גבול.
2. אם לסדרה יש שתי תת סדרות שמתכנסות לגבולות שונים אז לסדרה אין גבול.

קריטריון קושי להתכנסות סדרות

סדרה a_n **מתכנסת לגבול סופי אם ורק אם לכל** $\varepsilon > 0$ **קיים** n_0 **כך שלכל** $m,n > 0$ **מתקיים** $|a_m - a_n| < \varepsilon$

סדרה שמקיימת $|a_m - a_n| < \varepsilon$ תקרא "סדרת קושי".

הוכחה:

1. יהי $\varepsilon > 0$ ונתון $a_n \to L$ לכן קיים n_0 כך שלכל $n \ge n_0$ מתקיים $|a_n - L| < \frac{\varepsilon}{2}$.

יהי $m > n_0$ אז לכל $m,n > 0$ מתקיים:

$|a_n - a_m| = |a_n - L + L - a_m| \le |a_n - L| + |a_m - L| < \varepsilon$ **(מ.ש.ל.)**

---

2. א. נראה שהסדרה חסומה, אם $m = n_0$ אז לכל $n \ge n_0$ מתקיים $|a_n - a_{n_0}| < \varepsilon$

$$a_{n_0} - \varepsilon < a_n < a_{n_0} + \varepsilon$$

ונבחר $M = \max\left\{|a_1|,|a_2|,|a_3|,...,|a_{n_0-1}||a_{n_0-\varepsilon}||a_{n_0+\varepsilon}|\right\}$

אז $|a_n| \le M$ לכל n טבעי והסדרה חסומה.

ב. אם הסדרה חסומה אז לפי משפט BW יש לה תת סדרה שמתכנסת לגבול סופי $a_{n_k} \to L$, לכן:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists k \in \mathbb{N}, \forall k \ge k_0, |a_{n_k} - L| < \varepsilon$$

$$|a_n - L| = |a_n - a_{n_k} + a_{n_k} - L| \le |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - L| < 2\varepsilon$$

לכל $k \ge k_0$, $n, n_k > n_0$

פונקציות

פונקציה של משתנה יחיד

תהיינה D,E שתי קבוצות של מספרים ממשיים. פונקציה f מן הקבוצה D אל הקבוצה E הינו חוק מוגדר היטב וידוע מראש, אשר על פיו מותאם כל מספר x בD למספר יחיד y ב E. $f: D \to E$

$$y = f(x)$$

הקבוצה D נקראת **תחום ההגדרה** של הפונקציה והקבוצה E נקראת **הטווח** של הפונקציה.

$$\begin{cases} f: [0,1] \to \mathbb{R} \\ y = x^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f: \cancel{[-1,1]} \to ? \\ y = \dfrac{1}{x} \end{cases}$$ (כי ל0 אין הגדרה בקבוצת הטווח)

<u>תחום הגדרה:</u> תחום ההגדרה הטבעי של הפונקציה הינו קבוצת מספרים ממשיים הגדולה ביותר עבורם הפונקציה מוגדרת. (או תחום ההגדרה המקסימלי)

<u>דוגמא:</u> $f(x) = \sqrt{4 - x^2} \quad -2 \le x \le x$

<u>תמונה:</u> אם $D \to E$ אזי התמונה של f קבוצת כל המספרים y ב E שעבורה קיים $x \in D$ כך ש: $f(x) = y$

<u>דוגמא:</u> $\sin : \mathbb{R} \to [-1,1]$ סינוס על כל מספר ממשי נותן תוצאה בין 1 ל-1.

<u>פונקציה חד-חד ערכית:</u> פונקציה היא חד-חד ערכית (חח"ע) אם לכל y קיים לכל היותר x יחיד בD כך ש: $f(x) = y$

או אם $f(x_1) = f(x_2)$ אז $x_1 = x_2$

<u>הגדרת "על":</u> נאמר f היא פונקציה מD על E אם E הוא תמונה של f. או אם לכל אבר בתחום ההגדרה יש "תוצאה" בתמונה ורק בתמונה.

<u>דוגמא:</u>

$$\begin{cases} f: [0,2] \xrightarrow[1-1]{} [0,4] \\ f = x^2 \end{cases}$$

<u>הגדרת פונקציה הפוכה:</u> אם $f:D\to E$ היא חח"ע ועל, אזי ניתן להגדיר $g:E\to D$ ע"י $g(y)=x$ אם ורק אם $y=f(x)$ g נקראת הפונקציה ההפוכה של f ומסמנים אותה ב $g=f^{-1}$.

$y=f(x)$
$x=g(y)$

<u>פונקציות מונוטונית</u>

הגדרה: תהי f פונקציה מוגדרת בקטע I נאמר ש f היא פונקציה מונוטונית עולה ב I

אם לכל $x_{1,}x_2$ ב I $f(x_1)\le f(x_2)\leftarrow x_1<x_2$ ועולה ממש: $f(x_1)<f(x_2)\leftarrow x_1<x_2$

ויורדת אם: $f(x_1)\ge f(x_2)\leftarrow x_1<x_2$ יורדת ממש: $f(x_1)>f(x_2)\leftarrow x_1<x_2$

<u>פונקציה חסומה:</u>

פונקציה חסומה בקטע I אם קיים מספר ממשי $M>0$ כך ש $|f(x)|\le M$ לכל $x\in I$.

<u>דוגמא:</u> צ"ל אם $f:D\to E$ פונקציה מונוטונית עולה ממש אז f חח"ע.

צ"ל שהפונקציה חח"ע, כלומר צ"ל ש אם $f(x_1)=f(x_2)$ אז $x_1=x_2$. לכן, נניח $x_1\ne x_2$. ואז קיימים שני מקרים:

א. $x_1<x_2$: מהנתון, הפונקציה עולה ממש ולכן $f(x_1)<f(x_2)$

ב. $x_1>x_2$: מהנתון, הפונקציה עולה ממש ולכן $f(x_1)>f(x_2)$

מכאן ש $f(x_1)\ne f(x_2)$ וזו סתירה לנתון. ומכאן ש $f(x)$ חח"ע.

<u>סופרמום/ אינפימום:</u>

$f:D\to E$ פונקציה "על". נאמר שהסופרמום של הפונקציה ב- D, הוא $\sup E$ (E היא התמונה)

גבולות של פונקציות

לפי היינה:

סביבה נקובה: δ (שהיא למעשה ה ε של הסדרות...)

$\delta > 0$ מספר ממשי כלשהו. הסביבה הנקובה של x_0 היא סביבה ללא x_0 וגודלה δ : $(x_0-\delta)\cup(x_0+\delta)$

את איחוד הקטעים רצוי לסמן : $0<|x-x_0|<\delta$. מסמנים "גדול מ0" ע"מ לציין ש: $x \neq x_0$. (המצאות x_0 אומרת שהפונקציה מוגדרת בגבול אך אין זה משמעותי למציאת הגבול).

תהי f פונקציה מוגדרת בסביבת נקובה של x_0, L יהיה הגבול של $f(x)$ כאשר $x \to x_0$ אם לכל סדרה x_n שמתכנסת ל x_0, הסדרה $x_n \neq x_0$, $f(x) \to L$.

$$\forall \underset{x_n\neq x_0}{x_n}, \lim_{n\to\infty} x_n = x_0$$
$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = L$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = L$$

הגדרת הגבול עבור $x \to \infty$:

תהי f מוגדרת בחצי הישר הימני. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L$

L יהיה הגבול של $f(x)$ כאשר $x \to \infty$ אם לכל סדרה x_n ש $x_n \to \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = L$.

משפט: אם קיים הגבול $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$ אז הוא יחיד.

לפי קושי:

תהי $f(x)$ פונקציה מוגדרת בסביבה נקובה של x_0 נאמר כי $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$ אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך ש לכל x : $0<|x-x_0|<\delta$ מתקיים $|f(x)-L|<\varepsilon$.

אריתמטיקה של גבולות:

$f(x), g(x)$ פונקציות השואפות לגבול סופי. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B$

א. אם לכל קבוע ממשי C , $\lim\limits_{x\to x_0} C = C$ אז $\lim\limits_{x\to x_0} Cf(x) = CA$.

ב. $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)\pm g(x)\right) = A\pm B$

ג. $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)g(x)\right) = AB$

ד. אם $B\neq 0, g(x)\neq 0$ בסביבה הנקובה. $\lim\limits_{x\to x_0}\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right) = \dfrac{A}{B}$

<u>אריתמטיקה לפי היינה:</u>

נתון: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$

כלומר לכל סדרה $\underset{x_n\neq x_0}{x_n}$ ש $x_n\to x_0$ מתקיים $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f\left(x_n\right)=A$

נתון: $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$

כלומר לכל סדרה $\underset{x_n\neq x_0}{x_n}$ ש $x_n\to x_0$ מתקיים $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} g\left(x_n\right)=B$

תהי $\underset{x_n\neq x_0}{x_n\longrightarrow\infty}$ ואז:

לפי אריתמטיקה של גבולות בסדרות.

א. **חיבור:** $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)+g(x)\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(f\left(x_n\right)+g\left(x_n\right)\right)=A+B$

וזה לכל $x_n\to x_0$ לכן $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)\pm g(x)\right)=A\pm B$

ב. **כפל:** $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)g(x)\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(f\left(x_n\right)g\left(x_n\right)\right)=AB$

וזה לכל $x_n\to x_0$ לכן $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)g(x)\right)=AB$

ג. **חילוק:** $\lim\limits_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{f\left(x_n\right)}{g\left(x_n\right)}\right)=\frac{A}{B}$

וזה לכל $x_n\to x_0$ לכן $\lim\limits_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{A}{B}$

<u>אריתמטיקה של גבולות לפי קושי:</u>

1. נתון: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ אז לפי קושי $\forall\varepsilon>0,\exists\delta_1>0,\forall x:0<|x-x_0|<\delta_1:|f(x)-A|<\varepsilon$
2. נתון: $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$ אז לפי קושי $\forall\varepsilon>0,\exists\delta_2>0,\forall x:0<|x-x_0|<\delta_2:|g(x)-A|<\varepsilon$

תהא $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$

א. **חיבור:** אז לכל x בקטע $0<|x-x_0|<\delta$ מתקיימים גם 1. וגם 2. אזי

$$|f(x)-A+g(x)-B|\le|f(x)-A|+|g(x)-B|\le 2\varepsilon$$

ולכן $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)\pm g(x)\right)=A\pm B$

ב. **כפל:** אז לכל x בקטע $0<|x-x_0|<\delta$ מתקיימים גם 1. וגם 2. אזי

$$|f(x)g(x)-AB|=|f(x)g(x)-Bf(x)+Bf(x)-AB|\le|B||f(x)-A|+|f(x)||g(x)-b|$$

נתון: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ אזי $f(x)$ חסומה בסביבה הנקובה של x_0, $0<|x-x_0|<\delta_1$ ולכן $f(x)\le M$.

$$|B||f(x)-A|+|f(x)||g(x)-b|\underset{f(x)\le M}{\le}|B||f(x)-A|+M|g(x)-b|<\left(|B|+M\right)\varepsilon$$

ג. **חילוק:** נוכיח תחילה: $\frac{1}{g(x)} \to \frac{1}{B}$

יהא $\varepsilon = \frac{|B|}{2}$ ו $B \neq 0$

אזי לפי הנתון עבור $\varepsilon = \frac{|B|}{2}$ קיים $\delta_3 > 0$ כך שלכל x כש $0 < |x - x_0| < \delta_3$: $|g(x) - B| < \frac{|B|}{2}$

ולכן לפי אי שוויון המשולש השני:

$$\big||g(x)| - |B|\big| \le |g(x) - B| < \frac{|B|}{2}$$

$$|B| - \frac{|B|}{2} < |g(x)| < |B| + \frac{|B|}{2}$$

$$\frac{|B|}{2} < |g(x)| < \frac{3|B|}{2}$$

תהא $\delta = \min\{\delta_2, \delta_3\}$

ואז מתקיים גם 2. ונוכל לחשב כש $B \neq 0$ ו $g(x) \neq 0$ בסביבה הנקובה:

$$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{B}\right| = \left|\frac{B - g(x)}{g(x)B}\right| \underset{g(x) < \frac{|B|}{2}}{<} \frac{|g(x) - B|}{\left|\frac{|B|}{2} B\right|} \underset{|g(x) - B| < \varepsilon}{<} \frac{2\varepsilon}{|B|^2}$$

ואז לפי הוכחת הכפל:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} f(x) \frac{1}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)} = A \frac{1}{B} = \frac{A}{B}$$

משפטים נוספים באריתמטיקה של גבולות:

א. אם $f(x)\ge 0$ בסביבה הנקובה של x_0 וקיים $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L$ אזי $L\ge 0$. אם $f(x)>0$ עדיין יתכן ו $L=0$

ב. אם $f(x)\ge g(x)$ ו $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$. אזי $A\ge B$.

ג. כלל הסנדויץ': תהיינה f,g,h פונקציות מוגדרות בסביבה הנקובה של x_0 ו קיימים הגבולות: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} h(x)=L$ אז אם $f(x)\le g(x)\le h(x)$ גם $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=L$.

ד. אם $f(x)$ חסומה בסביבה הנקובה של x_0 ו $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$ אזי $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)f(x)=0$.

ה. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.

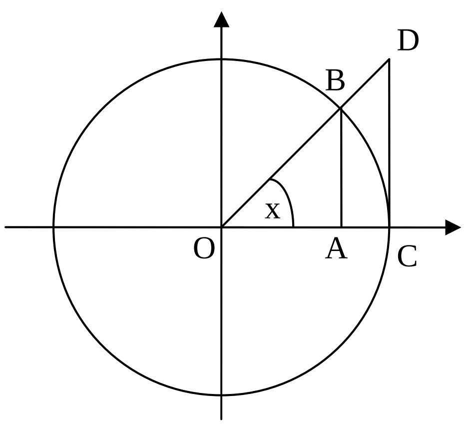
הוכחה ל: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

$\frac{\sin x}{x}$ פונקציה זוגית

נאמר ש $f(x)$ פונקציה זוגית אם מתקיים ש $f(x)=f(-x)$

לכן דיי להראות $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}=1$

נביט במעגל היחידה ב $0<x<\frac{\pi}{2}$



$\triangle OBA<\overset{\frown}{OBC}<\triangle OCD$

$$\frac{\sin x}{2}<\frac{x}{2}<\frac{\tan x}{2}$$

$$\sin x<x<\frac{\sin x}{\cos x}$$

$$1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x}$$

$$\underset{1}{\underset{\downarrow}{1}}>\frac{\sin x}{\underset{1}{\underset{\downarrow}{x}}}>\underset{1}{\underset{\downarrow}{\cos x}}$$

<u>גבול אינסופי לפונקציה</u>

<u>הגדרה:</u> תהי f פונקציה מוגדרת בסביבה נקובה של x_0 ונאמר כי $\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty$ אם לכל A קיים $\delta>0$ כך שלכל x : $0<|x-x_0|<\delta$ מתקיים $f(x)>A$.

<u>דוגמא:</u>

צ"ל $\lim_{x\to x_0}\frac{1}{x^2}=\infty$.

כלומר לכל $A>0$ קיים $\delta>0$ כך שלכל $0<|x-0|<\delta$ $\frac{1}{x^2}>A$.

יהי $A>0$

$$\frac{1}{x^2}=\frac{1}{|x|^2}<\frac{1}{\delta^2}=A$$

אזי, קיים $0<\delta=\frac{1}{\sqrt{A}}$ כך שלכל x המקיים $0<|x|<\delta$ מתקיים $\frac{1}{x^2}>A$ ולכן $\lim_{x\to x_0}\frac{1}{x^2}=\infty$.

<u>שלילת הגבול</u>

<u>לפי היינה:</u>

א. אם קיימת סדרה $\underset{x_n\neq x_0}{x_n\to x_0}$ אבל $f(x)\not\to L$ אז L הוא לא הגבול של $f(x)$ כאשר $x\to x_0$.

ב. אם קיימות שתי סדרות: $\underset{x_n\neq x_0}{x_n\to x_0}$ ו $\underset{y_n\neq x_0}{y_n\to x_0}$

אבל $\lim_{n\to\infty} f(x_n)\neq\lim_{n\to\infty} f(y_n)$

אז ל $f(x)$ אין גבול כאשר $x\to x_0$.

<u>דוגמא:</u>

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\Rightarrow\begin{cases}x_n=\frac{1}{n}\\ y_n=-\frac{1}{n}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}f\left(\frac{1}{n}\right)=n\underset{n\to\infty}{\to}\infty\\ f\left(-\frac{1}{n}\right)=n\underset{n\to\infty}{\to}-\infty\end{cases}$$

<u>דוגמא:</u>

$$\lim_{x\to\infty}\sin x=\begin{cases}x_n=2\pi n\\ y_n=2\pi n+\frac{\pi}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}f(x_n)=0\\ f(y_n)=1\end{cases}$$

<u>שלילת הגבול לפי קושי:</u>

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=L:\ \forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall x:0<|x-x_0|<\delta:|f(x)-L|<\varepsilon$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x)\neq L:\ \exists\varepsilon_0>0,\forall\delta>0,\exists x_1:0<|x-x_0|<\delta:|f(x_1)-L|\geq\varepsilon$$

<u>גבולות חד צדדיים:</u>

הגדרה: תהי $f(x)$ מוגדרת בסביבה ימנית של x_0. הקטע $(x_0,x_0+\delta)$. L יהיה גבול ימני של $f(x)$ כאשר $x\to x_0$ מימין. $\forall x, x>x_0$ אם לכל :

$$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall x\in(x_0,x_0+\delta):|f(x)-L|<\varepsilon$$

נסמן גבול ימני: $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$

וגבול שמאלי: $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$

<u>דוגמא:</u>

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=-\infty\quad,\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=\infty$$

משפט: ל $f(x)$ קיים גבול בנקודה x_0 אם ורק אם קיימים ושווים שני הגבולות החד צדדיים בנקודה. במקרה זה יהיו שלשת הגבולות שווים:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0^+} f(x)=\lim_{x\to x_0^-} f(x)$$

הוכחה: $1\Rightarrow 2$

קיים $\lim_{x\to x_0} f(x)=L$ לכן:

$$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall x\in\left((x_0-\delta),(x_0+\delta)\right):|f(x)-L|<\varepsilon$$

ולכן קיים הגבול הימני : $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall x\in(x_0,x_0+\delta):|f(x)-L|<\varepsilon$

וגם הגבול השמאלי: $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall x\in(x_0,x_0-\delta):|f(x)-L|<\varepsilon$

הוכחה: $2\Rightarrow 1$

מתקיים: $\lim_{x\to x_0^-} f(x)=L$ לכן: $\forall\varepsilon>0,\exists\delta_1>0,\forall x\in(x_0,x_0-\delta_1):|f(x)-L|<\varepsilon$

ומתקיים $\lim_{x\to x_0^+} f(x)=L$ לכן: $\forall\varepsilon>0,\exists\delta_2>0,\forall x\in(x_0,x_0-\delta_2):|f(x)-L|<\varepsilon$

ולכן עבור: $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$ מתקיים: $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall x\in\left((x_0-\delta),(x_0+\delta)\right):|f(x)-L|<\varepsilon$

ז"א שאם הגבולות הצדדים שונים, אין לה גבול בנקודה, למשל: $f(x)=\frac{|x|}{x}$

משפט: אם f מונוטונית אז יש לה גבולות חד צדיים בכל נקודה ונקודה והם סופיים.

הוכחה: נוכיח עבור פונקציה מונוטונית עולה ועבור הגבול השמאלי.

תהי f פונקציה מונוטונית עולה בסביבת הנקודה x_0, כלומר, f מונוטונית בקטע $(x_0-\alpha)(x_0+\alpha)$.

$\forall x\in(x_0-\alpha,x_0)$ מתקיים $f(x_0)\ge f(x)$. לכן הפונקציה חסומה מלמעלה בקטע זה ולכן יש לה סופרמום

S. כש $S\le f(x_0)$ נבחר נקודה $\bar{x}$. תהי $\bar{x}$ נקודה בקטע $(x_0-\alpha,x_0)$, לכן, לכל $\varepsilon>0$ $S-\varepsilon$ לא חסם.

לכן קיימת נקודה $\bar{x}$ כך ש $S-\varepsilon<f(\bar{x})$ ולכן בגלל המונוטוניות מתקיים לכל $x\in(x_0-\bar{x},x_0)$:

$$f(x_0)\ge f(x)\ge f(\bar{x}) \quad\Leftarrow\quad f(x_0)\ge S\ge f(x)\ge f(\bar{x})\ge S-\varepsilon$$

יהי $0<\delta=x_0-\bar{x}$ $\Leftarrow$ $x_0-\delta<x<x_0$. קיבלנו שלכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שלכל

$x\in(x_0-\delta,x_0)$ מתקיים $S+\varepsilon\ge S\ge f(x)\ge f(\bar{x})\ge S-\varepsilon$ כלומר $|f(x)-S|<\varepsilon$

$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=S$.

אותה הוכחה בשינויים קלים ניתן לתת עבור פונקציה מונוטונית יורדת.

משפט: הגדרת הגבול לפי קושי שקולה להגדרת הגבול לפי היינה.

הוכחה:

<u>קושי להיינה:</u>

לפי קושי: יהי $\varepsilon>0$ אזי קיים $\delta>0$ כך שלכל $0<|x-x_0|<\delta$ מתקיים $|f(x)-L|<\varepsilon$.

תהי סדרה מתכנסת $x_n\to x_0$. לכן לאותו $\delta>0$ קיים n_0 כך שלכל $n\ge n_0$ מתקיים $0<|x_n-x_0|<\delta$.

ואז לפי הגדרת קושי מתקיים $|f(x_n)-L|<\varepsilon$ לכן $\lim\limits_{x_n\to x_0} f(x_n)=L$.

<u>היינה לקושי:</u>

לא קושי = לא היינה $\Leftarrow$ היינה = קושי.

לא קושי: קיים $\varepsilon_0>0$ כך שלכל $\delta>0$., קיים $0<|x-x_0|<\delta$ כך ש $|f(x)-L|\ge\varepsilon$.

צ"ל לא היינה: תהי $x_n\to x_0$ אזי $\lim\limits_{x_n\to x_0} f(x_n)\ne L$.

נבחר $\delta=\frac{1}{n}$ לכן קיים x_n כך ש $0<|x_n-x_0|<\frac{1}{n}$

$x_0-\frac{1}{n}<x_n<x_0+\frac{1}{n}$ לפי סנדוויץ' $x_n\to x_0$ אבל $f(x_n)$ נמצא מחוץ ל $(L-\varepsilon_0,L+\varepsilon_0)$ ולכן L לא

יכול להיות הגבול של $f(x_n)$ וזו סתירה להיינה. מ.ש.ל.

<u>רציפות:</u>

הגדרה 1: תהי f פונקציה מוגדרת בסביבת הנקודה x_0 (כולל) אזי נאמר ש f רציפה ב x_0 אם
$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$ (אך ורק כשקיים גבול סופי!)

הגדרה 2: $\lim\limits_{\Delta x\to 0} f(x_0+\Delta x)=f(x_0)$

הגדרה 3: $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$

הגדרה 4: $\varepsilon-\delta$

$$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall x:\left|x-x_0\right|<\delta:\left|f(x)-f(x_0)\right|<\varepsilon$$

הגדרה 5: f רציפה אם לכל סדרה המקיימת $x_n\to x_0$ מתקיים $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=f(x_0)$.

ולכן $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=f\left(\lim\limits_{n\to\infty} x_n\right)$.

למשל:

$\lim e^{a_n}=e^{\lim a_n}$ כי e^x רציפה.

$$a_n^{\,b_n}=e^{b_n\ln a_n}\quad\Leftarrow\quad \lim_{n\to\infty}a_n^{\,b_n}=\lim_{n\to\infty}e^{b_n\ln a_n}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}b_n\ln a_n}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}b_n\lim\limits_{n\to\infty}\ln a_n}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}b_n\ln\lim\limits_{n\to\infty}a_n}=\lim_{n\to\infty}a_n^{\lim\limits_{n\to\infty}b_n}$$

טענה: $\sin x$ רציפה בכל מקום

$$y=\sin x$$
$$\Delta y=\left[\sin\left(\Delta x+x_0\right)+\sin x_0\right]$$
$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\sin\left(\Delta x+x_0\right)+\sin x_0\right]=\lim_{\Delta x\to 0}2\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)\cos\left(\frac{\Delta x+2x_0}{2}\right)=0$$
$$0\le\left|\sin x\right|\le\left|x\right|$$

<u>אריתמטיקה של פונקציות רציפות:</u>

משפט: יהיו f,g פונקציות רציפות ב x_0 אזי:

א. לכל קבוע $Cf(x)$ רציפה ב x_0.

ב. $f(x)\pm g(x)$ רציפות ב x_0.

ג. אם $g(x_0)\neq 0$ אז $\frac{f(x)}{g(x)}$ רציפה ב x_0.

הוכחה:

ההוכחות מיידיות ונעשה שימוש באריתמטיקה של גבולות, למשל חיבור:

$$\lim_{x\to x_0}\left(f(x)+g(x)\right)=\lim_{x\to x_0}f(x)+\lim_{x\to x_0}g(x)=f(x_0)+g(x_0).$$

<u>הרכבת פונקציות:</u>

משפט: יהיו f,g פונקציות רציפות כך ש: $\begin{array}{l} f:D\to E \\ g:E\to F \end{array}$

שתי פונקציות רציפות אזי הפונקציה המורכבת תהיה רציפה גם היא:

$$g\left(f(x)\right) \quad \Leftarrow \quad g\circ f:D\to F$$

$$\lim_{x\to x_0}g\left(f(x)\right)=g\left(\lim_{x\to x_0}f(x)\right)=g\left(f(x_0)\right)$$

המעברים התאפשרו בזכות הרציפות.

משפט: תהי g פונקציה רציפה ב $x=L$ ונניח כי קיים הגבול $\lim_{x\to x_0}f(x)=L$ אזי הגבול:

$$\lim_{x\to x_0}g\left(f(x)\right)=g\left(\lim_{x\to x_0}f(x)\right)=g\left(L\right)$$

משפט: תהי f פונקציה מונוטונית בקטע I אם f לא רציפה בנקודה x_0 ב I אז ב x_0 יש לה אי רציפות קפיצה. זאת משום שאחרת לא תהיה מונוטונית.

"הוכחה" (לא רשמי) : יש משפט שאומר שאם f פונקציה מונוטונית בקטע I יש לה גבולות חד צדיים בכל נקודה ונקודה. נניח בשלילה שקיימת אי רציפות עיקרית, אזי זה מחייב שאין לה גבול סופי בנקודה מסוימת ואז היא לא מונוטונית. ונניח קיימת אי רציפות סליקה אזי היא תפגע במונוטוניות...

רציפות חד צדדית:

הגדרה: תהי f מוגדרת בסביבה ימנית של x_0 כולל x_0 נאמר כי f רציפה מימין ב x_0 אם:

א. קיים הגבול הימני $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$

ב. $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$.

משפט: f רציפה ב x_0 אם ורק אם היא רציפה מימין ורציפה משמאל ב x_0.

הגדרה: נאמר כי f רציפה בקטע הפתוח (a,b) אם היא רציפה בכל נקודה בקטע.

הגדרה: נאמר כי f רציפה בקטע הסגור $[a,b]$ אם היא רציפה ב (a,b) ואם היא רציפה מימין ב a ומשמאל ב b

משפט הרציפות

משפט: תהי f רציפה בקטע הסגור $[a,b]$ אם $f(a)f(b)<0$ אז קיימת נקודה $c\in(a,b)$ כך ש $f(c)=0$

נסמן $b=b_1$ ו $a=a_1$.

נחצה את הקטע $[a_1,b_1]$ לשניים ב h כך: $[a_1,h],[h,b_1]$

אם $f(h)=0$ הסתיימה ההוכחה.

אם $f(a_1)f(h)<0$ אז $\begin{matrix} a_1=a_2 \\ h=b_2 \end{matrix}$

אם $f(b_1)f(h)<0$ אז $\begin{matrix} b_1=b_2 \\ h=a_2 \end{matrix}$

נמשיך הלאה, ובהנחה ש $f(h_k)\neq 0$ נקבל סדרה אינסופית של קטעים $[a_n,b_n]$ המקיימת:

$$[a_n,b_n]\subseteq[a_{n+1},b_{n+1}]$$

$$b_n-a_n=\frac{a_1-a_2}{2^{n-1}}\to 0$$

נוכל לומר כי לפי הלמה של קנטור קיימת נקודה אחת משותפת c לכל הקטעים: $a_n\le c\le b_n$

ולכן $\lim_{n\to\infty}(a_n)=\lim_{n\to\infty}(b_n)=c$

נחשב לפי אריתמטיקה ורציפות:

$$\lim_{n\to\infty} f\left((a_n)(b_n)\right)=\lim_{n\to\infty} f(a_n)\lim_{n\to\infty} f(b_n)=f\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)f\left(\lim_{n\to\infty} b_n\right)=f(c)^2$$

אבל $\lim_{n\to\infty} f\left((a_n)(b_n)\right)\le 0$ וכמו כן $f(c)^2\ge 0$ אזי $f(c)^2=0$

<u>משפט ערך הביניים של קושי:</u>

משפט: תהי f רציפה בקטע הסגור $[a,b]$ ויהי y_0 מספר ממשי הנמצא בין $f(a)$ ל $f(b)$ אזי קיימת נקודה x_0 בקטע (a,b) כך ש $f(x_0)=y_0$.

נגדיר את $g(x)$ כך ש:

$$g(x)=f(x)-y_0$$

ולכן:

$g(b)=f(a)-y_0<0$ ו $g(a)=f(a)-y_0>0$

$g(x)$ רציפה כי היא סכום של פונקציות רציפות ומתקבל ש $g(a)g(b)<0$ אזי לפי המשפט הקודם קיימת נקודה בקטע (a,b) כך ש $g(x_0)=0$ $\Leftarrow$ $g(x_0)=f(x_0)-y_0=0$ $\Leftarrow$ $f(x_0)=y_0$ **מ.ש.ל**

<u>משפט ויירשטאס (1):</u>

תהי f רציפה בקטע הסגור $[a,b]$ אזי f חסומה בקטע זה.

הוכחה:

נניח בשלילה ש f לא חסומה אזי לכל n טבעי קיימת נקודה x_n בקטע $[a,b]$ כך ש $f(x_n) > n$.

$a \le x_n \le b$, לכן לכל n טבעי x_n חסומה לכן ממשפט BW יש לה תת סדרה שמתכנסת. $x_{n_k} \to x_0$. ומתחייב ש $a \le x_0 \le b$ ..

f רציפה ולכן $f\left(\lim_{k\to\infty} (x_{n_k})\right) = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x_0)$ כאשר $f(x_0)$ סופי.

וכמו כן ידוע כי $f(n_k) > n_k$ ולכן $\lim_{k\to\infty} f(n_k) = \infty$ ולפי כלל הפיצה: $\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = \infty$.

בסתירה לכך ש x_{n_k} חסומה. לכן f חסומה

<u>משפט ויירשראס (2)</u>

תהי f רציפה בקטע הסגור $[a,b]$ אזי f מקבלת בקטע זה את המינימום והמקסימום שלה.

הוכחה:

f רציפה בקטע הסגור $[a,b]$ אזי היא חסומה בקטע ולכן יש לה סופרמום ואינפימום.

צ"ל: שקיימת נקודה x_0 כך ש $f(x_0) = M$.

נוכיח עבור המקסימום: (1)לכל n טבעי קיימת בקטע נקודה x_n כך ש $M - \frac{1}{n} \le f(x_n) \le M$.

x_n חסומה, $a \le x_n \le b$. ולכן יש לה תת סדרה שמתכנסת. $x_{n_k} \to x_0$.

f רציפה ולכן $f(x_0) = f\left(\lim_{k\to\infty}(x_{n_k})\right) = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k})$.

מ (1) נובע שמצאנו x_0 כך ש $f(x_0) = M$ כי $M - \frac{1}{n} \le f(x_{n_k}) \le M$ $\qquad f(x_0) = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = M$

משפט: אם $f\left[a,b\right]\to\mathbb{R}$ היא פונקציה רציפה אז התמונה היא קטע סגור.

הוכחה: f רציפה בקטע סגור $\left[a,b\right]$ לכן מ W2 היא מקבלת את המינימום ואת המקסימום M וממשפו ערך הביניים של קושי גם את כל הנקודות שביניהם, לכן התמונה $\left[m,M\right]$ קטע סגור.

משפט: תהי $f\left[a,b\right]\to\mathbb{R}$ פונקציה מונוטונית. (1) f רציפה אם ורק אם (2) התמונה שלה היא קטע סגור.

הוכחה:

$1\Leftarrow2$ ההוכחה למשפט הקודם נכונה גם לפונקציה לא מונוטונית.

$2\Leftarrow1$ נניח בשלילה שקיימת נקודה x_0 שבה f לא רציפה. f מונוטונית לכן אי הרציפות היא מסוג קפיצה.

כלומר קיימים הגבולות $L^-=\lim_{x\to x_0^-}f\left(x\right)$ ו $L^+=\lim_{x\to x_0^+}f\left(x\right)$.

לכל x: $a<x<x_0$ $f\left(a\right)\le f\left(x\right)\le L^-$ ו לכל x: $x_0<x<b$ $L^+\le f\left(x\right)\le f\left(b\right)$.

לכל y_0 $L^-\le y_0\le L^+$ אין נקודה $\bar{x}$ שבה $f\left(\bar{x}\right)=y_0$ לכן הן לא בתמונה, (חוץ אולי מאחת שהיא $f\left(x_0\right)$)

התמונה היא לא קטע, בסתירה לנתון לכן f רציפה.

משפט: תהי f מונוטונית על קטע (פתוח, סגור, סופי, אינסופי....). f רציפה אם ורק אם תמונתה היא קטע.

הוכחה: כמו הקודמת.

משפט: תהי f רציפה וחח"ע בקטע. אז f מונוטונית ממש בקטע ולכן הפיכה.

הוכחה (הוכחה באופן כללי לא רק לפונקציה רציפה):

צ"ל שהפונקציה חח"ע, כלומר צ"ל ש אם $f\left(x_1\right)=f\left(x_2\right)$ אז $x_1=x_2$. לכן, נניח $x_1\ne x_2$. ואז קיימים שני מקרים:

א. $x_1<x_2$: מהנתון, הפונקציה עולה ממש ולכן $f\left(x_1\right)<f\left(x_2\right)$

ב. $x_1>x_2$: מהנתון, הפונקציה עולה ממש ולכן $f\left(x_1\right)>f\left(x_2\right)$

מכאן ש $f\left(x_1\right)\ne f\left(x_2\right)$ וזו סתירה לנתון. ומכאן ש $f(x)$ חח"ע.

אם f רציפה ומונוטונית אז תמונתה היא קטע ואז היא הפיכה.

משפט: אם f רציפה וחח"ע בקטע, לכן הפיכה אזי הפונקציה ההפוכה שלה רציפה.

הוכחה: f רציפה וחח"ע לכן היא מונוטונית ממש, נניח עולה.

f מונוטונית ורציפה לכן תמונה היא קטע $f\left(a,b\right)\rightarrow\left(c,d\right)$.

f חח"ע ולכן הפיכה. $g=f^{-1}$ $g\left(c,d\right)\rightarrow\left(a,b\right)$.

יהיו $y_1=f\left(x_1\right)$ $y_2=f\left(x_2\right)$ $y_1,y_2\in\left(c,d\right)$ $y_1<y_2$.

צ"ל: $x_1<x_2$.

שלילה 1: $x_1=x_2$ זו סתירה כי f פונקציה.

שלילה 2: $x_1>x_2$ f מונוטונית עולה ואז $y_1>y_2$ בניגוד לנתון.

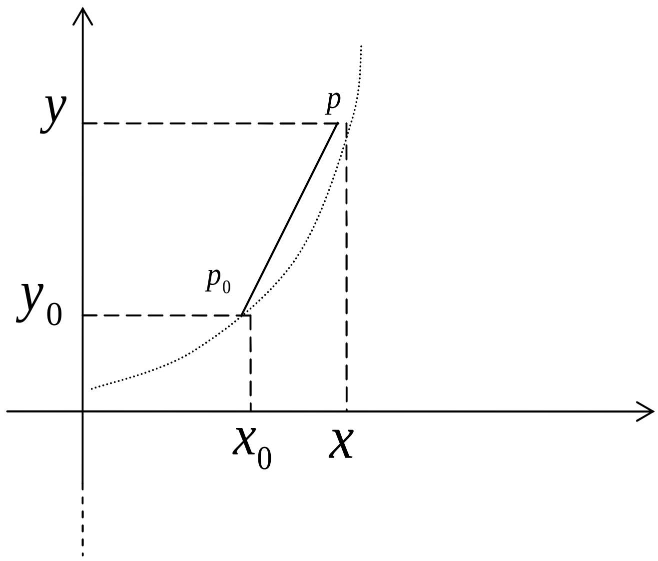
מכאן ש $x_1<x_2$.

g פונקציה עולה מוגדרת על קטע ותמונתה היא קטע ולכן רציפה.

הנגזרת ✂

הגדרה: אם קיים הגבול: $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f\left(x_0+\Delta x\right)+f\left(x_0\right)}{\Delta x}$

והוא סופי אז אומרים ש $f\left(x\right)$ גזירה בנקודה x_0.



השיפוע הוא $\overline{p_0 p}$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y-y_0}{x-x_0}=\tan\alpha$$

$$\lim_{p\to p_0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

שיפוע הישר המשיק ל $f\left(x\right)$ בנקודה x_0

הוא הגבול $\lim\limits_{p\to p_0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

נהוג לסמן: $\Delta x=h$

נגזרת חד צדדית:

תהי f מוגדרת בסביבה ימנית של x_0 אז אם הגבול $\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{f\left(x_0+\Delta x\right)+f\left(x_0\right)}{\Delta x}$ קיים הוא נקרא הנגזרת הימנית של $f\left(x\right)$ ב x_0 ונסמן $f_+^{'}\left(x_0\right)$ ובדומה $f_-^{'}\left(x_0\right)$.

משפט: f גזירה בנקודה x_0 אם ורק אם הנגזרות החד צדדיות ב x_0 קיימות ושוות, ואז מתקיים:

$$f_-^{'}\left(x_0\right)=f_+^{'}\left(x_0\right)=f^{'}\left(x_0\right)$$

הוכחה: זה נובע מיידית מהמשפט הדומה בגבולות.

נגזרת אינסופית חד צדדית:

אם לפונקציה f קיימות נגזרות חד צדדיות אינסופיות זה מעיד שלפונקציה יש משיק המאונך לציר x.

<u>תנאי שקול לגזירות:</u>

משפט: f גזירה ב x_0 אם ורק אם. קיים מספר קבוע A וקיימת פונקציה $\varepsilon_{(\Delta x)}=\varepsilon_{(h)}$ המקיימת שהגבול שלה $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\varepsilon_{(\Delta x)}=0$ כך ש: $f\left(x_0+\Delta x\right)=f\left(x_0\right)+A\Delta x+\varepsilon\left(\Delta x\right)\Delta x$.

הוכחה: $2\Leftarrow 1$.

נתונה המשוואה $f\left(x_0+\Delta x\right)=f\left(x_0\right)+A\Delta x+\varepsilon\left(\Delta x\right)\Delta x$

$$\frac{f\left(x_0+\Delta x\right)-f\left(x_0\right)}{\Delta x}=A+\varepsilon\left(\Delta x\right)$$

נשאיף את $\Delta x\to 0$:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f\left(x_0+\Delta x\right)-f\left(x_0\right)}{\Delta x}=A+\lim_{\Delta x\to 0}\varepsilon\left(\Delta x\right)=A$$

אז קיים קבוע A כך ש $f'\left(x\right)=A$.

$1\Leftarrow 2$: f גזירה ב x_0 .

תהי $f'\left(x_0\right)=A$

ומתקיים: $\varepsilon\left(\Delta x\right)=\dfrac{f\left(x_0+\Delta x\right)-f\left(x_0\right)}{\Delta x}-A$ כי Δx קטן כרצוננו וכך $\varepsilon\left(\Delta x\right)$ קטן כרצוננו.

נשאיף את $\Delta x\to 0$:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\varepsilon\left(\Delta x\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f\left(x_0+\Delta x\right)-f\left(x_0\right)}{\Delta x}-A=A-A=0$$

משפט: אם פונקציה גזירה ב x_0 אז היא רציפה ב x_0 .

הוכחה: f גזירה ואז היא מקיימת את תנאי השקול לגזירות $f\left(x_0+\Delta x\right)=f\left(x_0\right)+A\Delta x+\varepsilon\left(\Delta x\right)\Delta x$.

כאשר $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\varepsilon\left(\Delta x\right)=0$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\left(f\left(x_0+\Delta x\right)\right)-f\left(x_0\right)=\lim_{\Delta x\to 0}f'\left(x\right)\Delta x+\lim_{\Delta x\to 0}\varepsilon\left(\Delta x\right)\Delta x=0$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}f\left(x_0+\Delta x\right)=f\left(x_0\right)$$

הערה: ההפך לא נכון!

<u>הפונקציה הנגזרת:</u>

תהי $y=f\left(x\right)$ פונקציה גזירה בכל נקודה בקטע I $\left(a,b\right)$, יכול להיות גם $\left(-\infty,\infty\right)$.

אז פונקציה $g\left(x\right)$ המקיימת $g\left(x_0\right)=f'\left(x_0\right)$ לכל $x_0\in\left(a,b\right)$ נקראת הפונקציה הנגזרת של $f\left(x\right)$.

ונסמן: $g\left(x\right)=\dfrac{df}{dx},\dfrac{dy}{dx}$

<u>אריתמטיקה של נגזרות:</u>

יהיו $u(x),v(x)$ שתי פונקציות גזירות בנקודה x ו C קבוע אז מתקיים:

1. $(Cv)'=Cv'$
2. $(u\pm v)'=u'+v'$
3. $(uv)'=u'v+v'u$
4. $\frac{u'}{v'}=\frac{u'v-v'u}{v^2}$

הוכחה: נתון: $\lim_{h\to 0}\frac{v(x+h)-v(x)}{h}=v'$ $\lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)-u(x)}{h}=u'$

1. ידוע ש $\lim_{h\to 0}C=C$ לכן מאריתמטיקה של גבולות:

$$(Cv)'=\lim_{h\to 0}\frac{(Cv)(x+h)-(Cv)(x)}{h}=C\lim_{h\to 0}\frac{v(x+h)-v(x)}{h}=Cv'$$

2. כמו 1 לפי אריתמטיקה של גבולות:

$$(u+v)'=\lim_{h\to 0}\frac{(u+v)(x+h)-(u+v)(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)-v(x)}{h}+\frac{u(x+h)-v(x)}{h}=u'+v'$$

3.

$$(uv)'=\lim_{h\to 0}\frac{(uv)(x+h)-(uv)(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)v(x+h)-u(x)v(x)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)\big(v(x+h)-v(x)\big)+v(x)\big(u(x+h)-u(x)\big)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\left(u(x+h)\frac{v(x+h)-v(x)}{h}+v(x)\frac{u(x+h)-u(x)}{h}\right)=uv'+vu'$$

4.

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{u(x+h)}{v(x+h)}-\frac{u(x)}{v(x)}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{u(x+h)v(x)-u(x)v(x+h)}{v(x+h)v(x)}}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\left[u(x+h)\frac{\big(v(x)-v(x+h)\big)}{h}+v(x+h)\frac{\big(u(x+h)-u(x)\big)}{h}\cdot\frac{1}{v(x+h)v(x)}\right]=$$

$$=\frac{vu'-uv'}{v^2}$$

<u>כלל השרשרת:</u>

גזירה של פונקציה מורכבת.

משפט:

תהי $f\left(x\right)$ פונקציה גזירה ב x_0 ותהי $z=g\left(y\right)$ פונקציה גזירה ב y_0 . אזי $z=g\left(f\left(x\right)\right)$ גזירה ב x_0.

ומתקיים: $$\left(z=g\left(f\left(x_0\right)\right)\right)'=g'\left(y_0\right)f'\left(x_0\right)$$

הוכחה:

נסמן: $\Delta y=f\left(x_0+\Delta x\right)-f\left(x_0\right)$

$$\Delta z=g\left(y_0+\Delta y\right)-g\left(y_0\right)$$

$g\left(y\right)$ גזירה ב y_0 לכן מהתנאי השקול לגזירות קיימת פונקציה $\varepsilon_1\left(\Delta y\right)$ כך ש $\lim\limits_{\Delta y\to 0}\varepsilon_1\left(\Delta y\right)=0$ ומתקיים:

$$\Delta z=g'\left(y_0\right)\Delta y+\varepsilon_1\left(\Delta y\right)\Delta y$$

$f\left(x\right)$ גזירה ב x_0 לכן מהתנאי השקול לגזירות קיימת פונקציה $\varepsilon_2\left(\Delta x\right)$ כך ש $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\varepsilon_2\left(\Delta x\right)=0$ ומתקיים:

$$\Delta y=f'\left(x_0\right)\Delta x+\varepsilon_2\left(\Delta x\right)\Delta x$$

$$\Delta z=g'\left(y_0\right)\left(f'\left(x_0\right)\Delta x+\varepsilon_2\left(\Delta x\right)\Delta x\right)+\varepsilon_1\left(\Delta y\right)\Delta y$$

$$\Delta z=g'\left(y_0\right)f'\left(x_0\right)\Delta x+g'\left(y_0\right)\varepsilon_2\left(\Delta x\right)\Delta x+\varepsilon_1\left(\Delta y\right)\Delta y$$

$$\Delta z=\underbrace{g'\left(y_0\right)f'\left(x_0\right)}_{g'\left(f\left(x\right)\right)}\Delta x+\underbrace{\left[g'\left(y_0\right)\varepsilon_2\left(\Delta x\right)+\varepsilon_1\left(\Delta y\right)\frac{\Delta y}{\Delta x}\right]}_{\varepsilon\left(\Delta x\right)}\Delta x$$

נשים לב כי קיבלנו ביטוי מהצורה: $g\left(y_0+\Delta y\right)-g\left(y_0\right)=z'\left(x\right)\Delta x+\varepsilon\left(\Delta x\right)\Delta x$ השקול לנגזרת.

כעת, כל שנותר להוכיח ש $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\varepsilon\left(\Delta x\right)=0$ ונשים לב ש - $\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'\left(x\right)$ מספר.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\varepsilon\left(\Delta x\right)=g'\left(y_0\right)\lim_{\Delta x\to 0}\varepsilon_2\left(\Delta x\right)+\lim_{\Delta x\to 0}\varepsilon_1\left(\Delta y\right)f'\left(x_0\right)$$

f רציפה ולכן $\Delta x\to 0$ אז $\Delta y\to 0$, (תזכורת: $\Delta y=f\left(x_0+\Delta x\right)-f\left(x_0\right)$)

$$\lim_{\Delta x\to 0}\varepsilon\left(\Delta x\right)=g'\left(y_0\right)\bullet 0+\lim_{\Delta y\to 0}\varepsilon_1\left(\Delta y\right)f'\left(x_0\right)=0$$

משפט: נגזרת של הפונקציה ההפוכה:

תהי $y=f(x)$ פונקציה הפיכה ורציפה ב x_0 ואם $f'(x_0)\neq 0$ אזי גם הפונקציה ההפוכה שלה $x=g(y)$

גזירה בנקודה $y=f(x_0)$ ומתקיים: $g'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)}$

הוכחה: f הפיכה ורציפה ולכן מונוטונית ממש ב x_0 ולכן גם g מונוטונית ממש ב x_0.

תהי Δy תוספת ל y_0 כך ש $y_0+\Delta y$ נמצאת עדיין בתמונה של f ויהי $\Delta x=g(y_0+\Delta y)-g(y_0)$.

g מונוטונית ממש לכן אם $\Delta y\neq 0$ אז $\Delta x\neq 0$ ולכן:

$$\frac{\Delta x}{\Delta y}=\frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}}$$

$$g'(y_0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}}=$$

g רציפה ולכן מ $\Delta y\to 0$ ידוע ש $\Delta x\to 0$ ולכן $=\frac{1}{\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}}=\frac{1}{f'(x_0)}$ כש $f'(x_0)\neq 0$.

נגזרות של פונקציות שונות הוכחה לפי הגדרה:

פונקציה	נגזרת	הוכחה
x^n	nx^{n-1}	$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{x^n-x_0^n}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\cancel{(x-x_0)}\left(x^{n-1}+x^{n-2}x_0+....+x\ x_0^{n-2}+x_0^{n-1}\right)}{\cancel{(x-x_0)}}=$ $=\left(\overbrace{x_0^{n-1}+x_0^{n-1}+....+x_0^{n-1}+x_0^{n-1}}^{n}\right)=nx_0^{n-1}$
$\sin x$	$\cos x$	$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\sin x-\sin x_0}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}2\frac{\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)\cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)\cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right)}{\frac{x-x_0}{2}}=$ $=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)}{\frac{x-x_0}{2}}\cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right)=\cos\left(\frac{2x_0}{2}\right)=\cos(x_0)$
$\cos x$	$-\sin x$	$\left(\cos(x)\right)'=\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)'=-\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=$ $=-\cos\frac{\pi}{2}\cos x-\sin\frac{\pi}{2}\sin x=-\sin x$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$(\tan x)'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	1. $y=\ln x\quad g(y_0)=x=e^y\qquad (e^y)'=\frac{1}{(\ln x)'}\qquad (\ln x)'=\frac{1}{(e^y)'}=\frac{1}{e^y}=\frac{1}{x}$ 2. $(\ln x)'=\lim\limits_{h\to 0}\frac{\ln(x+h)-\ln x}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h}\ln\left(\frac{x+h}{x}\right)=\lim\limits_{h\to 0}\ln\left(\frac{x+h}{x}\right)^{\frac{1}{h}}=$ $=\lim\limits_{h\to 0}\ln\left(1+\frac{1/x}{1/h}\right)^{\frac{1}{h}}=\ln e^{1/x}=\frac{1}{x}$
e^x	e^x	1. $x=\ln y\quad (\ln y)'=\frac{1}{(e^x)'}\qquad (e^x)'=\frac{1}{(\ln y)'}=\frac{1}{\frac{1}{y}}=y=e^x$ 2. $\lim\limits_{h\to 0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{\left(1+\frac{1}{1/h}\right)^{\frac{x+h}{h}}-\left(1+\frac{1}{1/h}\right)^{\frac{x}{h}}}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{(1+h)^{\frac{x+h}{h}}-(1+h)^{\frac{x}{h}}}{h}=$ $=\lim\limits_{h\to 0}\frac{(1+h)^{\frac{x}{h}+1}-(1+h)^{\frac{x}{h}}}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{(1+h)^{\frac{x}{h}}\cancel{(1+h-1)}}{\cancel{h}}=\lim\limits_{h\to 0}\left((1+h)^{\frac{1}{h}}\right)^x=e^x$
a^x	$a^x\ln x$	$(a^x)'=\left(e^{\ln a^x}\right)'=\left(e^{x\ln a}\right)'=(\ln a)e^{x\ln a}=(\ln a)\left(e^{\ln a}\right)^x=a^x\ln a$
x^α $\alpha\in\mathbb{R}$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\left(e^{\ln x^\alpha}\right)'=\left(e^{\alpha\ln x}\right)'=\frac{\alpha}{x}e^{\alpha\ln x}=\frac{\alpha}{x}x^\alpha=\alpha x^{\alpha-1}$

פונקציה	נגזרת	הוכחה
$u(x)^{v(x)}$		$\left(u(x)^{v(x)}\right)' = \left(e^{\ln u(x)^{v(x)}}\right)' = \left(e^{v(x)\ln u(x)}\right)' =$ $= \left(v'(x)\ln u(x) + v(x)\frac{u'(x)}{u(x)}\right)\left(u(x)^{v(x)}\right) =$ $= u(x)^{v(x)} v'(x)\ln u(x) + v(x)u'(x)u(x)^{v(x)-1}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$y = \arcsin x \quad (\sin y)' = \frac{1}{(\arcsin x)'} \quad (\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} =$ $= \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-(\sin \arcsin x)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$y = \arccos x \quad (\cos y)' = \frac{1}{(\arccos x)'} \quad (\arccos x)' = \frac{1}{(\cos y)'} =$ $= \frac{1}{-\sin y} = \frac{-1}{\sqrt{1-\cos^2 y}} = \frac{-1}{\sqrt{1-(\cos \arccos x)^2}} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$y = \arctan x \quad (\tan y)' = \frac{1}{(\arctan x)'} \quad (\arctan x)' = \frac{1}{(\tan y)'} =$ $= \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} = \cos^2 y = \frac{1}{1+\tan^2 y} = \frac{1}{1+(\tan \arctan x)^2} = \frac{1}{1+x^2}$

<u>נגזרת מסדר גבוה:</u>

תהי $y=f(x)$ פונקציה גזירה בקטע (a,b) אם נגזור אותה בכל הנקודות של (a,b) נקבל פונקציה חדשה $f'(x)$ המוגדרת ב(a,b). הפונקציה $y'=f'(x)$ נקראת הנגזרת הראשונה של $f(x)$ בקטע (a,b).

אם בנוסף $f'(x)$ גזירה ב(a,b), נוכל לגזור אותה ונסמן את פונקצית הנגזרת שלה $f''(x)$ או $\frac{d^2f}{dx^2}$.

<u>משפט לייבניץ.</u>

יהיו $v(x)$ ו $u(x)$ פונקציות גזירות n פעמים בנקודה x. אז מתקיים (כמו בינום ניוטון):

$$\left[u(x)v(x)\right]^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(u^{(n-k)}(x)v^{(k)}(x)\right)=$$

$$=\binom{n}{0}u^{(n)}+\binom{n}{1}u^{(n-1)}v+\binom{n}{2}u^{(n-2)}v^{(2)}+.....+\binom{n}{n-2}u^{(2)}v^{(n-2)}+\binom{n}{n-1}uv^{(n-1)}+\binom{n}{n}v^{(n)}$$

הוכחה: באינדוקציה.

המשפטים של החשבון הדיפרנציאלי

משפט פרמה:

תהי f פונקציה מוגדרת בקטע $[a,b]$ וגזירה בנקודה פנימית x_0. אם $f(x)$ מקבלת ב x_0 את ערכה הגדול ביותר או הקטן ביותר אזי $f'(x)=0$.

הוכחה: נניח ב.ה.כ. ש f מקבלת ב x_0 את ערכה הגדול ביותר בקטע. יהי h מספר ממשי כך ש x_0+h עדיין בקטע (a,b) אזי $f(x_0+h)\le f(x_0)$. f גזירה ב x_0 ולכן קיימות הנגזרות החד צדדיות ב x_0.

אז לכל $h>0$:

$$f'_+(x)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\le 0$$

$$f'_-(x)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\ge 0$$

f גזירה ב x_0 ולכן $f'(x)=f'_+(x)=f'_-(x)$ אבל $f'_+(x)\le 0$ ו $f'_-(x)\ge 0$ לכן $f'(x)=0$.

משפט רול:

תהי f פונקציה מוגדרת ורציפה בקטע $[a,b]$, גזירה ב(a,b) כך ש$f(a)=f(b)$ אז קיימת נקודה $c\in(a,b)$ כך ש $f'(c)=0$.

הוכחה: f רציפה בקטע סגור ולכן מקבלת את המינימום m והמקסימום M שלה בקטע.

אם $m=M$ אז הפונקציה קבועה ו$f'(x)=0$ לכל x.

אם $m<M$ אז אם אחד מהם נמצא בקצה הקטע $f(a)=M$ אז השני חייב להתקבל בפנים ולא יכול להתקבל בקצה השני של הקטע כי $f(a)=f(b)$ ולכן יתקבל ב$f(c)$ כש $c\in(a,b)$.

f גזירה בכל נקודה ב(a,b) ולכן גזירה ב c. ומקבלת בנקודה את ערכה הגדול\הקטן ביותר ולכן ממשפט פרמה נובע ש $f'(x)=0$.

משפט: לכל פולינום ממעלה n קיימים לכל היותר n שורשים.

הוכחה: (לכל פונקציה הגזירה k פעמים)

תהי f פונקציה מכל סדר $f^{(k)}$. ונניח כי ל $f^{(k)}$ יש l שורשים. אז לפי משפט רול בין כל שני שורשים של הפונקציה יש שורש אחד של הנגזרת. (אם $f(b)=f(a)=0$ אז קיימת $c\in(a,b)$ כך ש $f'(c)=0$.

ל$f^{(k)}$ יש l שורשים, לכן: ל$f^{(k-1)}$ יש לכל היותר $l+1$ שורשים.

ל$f^{(k-2)}$ יש לכל היותר $l+2$ שורשים.

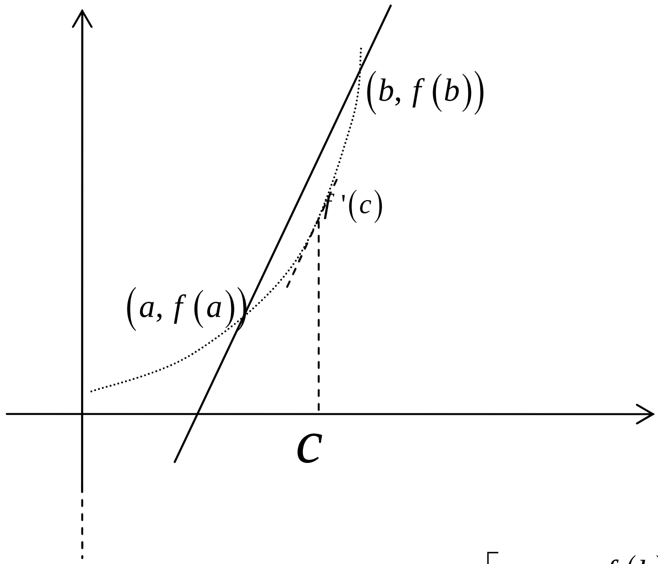
.... ל$f^{(0)}$ יש לכל היותר $l+k$ שורשים.

הנגזרת ה$n-1$ של $p(x)$ פולינום היא ישר שיש לו בדיוק שורש אחד, לכן ל$p(x)$ יש לכל היותר $1+n-1=n$ שורשים ממשיים.

משפט לגרנז':

תהי f פונקציה רציפה ב $[a,b]$ וגזירה ב (a,b) אזי קיימת נקודה $c\in(a,b)$ כך ש

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$



משוואת הישר העובר דרך a,b:

$$y=f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

הוכחה: נתבונן בפונקציה: $g(x)=f(x)-\left[f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\right]$

$g(x)$ רציפה ב $[a,b]$ כהפרש של פונקציות רציפות בקטע. ו $g(x)$ גזירה ב (a,b) כהפרש פונקציות גזירות.

$$g(a)=f(a)-\left[f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(a-a)\right]=0$$

$$g(b)=f(b)-\left[f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{\cancel{b-a}}\cancel{(b-a)}\right]=0$$

$g(x)$ מקיימת את תנאי משפט רול ולכן מתקיימת בה התוצאה של משפט רול ולכן קיימת נקודה $c\in(a,b)$

כך ש $g'(c)=0$:

$$g'(c)=f'(c)-\left[\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right]=0 \Rightarrow f'(c)=\left[\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right]$$

במילים אחרות, לכל ישר העובר דרך פונקציה זו בשתי נקודות בקטע שבו היא רציפה וגזירה קיימת נקודה שבה שיפוע הפונקציה זהה לשיפוע הישר.

משפט: $f(x)$ גזירה היא קבועה אם ורק אם $f'(x)=0$ לכל x.

הוכחה: f גזירה בכל מקום. $[x_1,x_2]$ אז לכל $x_1\neq x_2$ קיימת נקודה $c\in(a,b)$ (לגרנז') כך ש:

$$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=f'(c)=0$$

$f(x_1)=f(x_2)$ לכל x בקטע אז f קבועה.

משפט: תהי f גזירה ב (a,b) אז f מונוטונית עולה בקטע אם ורק אם $f'(x)\geq 0$ בקטע.

כנ"ל ליורדת: $f'(x)\leq 0$.

משפט: תהי f גזירה ב (a,b) אם $f'(x)>0$ לכל x בקטע אז f מונוטונית עולה ממש בקטע.

<u>גרסה נוספת למשפט לגרנז'.</u>

תהי f גזירה בסביבת x_0 אזי לכל Δx כך ש $x_0+\Delta x$ עדיין בסביבה זו. קיים מספר $0<\theta<1$ כך ש:

$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f'(x_0+\theta\Delta x)\Delta x$.

<u>ערך הממוצע של קושי:</u>

יהיו f,g שתי פונקציות רציפות בקטע $[a,b]$ וגזירות ב (a,b) ו $g'(x)\neq 0$ לכל $x\in(a,b)$ אזי קיימת נקודה $c\in(a,b)$ כך ש $\frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$

פונקצית עזר: $h(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\left[g(x)-g(a)\right]$

$$h(a)=f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\left[g(a)-g(a)\right]=f(a)$$

$$h(b)=f(b)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\left[g(b)-g(a)\right]=f(a)$$

$h(x)$ רציפה כסכום של רציפות ויש לה שתי נקודות שבהן $h(b)=h(a)$. ולכן קיימת נקודה c כך ש

$h'(c)=0$. $\qquad h'(c)=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(c)=0 \Leftarrow \frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$

<u>גרסה נוספת למשפט קושי:</u>

יהיו f,g שתי פונקציות גזירות בסביבת x_0 אם $f'(x)\neq 0$ לכל x בסביבה זו, אזי לכל Δx כך ש $x_0+\Delta x$ עדיין בסביבה זו. קיים מספר $0<\theta<1$ כך ש:

$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{g(x_0+\Delta x)-g(x_0)}=\frac{f'(x_0+\theta\Delta x)\Delta x}{g'(x_0+\theta\Delta x)\Delta x}$.

<u>כלל לופיטל:</u>

יהיו f,g שתי פונקציות גזירות בסביבה נקובה של x_0 ומתקיים:

א. $\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0} g(x)=0$. וקיימים.

ב. $g'(x)\neq 0$ בסביבה זו.

ג. קיים הגבול: $\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=L$

אזי מתקיים. $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=L$ כש L יכול להיות אינסופי או 0.

הוכחה: הגבולות $\lim_{x\to x_0} g(x)$, $\lim_{x\to x_0} f(x)$ קיימים. ונניח שהפונקציות רציפות ב x_0 (זה לא משנה כי בחישוב הגבול הערכים $f(x_0)$ ו $g(x_0)$ לא משתתפים בחישוב הגבול.

לכן נניח ש $f(x_0)=g(x_0)=0$.

f,g גזירות בסביבת x_0 . נתון ש $g'(x)\neq 0$ לכל x בסביבה אז מתקיימים התנאים של משפט ערך הממוצע של קושי וקיים מספר $0<\theta<1$ כך ש:

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{g(x_0+\Delta x)-g(x_0)}=\frac{f(x_0+\Delta x)}{g(x_0+\Delta x)}=\frac{f'(x_0+\theta\Delta x)\Delta x}{g'(x_0+\theta\Delta x)\Delta x}$$

נשאיף $\Delta x\to 0$ ואז

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)}{g(x_0+\Delta x)}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'(x_0+\theta\Delta x)}{g'(x_0+\theta\Delta x)}\quad\Rightarrow\quad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

<u>מינימום ומקסימום</u>

<u>משפט פרמה:</u> אם ל f יש מינימום/ מקסימום ב x_0 ו f גזירה ב x_0 אז $f'(x_0)=0$, זה תנאי הכרחי ולא מספיק.

נקודת אקסטרמום מקומי תתקבל בנקודה שבה $f'(x)=0$, זה תנאי הכרחי ולא מספיק.

משפט: (תנאי מספיק לאקסטרמום) מס' 1:

תהי f פונקציה רציפה בנקודה x_0 וגזירה בסביבה זו. ונניח כי x_0 היא נקודה קריטית $f'(x_0)=0$ או ש f לא גזירה אז:

א. אם הנגזרת מחליפה סימן משלילי לחיובי ב x_0 אז x_0 היא נקודת מינימום מקומי של f .

ב. אם הנגזרת מחלפיה סימן מחיובי לשלילי ב x_0 אז x_0 היא נקודת מקסימום מקומי של f .

ג. אם הנגזרת שומרת סימן ב ב x_0 אז x_0 לא אקסטרמום של f .

משפט: (תנאי מספיק לאקסטרמום) מס' 2:

תהי f פונקציה גזירה פעמיים בנקודה x_0 וגזירה בסביבה זו. ונניח כי $f'(x_0)=0$ אזי:

א. אם $f''(x_0)<0$ אז x_0 היא נקודת מקסימום מקומי של $f(x)$.

ב. אם $f''(x_0)>0$ אז x_0 היא נקודת מינימום מקומי של $f(x)$

ג. אם $f''(x_0)=0$ אז לא ניתן לדעת.

הוכחה: ל-סעיף ב'. נתון $f'(x_0)=0$ ולכן

$$f''(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f'(x_0+h)+f'(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f'(x_0+h)}{h}>0$$

לכן קיים δ כך שלכל $0<h<\delta$ מתקיים ש: אם $h>0$ אז $f'(x_0+h)>0$

אם $h<0$ אז $f'(x_0+h)<0$

בנקודה x_0 הנגזרת מחליפה סימן משלילי לחיובי, ולכן x_0 נקודת מינימום מקומי.

<u>הגדרה:</u> f תהיה קעורה/ קמורה בקטע (a,b) אם לכל (x,y) בקטע הקו הישר המחבר את הנקודות $(x,f(x))$ ו $y,f(y)$ עובר כולו מכל לגרף הפונקציה.

במילים אחרות: אם לכל (x,y) בקטע (a,b) ולכל $0<t<1$

מתקיים: $f(tx+(1-t)y)\geq tf(x)+(1-t)f(y)$

<u>הגדרה:</u> f תהיה קמורה בקטע (a,b) אם המשיק לגרף הפונקציה בכל נקודה בקטע, נמצא מתחת לגרף הפונקציה. $f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

<u>הגדרה שקולה:</u> f גזירה תהיה קמורה ב (a,b) אם f' היא פונקציה עולה בקטע.

משפט: אם f גזירה פעמיים ב (a,b) אז f קמורה אם ורק אם $f'' \geq 0$.

<u>הגדרה:</u> נאמר כי x_0 היא נקודת פיתול של $f(x)$ היא רציפה ב x_0 וקיימת סביבה $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ כך שכיוון הקמירות בקטעים $(x_0 - \delta, x_0)(x_0, x_0 + \delta)$ הוא הפוך.

בנקודת פיתול הנגזרת השנייה מחליפה סימן.

<u>הגדרה:</u> f נקראת פונקציה פוליגמית אם בסביבה הנקובה של $\delta + \varepsilon < |x + \delta| < \varepsilon$ מתקיים שהפונקציה.

א. רציפה.

ב. גזירה.

ג. קמורה.

<u>תרגיל:</u> אם f גזירה שלוש פעמים ב x_0 כך ש $f''(x_0) = 0$ אבל $f'''(x_0) \neq 0$ הוכח כי x_0 היא נקודת פיתול של $f(x)$.

הוכחה: נתון ש $f''(x_0) = 0$ וש $f'''(x_0) \neq 0$ אז ל $f'(x_0)$ נקודת אקטרמום ב x_0. אזי $f''(x)$ מחליפה סימן ב x_0 ולכן לפי הגדרת הפיתול x_0 היא נקודת פיתול של $f(x)$.

<u>הגדרה:</u>

תהי f מוגדרת בקטע.

נקודה x_0 בקטע תקרא מקסימום מוחלט של $f(x)$ אם לכל x בקטע $f(x_0) \geq f(x)$.

נקודה x_0 בקטע תקרא מינימום מוחלט של $f(x)$ אם לכל x בקטע $f(x_0) \leq f(x)$

משפט: תהי f רציפה בקטע סגור $[a,b]$ אזי ל f יש לפחות נקודת מינימום מוחלט אחת ונקודת מקסימום מוחלט אחת. אם x_0 היא נקודה כזאת אז היא חייבת להיות נקודה קריטית של $f(x)$ או ש $f(x)$ לא גזירה בנקודה או שהיא נקודת קצה של הקטע.

הוכחה: מכל הנקודות הקריטיות $\{f'(x_0) = 0\}$, הלא גזירות $\{f(x = 0) = |x|\}$ והקיצוניות (ב a ו b), לוקחים את זו עם הערך הגבוה ביותר וזו נקודת הקיצון.

קירובים של פונקציות טורי טיילור

קירוב לינארי:
$$f\left(x_0+\Delta x\right)=f\left(x_0\right)+f'\left(x_0\right)\Delta x+\overbrace{\varepsilon\left(\Delta x\right)\Delta x}^{\varepsilon_1}$$
$$\lim_{\Delta x\to 0}\varepsilon\left(\Delta x\right)=0$$
$$f\left(x\right)=f\left(x_0\right)+f'\left(x_0\right)\left(x-x_0\right)+\varepsilon_1$$

אז לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שלכל $\left|\Delta x\right|<\delta$ מתקיים:
$$\left|f\left(x\right)-f\left(x_0\right)-f'\left(x_0\right)\left(x-x_0\right)\right|<\varepsilon_1$$
כלומר, $f\left(x_0\right)+f'\left(x_0\right)\left(x-x_0\right)$ הוא קרוב של $f\left(x\right)$ עד כדי ε.

קירוב פולינומיאלי: אם פולינום $P_n\left(x\right)$ מדרגה n מקיים שלכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שלכל $\left|x-x_0\right|<\delta$ מתקיים: $\left|f\left(x\right)-P_n\left(x\right)\right|<\varepsilon$.

אזי אומרים שהפולינום הוא קירוב של הפונקציה. נראה כי כדי שלפולינום יהיה קירוב הפונקציה צריכה להיות גזירה n פעמים.

אם כן, הפולינום שיהווה את הקירוב יקיים:
$$f\left(x_0\right)=P_n\left(x_0\right)$$
$$f'\left(x_0\right)=P_n'\left(x_0\right)$$
$$f''\left(x_0\right)=P_n''\left(x_0\right)$$
....
$$f^{(k)}\left(x_0\right)=P_n^{(k)}\left(x_0\right)$$

$$P_n\left(x_0\right)=a_0+a_1\left(x-x_0\right)+\ldots+a_n\left(x-x_0\right)^n$$
$$f\left(x_0\right)=a_0 \quad f^{(k)}\left(x_0\right)=k!a_k$$
$$\frac{f^{(k)}\left(x_0\right)}{k!}=a_k$$
$$f\left(x\right)\cong P_n\left(x\right)=f\left(x_0\right)+f'\left(x_0\right)\left(x-x_0\right)+\frac{f''\left(x_0\right)\left(x-x_0\right)}{2!}+\ldots+\frac{f^{(n)}\left(x_0\right)\left(x-x_0\right)}{n!}$$

<u>משפט פיאנו:</u>

אם f גזירה n פעמים אז קיים פולינום $P_n\left(x\right)$ וקיימת פונקציה $\varepsilon\left(\Delta x\right)$ המקיימת $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\varepsilon\left(\Delta x\right)=0$ כך ש

$$f\left(x\right)=P_n\left(x\right)+\varepsilon\left(\Delta x\right)\left(\Delta x\right)^n$$

<u>הוכחה:</u> הפולינום שנבחר הוא $P_n\left(x\right)$ המקיים: $f^{(k)}\left(x_0\right)=P_n^{(k)}\left(x_0\right)$ כש $0\le k\le n$.

תהי $\Delta x=x-x_0$ אז נאמר ש $\varepsilon\left(\Delta x\right)=\dfrac{f\left(x\right)-P_n\left(x\right)}{\left(\Delta x\right)^n}$. ונשאיף..

$$\lim_{\Delta x\to 0}\varepsilon\left(\Delta x\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f\left(x\right)-P_n\left(x\right)}{n\left(\Delta x\right)^{n-1}}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'\left(x\right)-P_n'\left(x\right)}{\left(\Delta x\right)^n}=\ldots=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f^{(n)}\left(x\right)-P_n^{(n)}\left(x\right)}{n!}=0$$

<u>משפט (טיילור לגרנז'):</u>

תהי f פונקציה גזירה $n+1$ פעמים בסביבת x_0 ותהי x נקודה כלשהי בסביבה זו, אזי קיימת נקודה c בין x ל x_0 כך ש $f\left(x\right)=P_n\left(x\right)+R_n\left(x\right)$. $R_n\left(x\right)=\dfrac{f^{n+1}\left(c\right)}{\left(n+1\right)!}\left(x-x_0\right)^{n+1}$. וזו השארית לפי לגרנז'.

<u>הוכחה:</u>

ידוע שעבור $n=0$ המשפט נכון, ממשפט לגרנז':

$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(c)(x-x_0)}{1!}$ כי לפי לגרנז': $f'(c)=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

עבור $n=1$:

$$f(x)=\underbrace{f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)}_{P_1}+\frac{f''(c)(x-x_0)^2}{2!}.$$

תהי x נקודה מסוימת בסביבת x_0 $\quad P_1(t)=f(x_0)+f'(x_0)(t-x_0)$

נגדיר פונקציה: $g(t)=f(t)-P_1(t)-\left(f(x)-P_1(x)\right)\left(\frac{t-x_0}{x-x_0}\right)^2$

$f(t)$ גזירה פעמיים, $(t-x_0)$ גזירה אינסוף פעמים לכן $g(t)$ גזירה פעמיים בסביבת x_0.

$$g(x)=g(x_0)=0 \Leftarrow \begin{cases} g(x_0)=f(x_0)-P_1(x_0)-\left(f(x)-P_1(x)\right)\left(\frac{x_0-x_0}{x-x_0}\right)^2=0 \\ g(x)=f(x)-P_1(x)-\left(f(x)-P_1(x)\right)\left(\frac{x-x_0}{x-x_0}\right)^2=0 \end{cases}$$

הפונקציה גזירה אז לפי משפט רול קיימת נקודה x_1 כך ש $g'(x_1)=0$

$$g'(x_1)=g'(x_0)=0 \Leftarrow \begin{cases} g'(t)=f'(t)-P_1'(t)-\left(f(x)-P_1(x)\right)2\frac{t-x_0}{(x-x_0)^2} \\ g'(x_0)=f'(x_0)-P_1'(x_0)-\left(f(x)-P_1(x)\right)\left(\frac{x-x_0}{x-x_0}\right)^2=0 \end{cases}$$

אז קיימת נקודה $g''(c)=0$.

$$g''(t)=f''(t)-\underbrace{\cancel{P_1''(t)}}_{=0}-\left(f(x)-P_1(x)\right)\frac{2}{(x-x_0)^2}$$

$$g''(c)=f''(c)-\left(f(x)-P_1(x)\right)\frac{2}{(x-x_0)^2}=0$$

$$f(x)=P_1(x)+\frac{f''(c)(x-x_0)^2}{2}$$

מ.ש.ל.

<u>הערות:</u>

1. נשים לב שהגזירה היא לפי t ולכן $f(x)$ ו $P_n(x)$ לא נגזרות כאשר $g(t)$ נגזרת.
2. ההוכחה היא עבור $n=1$ בלבד, עבור n כללי נשתמש בפונקציה:

$$g(t)=f(t)-P_n(t)-\left(f(x)-P_n(x)\right)\left(\frac{t-x_0}{x-x_0}\right)^{n+1}$$

דוגמאות לטורים בפיתוח סביב 0:

$$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+....+\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+....+\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-2}}{(2n-2)!}$$

$$\ln(1+x) = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+....+\frac{(-1)^{n-1}x^{n}}{n}$$

$$\arctan x = x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+....+\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)}$$

$$e^x = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+....+\frac{x^n}{n!}$$

נחשב בדיוק של 0.01 את : $\sin(1)$.

לשם כך נפתח את $f(x)=\sin x$ סביב 0 עד הדיוק הדרוש.

א. נמצא את סדר הפיתוח ע"י נוסחת השארית:

נדרוש: $R_n(x)<0.01$

$$|R_n(x)|=\frac{|f^{n+1}(c)|}{(n+1)!}\left|(x)^{n+1}\right|\le\frac{1}{(n+1)!}\left|(x)^{n+1}\right|<0.01$$

$$\frac{1}{(n+1)!}\left|(1)^{n+1}\right|=\frac{1}{(n+1)!}<\frac{1}{100}$$

אז עבור $(n+1)!>100$ מתקיים $R_n(x)<0.01$.

ב.

האינטגרל

1. **אינטגרל לא מסוים** - הפעולה ההפוכה של הנגזרת.
2. **אינטגרל מסוים** השטח מתחת לגרף הפונקציה החסומה ב $[a,b]$.
3. **אינטגרל מוכלל** הגבול של השטח מתחת לגרף של פונקציה לא חסומה ואו בתחום לא סופי $[a,\infty)$.

אינטגרל לא מסוים הפעולה ההפוכה של הנגזרת:

הגדרה: פונקציה $F(x)$ תקרא פונקציה קדומה, של $f(x)$ בקטע I אם בכל x ב I מתקיים $F'(x)=f(x)$.

משפט: תהיינה f,g פונקציות גזירות המקיימות $f'=g'$. אזי קיים קבוע C כך ש $f=g+C$.

הוכחה: נגדיר פונקציה: $h=f-g$, $h'=f'-g'$

$h'=0$ אם"ם h קבועה, $h=C$ לכן $f-g=C$ ומכאן ש $f=g+C$.

הגדרה: תהי f פונקציה בעלת פונקציה קדומה F אז אוסף כל הפונקציות $F+C$ נקרא האינטגרל הלא מסוים של f. $F(x)+c=\int f(x)dx$.

אינטגרל מסוים:

השטח מתחת לגרף הפונקציה. נרצה לחשב את השטח מתחת לגרף של $f(x)$ מעל ציר x. מימין ל $x=a$ ומשמאל ל $x=b$.

סכום רימן הגדרה:

תהי $f(x)$ פונקציה מוגדרת ב $[a,b]$ ותהי T חלוקה של הקטע $[a,b]$ ל n תת קטעים:

$$T: a=x_0<x_1<x_2<.....<x_n=b$$
$$\Delta x_i=[x_0,x_1]....\Delta x_k=[x_{k-1},x_k]$$

נסמן: $$\Delta(T)=\max\{\Delta x_1,\Delta x_2....\Delta x_n\}$$

מכל קטע Δx_i נבחר נקודה שרירותית c_i אזי הסכום: $$\sigma_T(c_1....c_n)=\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$$

הסכום האינטגרלי של רימן המתאים לחלוקה T ולבחירת הנקודות $(c_1....c_n)$.

הגדרה: פונקציה $f\left(x\right)$ נקראת אינטגרבילית לפי רימן בקטע $\left[a,b\right]$ אם קיים גבול סופי $I=\lim\limits_{\Delta(T)\to 0}\sigma_T$.

והוא בלתי תלוי בחלוקה T ובבחירת הנקודה c_i כל עוד $\Delta\left(T\right)\to 0$.

$$I=\int_a^b f\left(x\right)dx.$$

ונקרא לו אינטגרל מסוים של $f\left(x\right)$ בקטע $\left[a,b\right]$.

סכומי דרבו:

הגדרה: תהי $f\left(x\right)$ מוגדרת וחסומה ב $\left[a,b\right]$ ותהי T חלוקה של $\left[a,b\right]$ ל n תת קטעים. ויהי $\Delta\left(T\right)$ פרמטר החלוקה של T.

נסמן:
$$m_i=\inf_{\Delta x_i} f\left(x\right)$$
$$M_i=\sup_{\Delta x_i} f\left(x\right)$$

אז הסכום $\overline{S}\left(T\right)=\sum\limits_{i=1}^{n}M_i\Delta x_i$ נקרא סכום דרבו העליון של $f\left(x\right)$ לפי החלוקה T.

והסכום $\underline{S}\left(T\right)=\sum\limits_{i=1}^{n}m_i\Delta x_i$ נקרא סכום דרבו התחתון של $f\left(x\right)$ לפי החלוקה T.

הגדרה: פונקציה חסומה $f\left(x\right)$ נקראת אינטגרבילית בקטע $\left[a,b\right]$ אם לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שלכל חלוקה T כך שפרמטר החלוקה, $\Delta\left(T\right)<\delta$ מתקיים $\left|\overline{S}\left(T\right)-\underline{S}\left(T\right)\right|<\varepsilon$ ולכן

$$\lim_{\Delta(T)\to 0}\left(\overline{S}\left(T\right)-\underline{S}\left(T\right)\right)=0.$$

דוגמאות:

1. פונקציה קבועה בכל קטע $\left[a,b\right]$ היא אינטגרבילית ואם $f=C$ אז $\int_a^b C=C(b-a)$.

הוכחה: נתון ש $f=C$ לכן $m_i=C$ וגם $M_i=C$ לכל Δx_i.

ונחשב: $\overline{S}\left(T\right)-\underline{S}\left(T\right)=\sum\limits_{i=1}^{n}\left(M_i-m_i\right)\Delta x_i=\sum\limits_{i=1}^{n}\left(C-C\right)\Delta x_i=0<\varepsilon$.

ולכן הפונקציה אינטגרבילית בקטע. נחשב את האינטגרל:

$$I=\int_a^b f\left(x\right)dx=\sum_{i=1}^{n}f\left(c_i\right)\Delta x_i=C\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i=C\left(b-a\right).$$

2. דריכלה: $D(x)=\begin{cases}1 & x\in Q\\ 0 & x\notin Q\end{cases}$.

בכל קטע Δx_i יש x רציונלי ו x אי רציונלי. נחשב:

$$\bar{S}(T)-\underline{S}(T)=\sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i)\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}(1-0)\Delta x_i=b-a=\varepsilon$$

אז קיים $\varepsilon>0$ כך ש $\bar{S}(T)-\underline{S}(T)\geq\varepsilon$ לכן f לא אינטגרבילית.

משפט: הגדרת האינטגרביליות לפי רימן שקולה להגדרה לפי סכומי דרבו.

הוכחה: נוכיח דרבו $\Leftarrow$ רימן.

נתון: $\lim\limits_{\Delta(T)\to 0}\left(\bar{S}(T)-\underline{S}(T)\right)=0$

תהי T סדרה מצטמצמת של חלוקות של $[a,b]$ כך ש $\lim\limits_{n\to\infty}\Delta(T_n)=0$.

ומתקיים:

$$\bar{S}(T_1)\leq\bar{S}(T_2)\leq....\leq\bar{S}(T_n)\leq\underline{S}(T_n)\leq....\leq\underline{S}(T_2)\leq\underline{S}(T_1).$$

כלומר ש $\bar{S}(T_n)$ היא סדרה מונוטונית מתכנסת יורדת וחסומה מלמטה ולכן מתכנסת. כנ"ל $\underline{S}(T_n)$.

אבל $\lim\limits_{\Delta(T)\to 0}\left(\bar{S}(T)-\underline{S}(T)\right)=0$, לכן שתיהן מתכנסות לאותו גבול. לכל $c_i\in\Delta x_i$ מתקיים:

$$m_i\leq f(c_i)\leq M_i$$

ולכן הסכום:

$$\begin{gathered}\sum_{i=1}^{n}m_i\Delta x_i\leq\sum_{i=1}^{n}f(c_i)\Delta x_i\leq\sum_{i=1}^{n}M_i\Delta x_i\\ \underset{I}{\underset{\downarrow}{\underline{S}(T)}}\leq\underset{I}{\underset{\downarrow}{\sigma(c_1....c_n)}}\leq\underset{I}{\underset{\downarrow}{\bar{S}(T)}}\end{gathered}$$

ולכן הגבול קיים מסנדוויץ': $\lim\limits_{\Delta(T)\to 0}\sigma(c_1....c_n)=I$.

והוא בלתי תלוי באופן החלוקה או בבחירת $(c_1....c_n)$ לכן f אינטגרבילית לפי רימן.

__הגדרה:__ f אינטגרבילית ב $[a,b]$ אם לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שלכל חלוקה T שעבורה $\Delta(T)<\delta$ מתקיים $\left|\overline{S}(T)-\underline{S}(T)\right|<\varepsilon$.

אז הפונקציה יכולה להיות:

1. פונקציה מונוטונית.
2. פונקציה רציפה.
3. פונקציה רציפה למקוטעין.

1. **משפט:** פונקציה מונוטונית וחסומה בקטע סגור, אינטגרבילית בקטע סגור.

הוכחה: יהי $\varepsilon>0$ ותהי T חלוקה כך ש $\overline{S}(T)-\underline{S}(T)=\sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i)\Delta x_i$

תהי $\delta>0$ כך ש: $\Delta x_i<\delta=\dfrac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$

בכל קטע, אם f מונוטונית עולה,

$$\Delta x_i=[x_{i-1},x_i]$$
$$M_i=f(x_i)\quad m_i=f(x_{i-1})$$

ואז נוכל לחשב:

$$\overline{S}(T)-\underline{S}(T)=\sum_{i=1}^{n}\left(f(x_i)-f(x_{i-1})\right)\Delta x_i\underset{\Delta x_i<\delta}{<}\delta\sum_{i=1}^{n}f(x_i)-f(x_{i-1})=\delta\left[f(b)-f(a)\right]=\varepsilon$$

3. **__הגדרה:__** פונקציה מוגדרת וחסומה ב $[a,b]$ נקראת רציפה למקוטעין אם יש לך לכל היותר מספר סופי של נקודות אי רציפות קפיצה.

הוכחה מקוצרת: תהי T חלוקה.

לכל קטע Δx_i שבו f רציפה אז היא רציפה בו במידה שווה ואז $|x_1-x_2|<\delta$, לכל $x_1,x_2\in\Delta x_i$ ומתקיים: $\left|f(x_1)-f(x_2)\right|<\varepsilon$ ולכן גם $|M_i-m_i|<\varepsilon$.

לכל קטע Δx_i שבו נקודת קפיצה f חסומה ולכן $|M_i-m_i|\le M$.

ואם נבחר $\Delta(T)$ כך שם $\Delta(T)<\varepsilon$ אז יתקיים עבור קטעי הרציפות וקטעי האי-רציפות:

$$\overline{S}(T)-\underline{S}(T)=\sum(M_i-m_i)\Delta x_i+\sum(M_i-m_i)\Delta x_i<\varepsilon\sum\Delta x_i+\sum M\varepsilon<\varepsilon(b-a)+\varepsilon(M\,2k)$$

הסבר: מספר נקודות אי הרציפות הוא סופי, כלומר לכל היותר k פעמים. בחרנו את הסביבה של נקודת אי הרציפות כך שתהיה קטנה מ ε. אבל למה $2k$? כי יתכן והחלוקה יוצאת בדיוק על הנקודה ואז יוצאת בשני קטעים.

דרך נוספת: פשוט להוכיח עבור שני קטעים ולהסיק על k קטעים.

2. **משפט:** פונקציה רציפה בקטע סגור, אינטגרבילית בקטע סגור.

משפט עזר: אם פונקציה רציפה בקטע סגור אז לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שלכל $x_1, x_2 \in [a,b]$ כך ש $|x_1 - x_2| < \delta$ מתקיים $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$. זוהי רציפות במידה שווה.

הוכחה: תהי f רציפה ב $[a,b]$ (ולכן חסומה), נניח בשלילה ש f לא רציפה במידה שווה ולכן

$$\exists \varepsilon_0 > 0,\ \forall \delta > 0,\ \exists x_1, x_2 \in [a,b],\ |x_1 - x_2| < \delta,\ |f(x_1) - f(x_2)| \geq \varepsilon$$

זה נכון לכל $\delta > 0$ ולכן לכל n טבעי, ניקח $\delta = \frac{1}{n}$.

לכל n טבעי קיים זוג נקודות x_n, y_n ב $[a,b]$. כך ש $|x_n - y_n| < \delta$ וגם מתקיים:

$|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$.

$a \leq x_n \leq b$, x_n חסומה ולכן יש לה תת סדרה שמתכנסת. $x_{n_k} \to x_0$, $a \leq x_0 \leq b$ ולכן x_0 בקטע.

$|x_{n_k} - y_{n_k}| < \delta = \frac{1}{n_k}$ ואז $x_{n_k} - \frac{1}{n_k} < y_{n_k} < x_{n_k} + \frac{1}{n_k}$, מסנדוויץ' $y_{n_k} \to x_0$.

f רציפה לכן, $\lim_{k\to\infty} f(y_{n_k}) = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x_0)$.

$f(x_0)$ סופי כי f חסומה.

מאריתמטיקה של גבולות $\lim_{k\to\infty}\left[f(y_{n_k}) - f(x_{n_k})\right] = f(x_0)$

כלומר שעבור $\varepsilon = \varepsilon_0 > 0$ קיים k_0 כך שלכל $k > k_0$ מתקיים ש $|f(y_{n_k}) - f(x_{n_k})| < \varepsilon_0$

בסתירה לכך ש $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$.

לכן f רציפה במידה שווה בקטע סגור.

משפט: אם f רציפה ב $[a,b]$ אז f אינטרבילית בקטע.

הוכחה: f רציפה בקטע סגור, לכן חסומה וכמו כן רציפה במידה שווה אז מתקיים: לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שלכל $x_1, x_2 \in [a,b]$ כך ש $|x_1 - x_2| < \delta$ מתקיים $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

תהי T חלוקה המקיימת $\Delta(T) < \delta$ כלומר שלכל i $\Delta x_i < \delta$.

ואז לכל $x_1^i, x_2^i \in \Delta x_i$ מתקיים $|f(x_1^i) - f(x_2^i)| < \varepsilon$ ולכן $|M_i - m_i| < \varepsilon$.

(**נשים לב:** זה מתקיים כי הפונקציה רציפה בקטע הסגור $[x_{i-1}, x_i]$ ולכן רציפה בו במ"ש)

אז נחשב:

$$\overline{S}(T) - \underline{S}(T) = \sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)\Delta x_i < \varepsilon \sum_{i=1}^{n}\Delta x_i = \varepsilon(b-a)$$

ולכן f אינטגרבילית בקטע.

תכונות של אינטגרל מסויים:

א. לכל פונקציה $f(x)$ המוגדרת ב $x=a$ נגדיר כי $\int_a^a f(x)dx=0$

ב. אם $f(x)$ אינטגרבילית ב $[a,b]$ נגדיר: $\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$

אריתמטיקה של אינטגרל מסויים:

אם f,g אינטגרביליות ב $[a,b]$ אז

א. $f\pm g$ אינטגרבילית ב $[a,b]$ ומתקיים: $\int_a^b (f\pm g)dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx$

ב. לכל קבוע C , Cf אינטגרבילית ב $[a,b]$: $\int_a^b (Cf(x))dx=C\int_a^b f(x)dx$.

ג. הפונקציה $f\bullet g$ גם אינטגרבילית בקטע.

הוכחה:

א. $\int_a^b (f+g)dx=\lim_{\Delta(T)\to 0}\sum_1^n \left(f(c_i)+g(c_i)\right)\Delta x_i=$

והגבול צריך להיות בלתי תלוי בחלוקה T או בבחירת הנקודה c_i .

$$=\lim_{\Delta(T)\to 0}\sum_1^n f(c_i)\Delta x_i+\lim_{\Delta(T)\to 0}\sum_1^n g(c_i)\Delta x_i=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx$$

השתמשנו באריתמטיקה של גבולות.

ב. $\int_a^b Cf(x)dx=\lim_{\Delta(T)\to 0}\sum_1^n Cf(c_i)\Delta x_i=$

והגבול צריך להיות בלתי תלוי בחלוקה T או בבחירת הנקודה c_i .

נשתמש באריתמטיקה של גבולות:

$$=\lim_{\Delta(T)\to 0}\sum_1^n f(c_i)\Delta x_i\cdot\lim_{\Delta(T)\to 0}C=C\int_a^b f(x)dx$$

ג. נתון ש $f\left(x\right)$ אינטגרבילית וש $g\left(x\right)$ אינטגרבילית לכן הן חסומות בקטע: $\left|f\left(x\right)\right|\le K$ $\left|g\left(x\right)\right|\le L$.

תהי T חלוקה של הקטע ותהיינה הנקודות $\overline{x}_i,\underline{x}_i$ בהן מתקבלים המינימום והמקסימום של הפונקציות $f\bullet g$ בהתאמה (ב Δx_i).

גם הפונקציה fg חסומה, נסמן: $m_i^{fg}=f\left(\underline{x}_i\right)g\left(\underline{x}_i\right)$ $M_i^{fg}=f\left(\overline{x}_i\right)g\left(\overline{x}_i\right)$.

$$\left|M_i^{fg}-m_i^{fg}\right|=\left|f\left(\overline{x}_i\right)g\left(\overline{x}_i\right)-f\left(\underline{x}_i\right)g\left(\underline{x}_i\right)\right|=\left|f\left(\overline{x}_i\right)g\left(\overline{x}_i\right)-f\left(\overline{x}_i\right)g\left(\underline{x}_i\right)+f\left(\overline{x}_i\right)g\left(\underline{x}_i\right)-f\left(\underline{x}_i\right)g\left(\underline{x}_i\right)\right|$$

$$\left|f\left(\overline{x}_i\right)\right|\left|g\left(\overline{x}_i\right)-g\left(\underline{x}_i\right)\right|+\left|g\left(\underline{x}_i\right)\right|\left|f\left(\overline{x}_i\right)-f\left(\underline{x}_i\right)\right|=K\left|M_i^g-m_i^g\right|+L\left|M_i^f-m_i^f\right|$$

יהי $\varepsilon>0$.

נתון ש $f\left(x\right)$ אינטגרבילית בקטע לכן קיים $\delta_1>0$ כך שלכל חלוקה T כך ש $\Delta\left(T\right)<\delta_1$

$$\left|\overline{S}^f\left(T\right)-\underline{S}^f\left(T\right)\right|<\varepsilon$$

נתון ש $g\left(x\right)$ אינטגרבילית בקטע לכן קיים $\delta_2>0$ כך שלכל חלוקה T כך ש $\Delta\left(T\right)<\delta_2$

$$\left|\overline{S}^g\left(T\right)-\underline{S}^g\left(T\right)\right|<\varepsilon$$

ניקח $\delta=\min\left\{\delta_1,\delta_2\right\}$. ואז לכל חלוקה T כך ש $\Delta\left(T\right)<\delta$ מתקיים:

$$\left|\overline{S}^{fg}\left(T\right)-\underline{S}^{fg}\left(T\right)\right|=\sum_1^n\left(M_i^{fg}-m_i^{fg}\right)\Delta x_i\le\sum_1^n\left(K\left|M_i^g-m_i^g\right|+L\left|M_i^f-m_i^f\right|\right)\Delta x_i=$$

$$=L\sum_1^n\left(M_i^f-m_i^f\right)\Delta x_i+K\sum_1^n\left(M_i^g-m_i^g\right)\Delta x_i=$$

$$=L\left|\overline{S}^f\left(T\right)-\underline{S}^f\left(T\right)\right|+K\left|\overline{S}^g\left(T\right)-\underline{S}^g\left(T\right)\right|<\varepsilon\left(K+L\right)$$

משפט: אם f אינטגרבילית בקטעים $[a,b]$ ו $[b,c]$, אז היא אינטגרבילית בקטע $[a,c]$ ומתקיים:

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx\ .$$

הוכחה מקוצרת (לא צריך לדעת): נבחר $\varepsilon > 0$ סביב נקודת החיתוך ונראה שהשטח סביב הנקודה קטן מ $M\varepsilon$.

$$\overline{S}(T) - \underline{S}(T) = \underbrace{\sum_1^n (M_i - m_i)\Delta x_i}_{[a,b)} + \underbrace{\sum_1^n (M_i - m_i)\Delta x_i}_{(b,c]} + \underbrace{(M_i - m_i)\Delta x_i}_{\varepsilon(b)}$$

הוכחת האינטגרל: תהי T חלוקה שמכילה חלוקה ב $x=b$ ואז:

$$\sum_1^n f(c_i)\Delta x_i = \sum_1^k f(c_i)\Delta x_i + \sum_{k+1}^n f(c_i)\Delta x_i$$

ובגבול $\Delta(T)\to 0$ כל עוד $x=b$ היא נקודת חלוקה:

$$\int_a^c = \int_a^b + \int_b^c = \int_a^b - \int_c^b\ .$$

משפט: תהי f פונקציה אינטגרבילית בקטע $[a,b]$ אם $f \ge 0$ בקטע אז $\int_a^b f(x)\,dx \ge 0$.

הוכחה: $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\Delta(T)\to 0} \int_a^b f(x)\,dx$

כל המכפלות בסכום הימני אי שליליות ולכן גם הסכום אי שלילי ולכן גם הגבול אי שלילי.

הערה: השוויון מתקבל רק אם $f \equiv 0$ למעט מספר סופי של נקודות.

משפט: תהיינה f,g שתי פונקציות אינטגרביליות בקטע $[a,b]$ אם $f \le g$ לכל $x \in [a,b]$ אזי

$$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx\ .$$

הוכחה: נגדיר $h = g - f$.

$h \ge 0$ לכל $x \in [a,b]$.

לכן מהמשפט הקודם $\int_a^b h(x)\,dx \ge 0$

$$\int_a^b \big(g(x) - f(x)\big)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx \ge 0$$

משפט: תהי f אינטגרבילית בקטע $\left[a,b\right]$ אם $m \le f \le M$ לכל x בקטע אזי:

$$m\left(b-a\right) \le \int_a^b f\left(x\right)dx \le M\left(b-a\right).$$

הוכחה: f אינט' ולכן:

לכל חלוקה T בקטע $\left[a,b\right]$ ולכל בחירה של הנקודות $\left(c_1....c_n\right)$ מתקיים:

$$\sum_1^n m\Delta x_i \le \sum_1^n f\left(c_i\right)\Delta x_i \le \sum_1^n M\,\Delta x_i$$

$$m\left(b-a\right) \le \sum_1^n f\left(c_i\right)\Delta x_i \le M\left(b-a\right)$$

$$m\left(b-a\right) \le \lim_{\Delta(T)\to 0}\sum_1^n f\left(c_i\right)\Delta x_i \le M\left(b-a\right)$$

$$m\left(b-a\right) \le \int_a^b f\left(x\right)dx \le M\left(b-a\right)$$

משפט: תהי $f\left(x\right)$ פונקציה אינט' ב $\left[a,b\right]$ ויהי $f^*\left(x\right)$ $f\left(x\right)=f^*\left(x\right)$ לכל x חוץ ממספר סופי של נקודות.

אז גם $f^*\left(x\right)$ אינט' בקטע ומתקיים $\int_a^b f^*\left(x\right)dx = \int_a^b f\left(x\right)dx$.

הוכחה: א. הוכחת האינטגרביליות של f^*.

ב. חישוב האינטגרל.

א. אינטגרביליות f^*. תהי חלוקה T אז: $\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta_1>0,\ \ \forall T,\ \Delta\left(T\right)<\delta_1$.

$$\overline{S}\left(T\right)-\underline{S}\left(T\right)=\sum_1^n\left(M_i^{\ f}-m_i^{\ f}\right)\Delta x_i<\varepsilon$$

$$\overline{S}^*\left(T\right)-\underline{S}^*\left(T\right)=\sum_1^n\left(M_i^{\ *}-m_i^{\ *}\right)\Delta x_i=\sum_i\left(M_i\ -m_i\ \right)\Delta x_i+\left(M_i^{\ *}-m_i^{\ *}\right)\Delta x_i$$

קיימים לכל היותר מספר סופי k של קטעים המכילים נקודות שבהן $f^*=f$].

ויהי $W \underset{i\le j\le k}{=} \max\left(M_j^{\ *}-m_j^{\ *}\right)$

יהי $\delta=\min\left\{\delta_1,\varepsilon\right\}$ אז לכל חלוקה T כך ש $\Delta\left(T\right)<\delta$.

$$\overline{S}^*\left(T\right)-\underline{S}^*\left(T\right)=\underbrace{\sum_i\left(M_i\ -m_i\ \right)\Delta x_i}_{f^*=f}+\underbrace{\sum_{j=1}^k\left(M_j^{\ *}-m_j^{\ *}\right)\Delta x_i}_{f^*\ne f}\le\varepsilon+kW\varepsilon=\varepsilon\left(1+KW\right)$$

משפט: אם f איטגרבילית ב $[a,b]$ אז גם $|f|$ אינט' בקטע זה.

ומתקיים: $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx$.

הוכחה: א. נוכיח ש $|f|$ אינטגרבילית.

ב. נוכיח אי שוויון

חשבון:

$\overline{x}_i, \underline{x}_i$ נקודות שבהן f מקבלת min ו max בהתאמה בקטע Δx_i.

$\tilde{x}_i, \underset{\sim}{x}_i$ נקודות שבהן $|f|$ מקבלת M_i ו m_i בהתאמה בקטע Δx_i.

$$\tilde{M}_i - \tilde{m}_i = |f(\tilde{x}_i)| - |f(\underset{\sim}{x}_i)| < |f(\tilde{x}_i) - f(\underset{\sim}{x}_i)| = \underbrace{M_i - m_i}_{f}$$

א. נתון כי f אינטגרבילית בקטע $[a,b]$ לכן עבור $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שלכל חלוקה T יש $\Delta(T) < \delta$

כך שמתקיים: $\overline{S}(T) - \underline{S}(T)$.

תהי T חלוקה כזו

אז: $\overline{S}^{|f|}(T) - \underline{S}^{|f|}(T) = \sum_1^n \left(\tilde{M}_i - \tilde{m}_i\right)\Delta x_i \le \sum_1^n (M_i - m_i)\Delta x_i = \overline{S}(T) - \underline{S}(T) < \varepsilon$.

ב. אי השיוויון:

$$-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|$$

$$-\int_a^b |f(x)|\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b |f(x)|\,dx$$

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx$$

ניתן גם להוכיח לפי אי שיוויון המשולש.

משפט ערך הביניים האינטגרלי:

אם f רציפה ב $[a,b]$ אזי קיימת נקודה c בקטע כך ש $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$

הוכחה: f רציפה ב $[a,b]$ לכן ממשפט 2W היא מקבלת מינימום ומקסימום בקטע. $m \le f(x) \le M$.

לכל x בקטע ולכן ממשפט $m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$.

אז מתקיים: $m \le \frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(x)dx \le M$. $\Leftarrow$ $m \le L \le M$

הביטוי $L = \frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(x)dx$ הוא מספר ממשי שנמצא בין m ל M. f רציפה ב $[a,b]$ ולכן ממשפט ערך הביניים של קושי מקבלת בקטע כל ערך בין m ל M. ובכלל זה את L. לכן קיימת נקודה $c \in [a,b]$

כך ש $f(c) = L = \frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(x)dx \quad \Leftarrow \quad f(c)(b-a) = \int_a^b f(x)dx$.

ניסוח אחר: אם f רציפה בקטע $[x_0, x_0+h]$ אזי קיים מספר ממשי $0 \le \theta \le 1$ כך ש

$$\int_{x_0}^{x_0+h} f(x)dx = hf(x_0+\theta h)$$

המשפט היסודי של החדו"א:

1. החלפת משתנה אינטגרציה: $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt$.

2. פונקציה אוספת שטח: $a \le x \le b$ $F(x) = \int_a^x f(t)dt \Leftarrow F'(x) = f(x)$.

משפט (היסודי): תהי f פונקציה רציפה ב $[a,b]$ ותהי c נקודה כלשהי בקטע אזי הפונקציה $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ היא פונקציה קדומה של $f(x)$.

הוכחה: נגזור $F(x)$ לפי הגדרה:

$$F'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\int_c^{x+h} f(t)dt - \int_c^x f(t)dt}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\int_c^{x+h} f(t)dt + \int_x^c f(t)dt}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt =$$

f רציפה בקטע $(x, x+h)$ הכלול בתוך $[a,b]$ ולכן ממשפט ערך הביניים האינטגרלי קיים מספר ממשי $0 \le \theta \le 1$ כך ש $\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt = hf(x_0+\theta h)$ ולכן $\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt = \lim_{h\to 0} f(x_0+\theta h) = f(x)$

<u>משפט ניוטון לייבניץ:</u>

תהי f פונקציה רציפה ב $\left[a,b\right]$ ותהי F פונקציה קדומה של f אזי: $\int_a^b f\left(x\right)dx = F\left(b\right)-F\left(a\right)$

הוכחה: לפי המשפט היסודי $G\left(x\right)=\int_a^b f\left(t\right)dt$ היא פונקציה קדומה של $f\left(x\right)$ אזי קיים קבוע c כך ש $F=G+C$ (משפט).

מכאן ש:

$$F\left(b\right)-F\left(a\right)=G\left(b\right)+C-\left(G\left(b\right)+C\right)=G\left(b\right)-G\left(a\right)=\int_a^b f\left(x\right)dx-\cancel{\int_a^a f\left(x\right)dx}=\int_a^b f\left(x\right)dx$$

משפט: אם f היא פונקציה אינטגרבילית בקטע $\left[a,b\right]$ אז הפונקציה $F\left(x\right)=\int_a^x f\left(t\right)dt$ היא פונקציה רציפה בקטע $\left[a,b\right]$.

הוכחה: צ"ל $\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y\to 0$.

$$\Delta y=F\left(\Delta x+x\right)-F\left(x\right)=\int_a^{x+\Delta x} f\left(t\right)dt-\int_a^x f\left(t\right)dt=\int_x^{x+\Delta x} f\left(t\right)dt.$$

ידוע ש $\left|\int_a^b f\left(x\right)dx\right|\le\int_a^b\left|f\left(x\right)\right|dx$ וידוע ש $\int_a^b\left|f\left(x\right)\right|dx\le M\left(b-a\right)$

f אינטגרבילית בקטע ולכן חסומה, כלומר קיים מספר ממשי $0 < M$ כך ש $\left|f\right|\le M$ לכל x בקטע.

$$\left|\Delta y\right|=\left|\int_x^{x+\Delta x} f\left(t\right)dt\right|\le\int_x^{x+\Delta x}\left|f\left(t\right)\right|dt\le M\left|\Delta x\right|$$

$$-M\left|\Delta x\right|\le\Delta y\le M\left|\Delta x\right| \quad\Rightarrow\quad \left|\Delta y\right|\le M\left|\Delta x\right|.$$

לכן רציפה ולכן אינטגרבילית.

<u>אינטגרל מוכלל</u>

1. אינטגרל על קטע אינסופי.
2. אינטגרל של פונקציה לא חסומה.

<u>אינטגרל על קטע אינסופי הגדרה:</u>

תהי f מוגדרת על בקטע $[a,\infty)$ ונתון כי לכל $b>a$ $f(x)$ אינטגרבילית בקטע $[a,b]$ אזי קיים הגבול:

$\int_a^\infty f(x)\,dx = I = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,dx$ ו הוא נקרא האינטגרל המוכלל של f ב $[a,\infty)$.

אם הגבול קיים וסופי אזי האינטגרל מתכנס, אחרת הוא מתבדר ולא קיים.

אינטגרל מ $-\infty$ ל ∞ מתכנס אם"ם כל אחד מחלקי הסכום מתכנס בעצמו לכל נקודה שנבחר.

<u>הגדרה:</u> אם $f(x)$ אינטגרבילית על קטע מסוים סגור ב R נוכל להגדיר אינטגרל מוכלל על $(-\infty,\infty)$ כך:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx + \int_a^\infty f(x)\,dx$$

אם כל אחד משני האינטגרלים באגף ימין מתכנסים נאמר כי האינטגרל משמאל מתכנס לסכומם. ניתן להראות

שאם האינטגרל $\int_{-\infty}^{\infty}$ קיים אז שני האינטגרלים באגף ימין קיימים ללא תלות ב a.

<u>דוגמא חשובה:</u>

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha} = \int_1^\infty x^{-\alpha}dx = \begin{cases} \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} & (\alpha\neq 1) \\ \ln x & (\alpha=1)\end{cases}$$

$$\alpha>1 \ \Rightarrow\ \int_1^\infty x^{-\alpha}dx = 0-\left(\frac{1}{-\alpha+1}\right)$$

$$\alpha\le 1 \ \Rightarrow\ \int_1^\infty x^{-\alpha}dx = \infty$$

ולכו עבור $\alpha>1$ מתכנס ועבור $\alpha\le 1$ מתבדר.

<u>מבחן ההשוואה:</u>

יהיו f,g פונקציות לא שליליות בקטע $[a,\infty)$ ואינטגרביליות ב $[a,b]$ אז לכל $b>a$ אם $f \ge g$ לכל $x \in [a,b]$ אזי:

א. אם $\int_a^\infty g(x)dx$ מתכנס אז $\int_a^\infty f(x)dx$ מתכנס

ב. אם $\int_a^\infty f(x)dx$ מתבדר אז $\int_a^\infty g(x)dx$ מתבדר.

הערות:

א. זה נכון גם אם $f \ge g$ רק ל $x \ge x_0$ מסויים.

ב. זה נכון גם אם $f \ge Mg$ ל $M>0$ קבוע כלשהו.

הוכחה: נסמן $I(b)=\int_a^b f(x)dx,\ J(b)=\int_a^b g(x)dx$.

הפונקציות אי שליליות לכן $I(b),\ J(b)$ פונקציות מונוטוניות עולות וגם מתקיים $0 \le I(b) \le J(b)$.

א. אם $\int_a^\infty g(x)dx$ מתכנס אז $J(b)$ חסומה, ולכן $I(b)$ עולה וחסומה ולכן הגבול $\lim_{b\to\infty} I(b)$ קיים וסופי.

ב. אם $\int_a^\infty f(x)dx$ מתבדר אז $\lim_{b\to\infty} I(b)$ לא סופי ולכן לא חסום ולכן $I(b)$ לא חסומה ולכן $J(b)$ לא חסומה (ועולה) ולכן מתבדרת.

ב' ניתן גם להוכיח ע"י שלילה לוגית: $\int_a^\infty g(x)dx$ מתכנס $\Leftarrow$ $\int_a^\infty f(x)dx$ מתכנס

$\int_a^\infty f(x)dx$ לא מתכנס $\Leftarrow$ $\int_a^\infty g(x)dx$ לא מתכנס

<u>מבחן ההשוואה הגבולי:</u>

יהיו f,g פונקציות לא שליליות בקטע $[a,\infty)$ ונניח שקיים הגבול $L=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$

א. $0<L<\infty$ אזי הפונקציות מתכנסות ומתבדרות יחדיו.

ב. $L=0$ אזי אם $\int_a^\infty g(x)dx$ מתכנס אז $\int_a^\infty f(x)dx$ מתכנס ואם $\int_a^\infty f(x)dx$ מתבדר אז $\int_a^\infty g(x)dx$ מתבדר.

ג. $L=\infty$ אזי אם $\int_a^\infty f(x)dx$ מתכנס אז $\int_a^\infty g(x)dx$ מתכנס ואם $\int_a^\infty g(x)dx$ מתבדר אז $\int_a^\infty f(x)dx$ מתבדר.

הוכחה:

א. אם הגבול קיים אז $m\le\frac{f}{g}\le M$ חסומה ולכן $gm\le f\le Mg$ אם $\int_a^\infty f(x)dx$ מתכנס אז ממבחן ההשוואה $m\int_a^\infty g(x)dx$ מתכנס ואז $\int_a^\infty g(x)dx$ (הגבול קיים עד כדי קבוע). אם $\int_a^\infty g(x)dx$ מתכנס אז ממבחן ההשוואה $\frac{1}{M}\int_a^\infty f(x)dx$ מתכנס ואז $\int_a^\infty f(x)dx$ מתכנס. (התבדרות בהתאמה).

ב. אם $L=0$ אז קיים x_0 כך שלכל $x\ge x_0$ $g\ge f$ ואז ממבחן ההשוואה..

ג. אם $L=\infty$ אז קיים x_0 כך שלכל $x\ge x_0$ $g\le f$ ואז ממבחן ההשוואה..

<u>הגדרה:</u> אם $\int_a^\infty |f(x)|dx$ מתכנס אז $\int_a^\infty f(x)dx$ מתכנס בהחלט. ואם $\int_a^\infty |f(x)|dx$ מתבדר אבל $\int_a^\infty f(x)dx$ מתכנס אז אומרים שהוא מתכנס בתנאי.

משפט: אם $\int_a^\infty |f(x)|dx$ מתכנס אז גם $\int_a^\infty f(x)dx$ מתכנס.

<u>אינטגרל מוכלל של פונקציה לא חסומה:</u>

תהי f מוגדרת ולא חסומה בקטע $[a,b)$ ונניח כי לכל $\varepsilon>0$ $f(x)$ אינטגרבילית $[a,b-\varepsilon]$. ולכן גם חסומה בקטע. $I(\varepsilon)=\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$.

אם קיים הגבול $I=\lim_{\varepsilon\to0^+}I(\varepsilon)$ אזי הוא יקרא האינטגרל המוכלל של $f(x)$ בקטע $[a,b)$.

דוגמא (חשובה!): נשים לב שפה קורה ההפך!

התכנסות לכל $\alpha<1$ והתבדרות לכל $\alpha\geq 1$

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha} = \int_0^{b-a} \frac{dt}{(t)^\alpha} = \int_{t\to 0}^{b-a} (t)^{-\alpha}\, dt =$$

$$\alpha\neq 1 \Rightarrow \quad \frac{1}{1-\alpha}\left[\frac{1}{(b-a)^{\alpha-1}} - \lim_{t\to 0}\left(\frac{1}{t^{\alpha-1}}\right)\right] = \begin{cases} \alpha>1 \Rightarrow \ \infty \\ \alpha<1 \Rightarrow \frac{1}{1-\alpha}\frac{1}{(b-a)^{\alpha-1}} \end{cases}$$

$$\alpha=1 \Rightarrow \quad \ln(b-a) - \lim_{t\to 0} \ln t = \infty$$

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha} = \int_{b-a}^{t\to 0} \frac{dt}{(t)^\alpha} = \int_{b-a}^{t\to 0} (t)^{-\alpha}\, dt =$$

$$\alpha\neq 1 \Rightarrow \quad \frac{1}{1-\alpha}\left[\lim_{t\to 0}\left(\frac{1}{t^{\alpha-1}}\right) - \frac{1}{(b-a)^{\alpha-1}}\right] = \begin{cases} \alpha>1 \Rightarrow \ \infty \\ \alpha<1 \Rightarrow -\frac{1}{1-\alpha}\frac{1}{(b-a)^{\alpha-1}} \end{cases}$$

$$\alpha=1 \Rightarrow \quad \lim_{t\to 0} \ln t - \ln(b-a) = \infty$$

הערות:

1. שני משפטי ההשוואה שומרים על צורתם כמו באינטגרל על קטע אינסופי.
2. כמו כן הערכת האינטגרל (עם הערך מוחלט)
3. כאשר הנקודה בה הפונקציה מקבלתך ערך אינסופי היא בקטע מחשבים: $\int_a^c + \int_c^b$
4. ניתן לעבור מאינטגרל מוכלל מסוג 2 לאינטגרל מוכלל מסוג 1 ולהפך ע"י הצבה:

טורים אינסופיים:

תהי a_n סדרה, הביטוי $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + ... + a_n$

נקרא טור מספרים והוא אינסופי. (זהו סכום אינסופי של אברי הסדרה)

נסמן:

$$\begin{aligned} S_1 &= a_1 \\ S_2 &= a_1 + a_2 \\ &.... \\ S_n &= a_1 + ... + a_n \end{aligned}$$

S_n נקרא סדרת הסכומים החלקיים $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ כאשר $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$

סכום הטור S יהיה $S = \lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

אם S קיים וסופי אומרים שהטור מתכנס אחרת אומרים שהטור מתבדר.

טור הנדסי: $\sum_{k=1}^{\infty} a_1 q^k$ מתכנס עבור $|q| < 1$ ומתבדר עבור $|q| \ge 1$

$$S = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_1 q^k \underset{|q|<1}{=} \frac{a_n}{1-q}$$

<u>טור לייבניץ':</u>

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} ....$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + ... + \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n} + \frac{(-1)^{n+2} x^{n+1}}{(n+1)(1+C)^{n+1}}$$

עבור $x = 1$

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ... + \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \frac{(-1)^{n+2}}{(n+1)(1+C)^{n+1}}$$

$$|\ln 2 - S_n| = \left| \frac{(-1)^{n+2}}{(n+1)(1+C)^{n+1}} \right| \underset{0<C<1}{<} \frac{1}{n+1}$$

$$0 \le \lim_{n\to\infty} |\ln 2 - S_n| \le \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} |\ln 2 - S_n| = 0 \;\Rightarrow\; \lim_{n\to\infty} (\ln 2 - S_n) = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S = \ln 2$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \ln 2$$

טור טלסקופי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n - a_{n+1}$

$$S_n = \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n - a_{n+1}\right) = \left(a_1 - a_2\right) + \left(a_2 - a_3\right) + \ldots + \left(a_n - a_{n+1}\right)$$
$$S_n = a_1 - a_{n+1}$$

הטור הטלסקופי מתכנס אם ורק אם הסדרה a_n מתכנסת.

$$S_n = \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n - a_{n+1}\right) = \left(a_1 - a_2\right) + \left(a_2 - a_3\right) + \ldots + \left(a_n - a_{n+1}\right)$$
$$\lim_{n\to\infty} S_n = S = a_1 - \lim_{n\to\infty} a_{n+1}$$

למשל:

1. מתכנס

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k\left(k+1\right)} = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$$
$$S = a_1 - \lim_{n\to\infty} a_n = 1 - \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 1 - 0 = 1$$

2. מתבדר

$$\sum_{k=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = -\sum_{k=1}^{\infty}\left[\ln k - \ln\left(k+1\right)\right]$$
$$a_n = \ln n$$
$$\lim_{n\to\infty}\ln n = \infty$$

משפט: (תנאי הכרחי ולא מספיק להתכנסות) אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס אז $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

הוכחה:

הטור מתכנס לכן (עם שימוש באריתמטיקה של גבולות)

$$S_n \to L \Rightarrow S_{n-1} \to L$$
$$S_n = S_{n-1} + a_n$$
$$a_n = S_n - S_{n-1}$$
$$\lim_{n\to\infty} S_n = L - L = 0$$

משפט: יהי N מספר טבעי אזי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס אם"ם הטור $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ מתכנס.

במילים אחרות: הוספה או החסרה של מספר סופי של אברים מהטור אינה משנה את עובדת התכנסותו ואו התבדרותו.

<u>הוכחה:</u>

$$\bar{S}_n = \sum_{n=N}^{\infty} a_n, \quad S_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

שני הסכומים נבדים אחד מן השני במספר סופי של אברים:

$$S_n = a_1 + ... + a_{N-1} + \underbrace{\left(a_N + ... + a_n\right)}_{\bar{S}_n}$$

$$S_n = C + \bar{S}_n$$

ולכן S_n מתכנסת אם"ם $\bar{S}_n$ מתכנסת.

משפט: אם הטורים $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ו $\sum_{n=1}^{\infty} G_n$ מתכנסים ו C הוא קבוע אזי

א. הטור $\sum_{n=1}^{\infty} Ca_n$ מתכנס וסכומו $C\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

ב. הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \pm G_n\right)$ מתכנס וסכומו: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} G_n$

<u>הוכחה:</u>

א.

ב. יהיו A_n, B_n סדרות הסכומים החלקיים של $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ בהתאמה ותהי S_n סדרת הסכומים החלקיים של $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n + b_n\right)$.

לכל n סופי $A_n + B_n = S_n$ וזה נכון רק למספר סופי של איברים.

a_n, b_n מתכנסות ולכן הגבול: $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} A_n + \lim_{n\to\infty} B_n$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n + b_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

<u>טורים חיוביים:</u>

<u>הגדרה:</u> טור $\sum a_n$ נקרא טור חיובי אם כל אבריו לא שליליים.

<u>הערה:</u> 1. גם אם יש בטור מספר סופי של איברים שליליים הוא מתנהג כמו טור חיובי.

2. כל מה שנוכיח עבור טור חיובי נכון גם עבור טור שלילי.

משפטים: 1. סדרת הסכומים החלקיים של טור חיובי היא סדרה מונוטונית עולה.

2. אם טור חיובי הוא חסום אז הוא מתכנס (לפי המשפט מסדרות).

משפט ההשוואה: אם לכל k החל ממקום מסוים $0 \le a_k \le b_k$ אזי .

א. אם $\sum b_k$ מתכנס אז $\sum a_k$ מתכנס.

ב. אם $\sum a_k$ מתבדר אז $\sum b_k$ מתבדר.

<u>הוכחה:</u> לפי אינטגרלים מוכללים.

הערה: נכון גם אם $0 \le a_n \le Mb_n$, $0 < M$.

א. אם $\sum b_k$ מתכנס אז הוא חסום ולכן גם הסכום $\sum a_k$ חסום. ולכן מתכנס..

ב. אם $\sum a_k$ מתבדר אז הוא ולא חסום ולכן גם הסכום $\sum b_k$ לא חסום (וסדרה מונוטונית עולה) ולכן מתבדר.

משפט מבחן ההשוואה הגבולי:

יהיו $\sum a_n$ ו $\sum b_n$ שני טורים חיוביים. אם קיים הגבול: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L$. אזי:

א. אם $0 < L < \infty$ אזי שני הטורים $\sum a_n$ ו $\sum b_n$ מתכנסים ומתבדרים יחדיו.

ב. אם $L = 0$ אזי אם $\sum b_n$ מתכנס אז $\sum a_n$ מתכנס. ואם $\sum a_n$ מתבדר אז $\sum b_n$.

ג. אם $L = \infty$ אז אם $\sum a_n$ מתכנס אז $\sum b_n$ מתכנס ואם $\sum b_n$ מתבדר אז $\sum a_n$ מתבדר.

<u>הוכחה:</u>

נתון $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L$.

א. לכל $\varepsilon > 0$ קיים n_0 כך שלכל $n \ge n_0$ מתקיים: $\left|\frac{a_n}{b_n} - L\right| < \varepsilon$. ולכן $L - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < \varepsilon + L$.

נבחר $0 < \varepsilon < L$ ואז לכל $n \ge n_0$ מתקיים: $0 \le b_n\left(L - \varepsilon\right) \le a_n \le b_n\left(\varepsilon + L\right)$

כעת, ממבחן ההשוואה. אם $\sum a_n$ מתכנס אז $\sum b_n$ מתכנס ולהיפך.ולכן $\sum a_n$ מתכנס אם"ם $\sum b_n$. וההיפוך הלוגי עבור התבדרות.

ב. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ אז לכל $\varepsilon > 0$ קיים n_0 כך שלכל $n \ge n_0$ מתקיים $\left|\frac{a_n}{b_n}\right| < \varepsilon$.הטורים חיוביים ולכן

$0 \le \frac{a_n}{b_n} < \varepsilon \;\Leftarrow\; 0 \le a_n < \varepsilon b_n$ ואז ממבחן ההשוואה אם $\sum b_n$ אז $\sum a_n$.

ג. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$ אז לכל $A > 0$ קיים n_0 כך שלכל $n \ge n_0$ מתקיים $\frac{a_n}{b_n} > A > 0$ ואז $a_n > Ab_n \ge 0$

וממבחן ההשוואה..

מבחן המנה של דלאמבר:

יהי $\sum a_k$ טור חיובי ממש.

ומתקיים: $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=q>0$.

1. אם $q<1$ הטור מתכנס.
2. אם $q>1$ הטור מתבדר.
3. אם $q=1$ לא יודעים.

<u>הוכחה:</u>

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=q>0$ אז לכל $\varepsilon>0$ קיים n_0 כך שלכל $n\ge n_0$ מתקיים:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}-q\right|<\varepsilon \quad\Rightarrow\quad 0<\frac{a_{n+1}}{a_n}<q+\varepsilon=t$$

1. נבחר ε כך ש $q+\varepsilon<1$.. $\quad 0<\frac{a_{n+1}}{a_n}<t<1$.

לכל $n\ge n_0$ מתקיים:

$$a_n=\frac{a_n}{a_{n-1}}\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\dots\frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}}a_{n_0}<t^{n-n_0}a_{n_0}<1$$

$$0<a_n<t^{n-n_0}a_{n_0}$$

הטור $a_{n_0}\sum_{n=1}^{\infty}t^{n-n_0}$ מתכנס כי זהו טור הנדסי שהמנה $|t|<1$.

ולכן ממשפט ההשוואה גם הטור $\sum a_n$ מתכנס.

2. $q-\varepsilon<\frac{a_{n+1}}{a_n} \quad\Rightarrow\quad \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}-q\right|<\varepsilon$

נבחר ε כך ש $q-\varepsilon>1$.. ולכן $1<\frac{a_{n+1}}{a_n} \quad\Leftarrow\quad a_n<a_{n+1}$. כלומר זו סדרה מונוטונית חיובית עולה

ולכן $\lim_{n\to\infty}a_n\ne 0$.

מתבדר:
$$\sum\frac{k^k}{k!}\ \Rightarrow\ \lim_{k\to\infty}\frac{\frac{(k+1)^{k+1}}{(k+1)!}}{\frac{k^k}{k!}}=\lim_{k\to\infty}\frac{(k+1)^{k+1}}{(k+1)!}\frac{k!}{k^k}=\lim_{k\to\infty}\frac{(k+1)^k}{k^k}=e>1$$

מתכנס:
$$\sum\frac{k!}{k^k}\ \Rightarrow\ \lim_{k\to\infty}\frac{\frac{(k+1)!}{(k+1)^{k+1}}}{\frac{k!}{k^k}}=\lim_{k\to\infty}\frac{(k+1)!}{(k+1)^{k+1}}\frac{k^k}{k!}=\lim_{k\to\infty}\frac{k^k}{(k+1)^k}=\frac{1}{e}<1$$

<u>מבחן השורש של קושי:</u>

יהי $\sum a_k$ טור חיובי המקיים $\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{a_k}=q$

1. אם $q<1$ הטור מתכנס.
2. אם $q>1$ הטור מתבדר.
3. אם $q=1$ לא יודעים.

צריך להוכיח!

<u>מבחן האינטגרל:</u>

יהי $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)=\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ טור חיובי ו $f(k)$ הוא ערך הפונקציה $f(x)$ בנקודה $x=k$ אם $f(x)$ חיובית ולא עולה לכל $x>1$ אז הטור $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ והאינטגרל המוכלל $\int_a^b f(x)dx$ מתכנסים ומתבדרים יחדיו.

<u>הוכחה:</u> הסדרה לא עולה ולכן $a_1\ge a_n$

$$\sum_{k=1}^{n-1} f(k+1)\le\int_1^n f(x)dx\le\sum_{k=1}^{n-1} f(k)$$

$$S_n-a_1\le\int_1^n f(x)dx\le S_n-a_n$$

$$S-a_1\le\int_1^n f(x)dx\le S-\lim_{n\to\infty} a_n$$

א. אם האינטגרל מתכנס אז הוא חסום ולכן הגבול $S-a_1$ קיים כי הוא סדרה מונוטונית עולה וחסומה ולכן מתכנסת.

ב. אם הטור מתכנס $\lim_{n\to\infty} a_n=0$ והגבול S קיים וסופי ואז האינטגרל חסום כי f חיובית.

ג. אם הטור מתבדר אז $S=\infty$ כי הטור חיובי ולכן האינטגרל לא חסום ולכן מתבדר.

ד. אם האינטגרל מתבדר, $\lim_{n\to\infty} a_n$ קיים וסופי כי a_n סדרה מונוטונית יורדת וחסומה מלמטה ואז הביטוי $S-\lim_{n\to\infty} a_n$ לא חסום ולכן S לא חסום ולכן הטור מתבדר!

<u>טורים כלליים:</u>

טור כללי הוא טור שיש בו גם אינסוף אברים חיוביים וגם אינסוף איברים שליליים.

<u>מבחן קושי (yes! It's him again!) להתכנסות טורים</u>

הטור $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ מתכנס לסכום סופי אם"ם לכל $\varepsilon > 0$ קיים n_0 כך שלכל $n \geq n_0$ ולכל p טבעיים מתקיים:

$$\left|S_{n+p} - S_n\right| = \left|a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p}\right| < \varepsilon$$

<u>הגדרה:</u> אומרים שטור $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ מתכנס בהחלט אם הטור $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ מתכנס.

<u>הגדרה:</u> אם הטור $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ מתכנס אבל $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ מתבדר אומרים שהטור מתכנס בתנאי.

משפט: טור שמתכנס בהחלט מתכנס.

<u>הוכחה:</u> הטור $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ מתכנס, לכן מקריטריון קושי ל $\varepsilon > 0$, קיים n_0 כך שלכל $n \geq n_0$ ולכל p טבעי.

$$\left||a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \ldots + |a_{n+p}|\right| < \varepsilon$$

ואז מאי שיווין המשולש:

$$\left|a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p}\right| < \left||a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \ldots + |a_{n+p}|\right| < \varepsilon$$

ולכן טור מתכנס.

למשל, טור לייבניץ מתכנס בתנאי כי $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^{k+1}}{k}\right|$ מתבדר.

אבל טור $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^{k+1}}{k^2}\right|$ מתכנס בהחלט ולכן $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2}$ מתכנס.

משפט לייבניץ:

תהי a_n סדרה מונוטונית יורדת ממש של מספרים חיוביים המקיימת $a_n \to 0$ אזי :

א. הטור $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1} a_k$ מתכנס.

ב. סכום הטור S מקיים $0 < S < a_1$.

ג. השארית $r_N = \sum_{k=N+1}^{\infty}(-1)^{k+1} a_k$ מקיימת: $(-1)^N r_N > 0$ וגם $|r_N| < a_{n+1}$.

הערות:

האבר הראשון תמיד חיובי:

$a_1 - a_2 + a_{3....}$

הוכחה:

$$S_{2n} = (a_1 - a_2) + ... + (a_{2n-1} - a_{2n}) > 0$$

הסדרה מונוטונית יורדת ממש לכן $(a_n - a_{n+1}) > 0$ ולכן S_{2n} סדרה מונוטונית עולה ממש.

$$S_{2n} = a_1 - \underset{>0}{(a_2 - a_3)} - \underset{>0}{(a_4 - a_5)} - ...... - \underset{>0}{(a_{2n-2} - a_{2n-1})} - a_{2n} > 0$$

$$\Rightarrow S_{2n} < a_1$$

ומכיון ש S_{2n} סדרה מונוטונית עולה ממש וחסומה מלמעלה אזי היא מתכנסת (הוכחנו רק עבור מספר זוגי של אברים!!!). $\lim_{n\to\infty} S_{2n} = S$

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n-1} = S - 0 = S \qquad \Leftarrow \qquad S_{2n-1} = S_{2n} - a_{2n}$$

שתי הסדרות S_{2n} ו S_{2n-1} שואפות לאותו גבול ולכן S_n מתכנסת ולכן הטור מתכנס.

הערה: S_{2n} ו S_{2n-1} הן תת סדרות מתכנסות של S_n ומכיון שיחדיו הן מכילות את כל אברי הסדרה אזי הסדרה מתכנסת.

הערכת השגיאה בחישוב טור באמצעות מבחן האינטגרל:

$$0 \le \int_1^{\infty} f(x)\,dx \le S \le \int_1^{\infty} f(x)\,dx + a_1$$

$S = S_N + r_N$ כאשר r_N הוא למעשה שארית הטור: $r_N = a_{N+1}...$.

$$0 \le \int_{N+1}^{\infty} f(x)\,dx \le r_N \le \int_{N+1}^{\infty} f(x)\,dx + a_{N+1}$$

הערות:

1. אם a_n מונוטונית לא עולה אבל $a_n \to 0$ המשפט עדיין כאשר כל האי שיוויונים הופכים לחלשים.
2. המבחן פועל רק בסדרה מונוטונית.

תרגיל: להוכיח שהטור מתבדר: $\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}-1}-\frac{1}{\sqrt{3}+1}+\dots$

$a_{2k}=\left(\frac{1}{\sqrt{2k}-1}-\frac{1}{\sqrt{2k}+1}\right)=\left(\frac{2}{2k-1}\right)>\left(\frac{2}{2k}\right)$ חיובי, ממבחן ההשוואה מתבדר.

$a_{2k-1}=\left(\frac{1}{\sqrt{2k-1}-1}-\frac{1}{\sqrt{2k-1}+1}\right)=\left(\frac{2}{2k-2}\right)>\left(\frac{2}{2k}\right)$ חיובי, ממבחן ההשוואה מתבדר.

אז כל אברי הטור $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(S_{2n}+S_{2n-1}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum_{k=2}^{n}a_{2k}+\sum_{k=2}^{n}a_{2k-1}\right)=\infty$. מאריתמטיקה של טורים...

<u>**חילוף סדר אברי הטור:**</u>

א. בטור חיובי מתכנס/ מתכנס בהחלט, שינוי בסדר האברים לא משנה את הגבול.

ב. בטור מתכנס בתנאי, משפט רימן, אפשר לסדר את אברי הטור כך שיתקבל כל גבול שנרצה ואפילו אינסוף.

סדרות של פונקציות

תהי $f_n(x)$ סדרה של פונקציות מוגדרות בקטע J לכל $x_0 \in J$, $f_n(x_0)$ יא סדרת מספרים.
אם הסדרה $f_n(x_0)$ אומרים ש x_0 היא נקודת התכנסות של $f_n(x)$. קבוצת כל נקודות ההתכנסות של $f_n(x)$ נקראת תחום ההתכנסות של $f_n(x)$.
אם I הוא תחום ההתכנסות של $f_n(x)$ נקבל לכל $x \in I$ ערך כלשהו שונה של הגבול. וכך אוסף כל ערכי הגבולות הוא פונקציה $f(x)$ מוגדרת ב I.

$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$.

$f(x)$ נקראת פונקצית הגבול של $f_n(x)$.

התכנסות במידה שווה:

הגדרה: תהי $f_n(x)$ סדרת פונקציות המתכנסות בקטע I אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים n_0 כך שלכל $n \ge n_0$ ולכל $x \in I$ מתקיים ש: $\left|f_n(x) - f(x)\right| < \varepsilon$.

במילים אחרות, כל הגרפים של $f_n(x)$ כאשר $n \ge n_0$ נמצאים בין $f(x)-\varepsilon < f_n(x) < f(x)+\varepsilon$ בכל הקטע I.

משפט: סדרת פונקציות $f_n(x)$ מתכנסת במ"ש ל $f(x)$ בקטע I אם"ם:

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in I} \left|f_n(x) - f(x)\right| = 0$$

הוכחה: $(1) \Leftarrow (2)$ נתון ש $f_n(x)$ מתכנסת במ"ש,

אז: $\forall x \in I,\ \forall n \ge n_0,\ \exists n_0\ \forall \varepsilon > 0 \quad \left|f_n(x) - f(x)\right| < \varepsilon$.

זה נכון לכל $x \in I$ ולכן גם ל x שבו מתקבל הסופרמום $\sup\left|f_n(x) - f(x)\right|$ ולכן

$\sup\limits_{x\in I}\left|f_n(x) - f(x)\right| < \varepsilon$.

אז קיבלנו ש $\forall x \in I,\ \forall n \ge n_0,\ \exists n_0\ \forall \varepsilon > 0$ מתקיים: $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{x\in I}\left|f_n(x) - f(x)\right| = 0$

$(2) \Leftarrow (1)$: נתון $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{x\in I}\left|f_n(x) - f(x)\right| = 0$ לכן $\forall x \in I,\ \forall n \ge n_0,\ \exists n_0\ \forall \varepsilon > 0$

$\sup\limits_{x\in I}\left|f_n(x) - f(x)\right| < \varepsilon$. ולכן לכל $x \in I$: $\left|f_n(x) - f(x)\right| \le \sup\limits_{x\in I}\left|f_n(x) - f(x)\right| < \varepsilon$

מכאן ש $\forall x \in I,\ \forall n \ge n_0,\ \exists n_0\ \forall \varepsilon > 0$ מתקיים $\left|f_n(x) - f(x)\right| < \varepsilon$ וזו התכנסות במ"ש.

דוגמא: $f_n(x)=x^n$ מתכנסת במ"ש ב$\left[0,\frac{3}{4}\right]$ אבל לא ב $[0,1)$ כי בהינתן $\varepsilon>0$ לא נוכל לומר שלכל $n\ge n_0$ ולכל $x\in I$ $\left|f_n(x)-f(x)\right|<\varepsilon$. ככל שנתקרב ל1.

מקסימום מוחלט של פונקציה רציפה בקטע $[a,b]$ מחשבים את ערך הפונקציה ב-

א. $f'(x)=0$

ב. נק' שבהן $f(x)$ לא גזירה.

ג. קצוות: $f(b)$ $f(a)$.

ולקוחים את הגדול מכולם.

סופרמום של פונקציה רציפה **בקטע פתוח** $[a,b)$ (a,b). גם $[a,\infty)$ וכד'.

א. $f'(x)=0$

ב. נק' שבהן $f(x)$ לא גזירה.

ג. קצוות: $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$.

__רציפות הפונקציה הגבולית:__

משפט: תהי $f_n(x)$ סדרת פונקציות המוגדרות בקטע I ומתכנסות בו במ"ש. אם בנקודה x_0 בקטע, הפונקציות $f_n(x)$ רציפות אז גם הפונקציה הגבולית $f(x)$ רציפה ב x_0.

__הוכחה:__ יהי $\varepsilon>0$

$f_n(x)$ מתכנסת במ"ש ל $f(x)$ בקטע I. לכן קיים n_0 כך שלכל $n\ge n_0$ ולכל $x\in I$. מתקיים $\left|f_n(x)-f(x)\right|<\varepsilon$ וזה נכון גם ל x_0. כלומר $\left|f_n(x_0)-f(x_0)\right|<\varepsilon$. כמו כן נתון כי $f_n(x)$ רציפות ב x_0. כלומר, עבור אותו ε שבחרנו קיים $\delta>0$ כך שלכל x : $\left|x-x_0\right|<\delta$ מתקיים: $\left|f_n(x)-f_n(x_0)\right|<\varepsilon$. מאי שיוויון המשולש מתקיים שלכל x $\left|x-x_0\right|<\delta$ ולכל $n\ge n_0$.

$$\left|f(x)-f(x_0)\right|=\left|f(x)-f_n(x)+f_n(x)-f_n(x_0)+f_n(x_0)-f(x_0)\right|\le$$
$$\le\left|f(x)-f_n(x)\right|+\left|f_n(x)-f_n(x_0)\right|+\left|f_n(x_0)-f(x_0)\right|<3\varepsilon$$

ולכן $f(x)$ רציפה.

הערה:

1. ההפך לא נכון! אם $f_n(x)$ רציפות ומתכנסות בקטע לפונקציה רציפה $f(x)$ זה לא אומר שההתכנסות במ"ש.
2. אם $f(x)$ לא רציפה בקטע, אז אין התכנסות במ"ש.

<u>אינטגרציה:</u>

משפט: תהי $f_n(x)$ סדרת פונקציות רציפות (אינטגרביליות) בקטע $[a,b]$, מתכנסת במ"ש בקטע ל $f(x)$ אזי $f(x)$ אינטגרבילית בקטע.

<u>הוכחה:</u> $f_n(x)$ רציפות, מתכנסות ב $[a,b]$ במ"ש ל $f(x)$. ולכן $f(x)$ רציפה ולכן אינטגרבילית.

יהי $\varepsilon>0$, $f_n(x)$ מתכנסות במ"ש ל $f(x)$ בקטע ולכן קיים n_0 כך שלכל $n\ge n_0$ ולכל $t\in[a,b]$ מתקיים $\left|f_n(t)-f(t)\right|<\varepsilon$

$$\left|\int_a^x f_n(t)\,dt-\int_a^x f(t)\,dt\right|=\left|\int_a^x\left[f_n(t)-f(t)\right]dt\right|\le\int_a^x\left|f_n(t)-f(t)\right|dt\le(x-a)\varepsilon\le(b-a)\varepsilon$$

משפט: תהי $f_n(x)$ סדרה של פונקציות אינטגרביליות בקטע $[a,b]$ אז ניתן לעשות גזירה איבר איבר ואינטגרציה איבר איבר אם: (לא צריך להוכיח).

<u>גזירה איבר איבר:</u>

משפט: תהי $f_n(x)$ סדרה של פונקציות בעלות נגזרות $f_n'(x)$ בקטע I אם:

א. הסדרה $f_n(x)$ מתכנסת בקטע I ל $f(x)$.

ב. סדרת הנגזרות $f_n'(x)$ מתכנסות במ"ש בקטע אזי:

1. $f_n(x)$ מתכנסת במ"ש בקטע.
2. $f(x)$ גזירה בקטע.
3. $f_n'(x)\to f'(x)$.

<u>טורי פונקציות:</u>

מתבוננים ב $f_n(x)$ סדרת הסכומים החלקיים של $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$.

<u>קריטריון קושי:</u>

הטור $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ מתכנס במ"ש בקטע I אם לכל $\varepsilon>0$ קיים n_0 כך שלכל $n\ge n_0$ ולכל p טבעי ולכל $x\in I$ מתקיים ש $\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k(x)\right|<\varepsilon$.

<u>קריטריון ויירשטראס להתכנסות במ"ש של טורי פונקציות:</u>

יהיו $\sum_{k=1}^{\infty} f_k\left(x\right)$ טור של פונקציות מוגדרות בקטע I אם קיים טור מספרים $\sum_{k=1}^{\infty} M_k$ חיובי ומתכנס, כך שלכל $x \in I$ מתקיים ש $M_k \geq \left|f_k\left(x\right)\right|$. אזי הטורים $\sum_{k=1}^{\infty} f_k\left(x\right)$ ו $\sum_{k=1}^{\infty}\left|f_k\left(x\right)\right|$ מתכנסים במ"ש ב I.

<u>הוכחה:</u> נתון $\sum_{k=1}^{\infty} M_k$ מתכנס, לכן לפי קושי $\sum_{n+1}^{n+p} M_k < \varepsilon$. ונתון $M_k \geq \left|f_k\left(x\right)\right|$ אז:

$$\left|\sum_{n+1}^{n+p} f_k\left(x\right)\right| \leq \sum_{n+1}^{n+p}\left|f_k\left(x\right)\right| \leq \sum_{n+1}^{n+p} M_k < \varepsilon$$

ולכן לפי קריטריון קושי הטור מתכנס.

טורי חזקות

טור פונקציות מהצורה: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ או $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\left(x-x_0\right)^n$

משפט האבל: אם טור חזקות $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ מתכנס ב $x=\alpha$ אז הוא מתכנס בהחלט לכל x בקטע $\left(-|\alpha|,|\alpha|\right)$.

הוכחה: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \alpha^n$ מתכנס לכן $a_n \alpha^n \to 0$.

אז קיים M כך שלכל n טבעי $a_n \alpha^n \leq M$.

$$\left|a_n x^n\right|=\left|a_n \frac{x^n}{\alpha^n} \alpha^n\right|=\left|a_n \alpha^n\right|\left|\frac{x^n}{\alpha^n}\right| \leq M\left|\frac{x}{\alpha}\right|^n$$

לכל $|x|<|\alpha|$ $\left(\frac{|x|}{|\alpha|}<1\right)$ הטור $\sum\left|\frac{x}{\alpha}\right|^n$ מתכנס, זהו טור הנדסי עם מנה <1.

וממבחן ההשוואה גם הטור $\sum\left|a_n x^n\right|$ מתכנס, כלומר $\sum a_n x^n$ מתכנס בהחלט.

מסקנה: תחום ההתכנסות של טור חזקות הוא תמיד סימטרי, לכל טור חזקות קיים מספר ממשי $R \geq 0$ שנקרא רדיוס ההתכנסות של הטור. והטור מתכנס לכל $|x| \leq R$ ומתבדר לכל $|x|>R$.

אם $R=0$ אז הטור מתכנס רק ב $x=0$.

אם $R=\infty$ אז הטור מתכנס לכל x.

משפט:

יהי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ טור חזקות עם תחום התכנסות $R>0$ אזי הטור $S(x)$ הוא פונקציה רציפה ב $(-R, R)$.

$S_n(x)$ הן פונקציות רציפות.

הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ או הסדרה $S_n(x)$ מתכנסות במ"ש בכל קטע סגור המוכל ב $(-R, R)$. לכל x_0 בקטע $(-R, R)$ קיים מספר $x_0<r<R$ כך ש $x_0 \in[-r, r]$ והטור $S_n(x)$ מתכנס במ"ש בקטע $(-R, R)$ לכן $f(x)$ רציפה ב x_0. $\lim_{n \to \infty} S_n(x)=S(x)$.

משפט:

אם טור החזקות $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ מהמשפט הקודם מתכנס בנקודת הקצה $x=R$ (או $x=-R$) אז $S(x)$ רציפה משמאל (מימין) ב $x=R$.

משפט (קושי אדמר): רדיוס ההתכנסות של הטור $\sum_0^\infty a_n x^n$ הוא

$R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$.

הוכחה: ממשפט השורש להתכנסות טור חיובי הטור $\sum_0^\infty |a_n x^n|$ מתכנס עבור

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} < 1$$
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}\,|x| < 1$$
$$|x| < \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

ומתבדר עבור: $|x| > \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$

<u>**הערה:**</u> אם הגבול $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ לא קיים ניתן להוכיח ש $R = \frac{1}{\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}}$.

משפט: דלאמבר: $R = \lim \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$

משפט: יהי $R > 0$, רדיוס ההתכנסות של הטור $\sum_0^\infty a_n x^n$ לכל $0 < r < R$ טור החזקות מתכנס במ"ש בקטע $[-r, r]$.

<u>**הוכחה:**</u> לכל $|x| \le r$ מתקיים ש $|a_n r^n| \ge |a_n x^n|$. $\sum |a_n r^n|$ הוא טור מספרים מתכנס, לכן לפי מבחן M של ווירשטראס $\sum_0^\infty a_n x^n$ מתכנס במ"ש לכל $|x| < r$.

<u>תוספות:</u>

א. טור חזקות מתכנס במ"ש לכל קטע סגור בתחום התכנסותו.

ב. אם הטור מתכנס ב $x = R$ אז הוא מתכנס במ"ש בקטעים: $[0, R]$, $[\alpha, R]$ $\alpha \in (-R, R)$

ג. טור חזקות שמתבדר ב $x = R$ מתכנס לא במ"ש בקטע (α, R).

<u>רציפות הפונקציה הגבולית:</u>

משפט: יהי $\sum_{1}^{\infty} a_n x^n$ טור חזקות עם רדיוס התכנסות $R > 0$ אזי סכום הטור $S(x)$ הוא פונקציה רציפה ב $(-R,R)$.

<u>הוכחה:</u> תהי $x_0 \in (-R,R)$ אז קיים r כך ש $x_0 < r < R$ טור החזקות מתכנס במ"ש בקטע $(-r,r)$ ולכן פונקציית הגבול רציפה ב x_0 השייך ל$[-r,r]$.

<u>אינטגרציה איבר איבר:</u>

משפט: יהי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ טור חזקות עם רדיוס התכנסות $R>0$.

א. הטור $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n x^{n+1}}{n+1}$ המתקבל מאינטגרציה איבר איבר של הטור המקורי הוא בעל אותו רדיוס התכנסות כמו הטור המקורי.

ב. אם נסמן $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ אזי לכל x כך ש $|x|<R$: $\int_a^x S(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n x^{n+1}}{n+1}$

ג. אם הטור הנתון מתכנס גם ב R וגם ב $x=-R$ אז טור האינטגרלים מתכנס גם כן בנקודה זו והשיוויון הנ"ל מתקיים גם בנקודה זו.

<u>הוכחה:</u>

א. רדיוס ההתכנסות $\overline{R}$ של $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n x^{n+1}}{n+1}$ כאשר נתון שרדיוס ההתכנסות הוא $R>0$ של $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

$$\overline{R} = \frac{1}{\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\frac{a_n}{n+1}}} = \frac{1}{\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n}} = R$$

ב. הטור הנתון מתכנס במ"ש בכל קטע סגור המוכל בתחום ההתכנסות לכו מהמשפט על א"אא בטורי פונקציות גם פונקצית הגבול שווה לאינטגרל של הפונקציה של הטור המקורי.

ג. כמו ב.

לסיכום: $\int_0^x \sum a_n t^n = \sum \int_0^x a_n t^n$

<u>גזירה איבר איבר:</u>

משפט: יהי $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ טור חזקות עם רדיוס התכנסות $R>0$ ויהי $S(x)$ סכומו אזי:

א. הטור $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ המתקבל מגזירה איבר איבר של הטור המקורי הוא בעל אותו רדיוס התכנסות של הטור המקורי.

ב. לכל $|x|<R$ מתקיים $\sum n a_n x^{n-1} = S'(x)$.(2)

ג. אם טור הנגזרות מתכנס ב $x=R$ אז גם הטור המקורי מתכנס ב $x=R$ והנוסחא (2) נשמרת גם בנקודות אלו.

לסיכום: $\left(\sum a_n t^n\right)' = \sum \left(a_n t^n\right)'$

משפט: אם $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ הוא טור חזקות עם רדיוס התכנסות $R>0$ ו $S(x)$ הוא סכום הטור, אזי הפונקציה $S(x)$ גזירה מכל סדר בכל קטע השייך לתחום ההתכנסות $(-R,R)$ ולכל k טבעי מתקיים:

$$S(x)=\sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k-1)a_n x^{n-k}$$

משפט: תהי $f(x)$ גזירה אינסוף פעמים בקטע $(-R,R)$ את $f(x)$ ניתן לפתח לטור חזקות אם ורק אם

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x)=0$$

$$R_n=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

לכל x בתחום ההתכנסות.