הפתק הסגול
www.technion.co.il

שדות אלקטרומגנטיים

044140

פתרונות לתרגילים מחוברת התרגולים

תוכן עניינים

יסודות האנליזה הוקטורית

יסודות האנליזה הוקטורית - פתרון לתרגיל 1

סעיף א

ניקח אלמנט אורך $d\vec{\ell}$:

$$d\vec{\ell}=dr\vec{1}_r+rd\theta\vec{1}_\theta+r\sin\theta d\varphi\vec{1}_\varphi$$

הדיפרנציאל השלם :

$$d\phi=\frac{\partial\phi}{\partial r}dr+\frac{\partial\phi}{\partial\theta}d\theta+\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}d\varphi$$

ולכן הגרדיאנט הוא

$$\vec{\nabla}\phi=\frac{\partial\phi}{\partial r}\vec{1}_r+\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\vec{1}_\theta+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}\vec{1}_\varphi$$

סעיף ב

נחשב ע"פ הפיתוח שקיבלנו :

$$\vec{\nabla}\phi=\frac{\partial\phi}{\partial r}\vec{1}_r+\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\vec{1}_\theta+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}\vec{1}_\varphi=\left(-\frac{1}{r^2}+\sin\theta\cos\theta\right)\vec{1}_r+\frac{1}{r}r\cos\theta\cos\varphi\vec{1}_\theta+\left(-\frac{1}{r\sin\theta}r\sin\theta\sin\varphi\right)\vec{1}_\varphi$$

$$=\left(-\frac{1}{r^2}+\sin\theta\cos\theta\right)\vec{1}_r+\cos\theta\cos\varphi\vec{1}_\theta-\sin\varphi\vec{1}_\varphi$$

יסודות האנליזה הוקטורית - פתרון לתרגיל 2

סעיף א

אם השדה $\vec{A}=a\vec{1}_x+b\vec{1}_y+c\vec{1}_z$ כאשר a,b,c קבועים, אזי

1. $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}\triangleq\left(\frac{d}{dx},\frac{d}{dy},\frac{d}{dz}\right)\cdot(a,b,c)=0$
2. $\vec{\nabla}\times\vec{A}\triangleq\begin{vmatrix}\vec{1}_x & \vec{1}_y & \vec{1}_z\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ a & b & c\end{vmatrix}=\vec{0}$
3. השדה $\vec{A}$ קבוע כי כל שלושת הרכיבים שלו קבועים.
   עוד ניתן לראות זאת מכיוון ש $\vec{\nabla}A_x=\vec{\nabla}A_y=\vec{\nabla}A_z=\vec{0}$, ולכן השדה לא משתנה במרחב.

סעיף ב

יהי השדה $\vec{A}=a\vec{1}_\rho+b\vec{1}_\varphi+c\vec{1}_z$ כאשר a,b,c קבועים. אזי

1. $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}\triangleq\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho},\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\varphi},\frac{\partial}{\partial z}\right)(\rho a,b,c)=\frac{a}{\rho}$
2. $\vec{\nabla}\times\vec{A}\triangleq\frac{1}{\rho}\begin{vmatrix}\vec{1}_\rho & \rho\vec{1}_\varphi & \vec{1}_z\\ \frac{\partial}{\partial\rho} & \frac{\partial}{\partial\varphi} & \frac{\partial}{\partial z}\\ a & \rho b & c\end{vmatrix}=\frac{b}{\rho}\vec{1}_z$

$$\vec{\nabla}A_\rho=\left(\frac{\partial}{\partial\rho}A_\rho,\frac{\partial}{\partial\phi}A_\rho,\frac{\partial}{\partial z}A_\rho\right)=0$$

3. בדומה לסעיף א', מכיוון שכל רכיב של $\vec{A}$ קבוע: $\vec{\nabla}A_\phi=\left(\frac{\partial}{\partial\rho}A_\phi,\frac{\partial}{\partial\phi}A_\phi,\frac{\partial}{\partial z}A_\phi\right)=0$, אזי $\vec{A}$ קבוע

$$\vec{\nabla}A_z=\left(\frac{\partial}{\partial\rho}A_z,\frac{\partial}{\partial\phi}A_z,\frac{\partial}{\partial z}A_z\right)=0$$

במרחב.

יסודות האנליזה הוקטורית - פתרון לתרגיל 3

<u>סעיף א</u>

יהיה השדה $\vec{F}=\frac{1}{r^2}\vec{1}_r$. אזי, כאשר V הנפח הכלוא במעטפת S, נקבל:

נוסחת הדיברגנט:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{F}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2F_r\right)=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(1)=0$$

אך $\vec{F}$ לא רציפה ב $r=0$, לכן הנוסחא שלעיל לא נכונה, ולכן נשתמש בהגדרת הדיברגנט:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{F}=\lim_{\Delta V\to 0}\frac{1}{\Delta V}\oint_S\vec{F}d\vec{a}=4\pi\delta(r)$$

<u>סעיף ב</u>

$$\oiint_S\vec{F}d\vec{a}=\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\left(\frac{1}{r^2},0,0\right)\cdot\vec{1}_r\,rd\theta r\sin\theta d\varphi=\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\sin\theta d\theta d\varphi=[\varphi]_0^{2\pi}[-\cos\theta]_0^{\pi}=4\pi$$

<u>סעיף ג</u>

מכיוון ש

$$\iiint_V\vec{\nabla}\cdot\vec{F}dv=\iiint_V4\pi\delta(r)dv=4\pi$$

אזי הדגמנו כאן את קיום משפט גאוס.

יסודות האנליזה הוקטורית - פתרון לתרגיל 4

משפט סטוקס אומר כי

$$\oint_C\vec{F}d\vec{\ell}=\iint_A\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right)d\vec{a}$$

כאשר C מסלול סגור התוחם את השטח A.

עבור

$$\begin{aligned}\vec{F}&=-y\vec{1}_x+x\vec{1}_y=-\rho\sin\varphi\left(\cos\varphi\vec{1}_\rho-\sin\varphi\vec{1}_\varphi\right)+\rho\cos\varphi\left(\sin\varphi\vec{1}_\rho+\cos\varphi\vec{1}_\varphi\right)\\&=\left(\rho\cos\varphi\sin\varphi-\rho\sin\varphi\cos\varphi\right)\vec{1}_r+\left(\rho\sin^2\varphi+\rho\cos^2\varphi\right)\vec{1}_\varphi\\&=\rho\vec{1}_\varphi\end{aligned}$$

והמסלול

$$\begin{cases}x=R\cos\varphi\\y=R\sin\varphi\\z=0\end{cases},\qquad 0<\varphi<2\pi$$

נחשב:

$$\oint_C\vec{F}d\vec{\ell}=\oint_C\left(\rho\vec{1}_\varphi\right)\cdot\left(\rho d\varphi\vec{1}_\varphi\right)\Big|_{\rho=R}=\int_{\varphi=0}^{2\pi}R^2d\varphi=2\pi R^2$$

ומצד שני:

$$\iint_A \left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right)d\vec{a} = \iint_A \frac{1}{\rho}\begin{vmatrix} \vec{1}_\rho & \rho\vec{1}_\varphi & \vec{1}_z \\ \frac{\partial}{\partial\rho} & \frac{\partial}{\partial\varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \rho^2 & 0 \end{vmatrix} d\vec{a} = \iint_A 2\vec{1}_z\cdot\left(\rho d\varphi d\rho\vec{1}_z\right) = \int_{\rho=0}^{R}\int_{\varphi=0}^{2\pi} 2\rho d\varphi d\rho = 2\pi R^2$$

ולכן מ.ש.ל.

יסודות האנליזה הוקטורית - פתרון לתרגיל 5

<u>סעיף א</u>

יהי $a,b\in\mathbb{C}$, $\vec{A}=\left(ar^2+b\ln r\right)\vec{1}_z$. נחשב את $\nabla^2\vec{A}$, ע"פ הגדרת הלפלסיאן של פונקציה וקטורית:

$$\nabla^2\vec{A} \triangleq \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}\right)-\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{A} = \vec{\nabla}\left(\frac{\partial}{\partial z}\left(ar^2+b\ln r\right)\right)-\vec{\nabla}\times\frac{1}{r}\begin{vmatrix} \vec{1}_r & r\vec{1}_\varphi & \vec{1}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & ar^2+b\ln r \end{vmatrix}$$

$$= -\vec{\nabla}\times\left(-\frac{\partial}{\partial r}\left(ar^2+b\ln r\right)\right)\vec{1}_\varphi = \vec{\nabla}\times\left(2ar+\frac{b}{r}\vec{1}_\varphi\right) = \frac{1}{r}\begin{vmatrix} \vec{1}_r & r\vec{1}_\varphi & \vec{1}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 2ar^2+b & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{r}\left(4ar\right)\vec{1}_z = 4a\vec{1}_z$$

<u>סעיף ב</u>

יהי $a,b\in\mathbb{C}$, $\vec{A}=\left(ar^2+b\ln r\right)\vec{1}_r$. כעת:

$$\nabla^2\vec{A} \triangleq \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}\right)-\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{A} = \vec{\nabla}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(ar^3+br\ln r\right)\right)-\vec{\nabla}\times\frac{1}{r}\begin{vmatrix} \vec{1}_r & r\vec{1}_\varphi & \vec{1}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ ar^2+b\ln r & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \vec{\nabla}\left(3ar+\frac{b\ln r}{r}+\frac{b}{r}\right)-\vec{\nabla}\times\left(\vec{0}\right) = \left(3a+\frac{b-b\ln r}{r^2}-\frac{b}{r^2}\right)\vec{1}_r = \left(3a-\frac{b\ln r}{r^2}\right)\vec{1}_r$$

יסודות האנליזה הוקטורית - פתרון לתרגיל 6

השטף של השדה

$$\vec{S}=\frac{\sin^2\theta}{r^2}\vec{1}_r$$

דרך מעטפת כדורית ברדיוס R סביב ראשית הצירים הוא:

$$\iint_M \vec{S}\cdot d\vec{a} = \int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\left(\frac{\sin^2\theta}{r^2}\vec{1}_r\right)\cdot\left(rd\theta r\sin\theta d\varphi\vec{1}_r\right) = \int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\sin^3\theta d\theta d\varphi = 2\pi\int_{\theta=0}^{\pi}\sin\theta\left(1-\cos^2\theta\right)d\theta$$

$$= 2\pi\int_0^\pi \sin\theta-\sin\theta\cos^2\theta d\theta = 2\pi\left[-\cos\theta+\frac{1}{3}\cos^3\theta\right]_0^\pi = 2\pi\left(1-\frac{1}{3}+1-\frac{1}{3}\right)=\frac{8\pi}{3}$$

יסודות האנליזה הוקטורית - פתרון לתרגיל 7

בקואורדינאטות קרטזיות:

$$\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right)=\vec{\nabla}\left(\begin{vmatrix}\vec{1}_x & \vec{1}_y & \vec{1}_z\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ A_x & A_y & A_z\end{vmatrix}\right)=\vec{\nabla}\left(\vec{1}_x\left(\frac{\partial}{\partial y}A_z-\frac{\partial}{\partial z}A_y\right)-\vec{1}_y\left(\frac{\partial}{\partial x}A_z-\frac{\partial}{\partial z}A_x\right)+\vec{1}_z\left(\frac{\partial}{\partial x}A_y-\frac{\partial}{\partial y}A_x\right)\right)$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y}A_z-\frac{\partial}{\partial z}A_y\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}A_z-\frac{\partial}{\partial z}A_x\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial}{\partial x}A_y-\frac{\partial}{\partial y}A_x\right)=$$

$$=\cancel{\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}A_z}-\cancel{\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial z}A_y}-\cancel{\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}A_z}+\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial z}A_x+\cancel{\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial x}A_y}-\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial y}A_x=0$$

פתרונות פשוטים של משוואות מקסוול ועקרון הסופרפוזיציה

פתרונות פשוטים של משוואות מקסוול ועקרון הסופרפוזיציה - פתרון לתרגיל 1

<u>סעיף א</u>

יהי $\vec{E}=A\frac{e^{-br}}{r^2}\vec{1}_r$. חוק גאוס, בצורתו הדיפרנציאלית, הוא:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{D}=\rho$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=\lim_{\Delta V\to 0}\frac{1}{\Delta V}\oint_S\vec{E}d\vec{a}=4\pi\delta\left(r\right)$$

כלומר, אם היינו עוסקים בשדה $\vec{E}=\frac{A}{r^2}\vec{1}_r$, היינו מקבלים $\rho=4\pi A\delta\left(r\right)$

ולכן, כאשר $\vec{E}=A\frac{e^{-br}}{r^2}\vec{1}_r=e^{-br}\cdot\frac{A}{r^2}\vec{1}_r$ וקיימת הזהות

$$\vec{\nabla}\left(V\vec{A}\right)=\vec{A}\left(\vec{\nabla}V\right)+V\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}\right)$$

נקבל את צפיפות המטען המרחבית כך:

$$\rho=\vec{\nabla}\cdot\left(\varepsilon_0\vec{E}\right)=\varepsilon_0\vec{E}\left(\vec{\nabla}\left(e^{-br}\right)\right)+\varepsilon_0e^{-br}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}\right)=\varepsilon_0\frac{A}{r^2}\vec{1}_r\cdot\left(-be^{-br}\vec{1}_r\right)+\varepsilon_0e^{-br}\left(\vec{\nabla}\cdot\left(\frac{A}{r^2}\vec{1}_r\right)\right)=$$

$$=-\varepsilon_0\frac{Abe^{-br}}{r^2}+\varepsilon_0e^{-br}\left(4\pi A\delta\left(r\right)\right)=-\varepsilon_0\frac{Abe^{-br}}{r^2}+4\pi\varepsilon_0e^{-br}A\delta\left(r\right)=-\varepsilon_0\frac{Abe^{-br}}{r^2}+4\pi\varepsilon_0A\delta\left(r\right)$$

<u>סעיף ב</u>

אם $b<0$, אזי השדה מתבדר ולכן יש ∞ מטען במרחב.
אחרת, סך-כל המטען במרחב יתקבל ע"י אינטגרציה של ρ על המרחב:

$$q=\int_{r=0}^{\infty}\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\left(-\varepsilon_0A\frac{be^{-br}}{r^2}+4\pi\varepsilon_0A\delta\left(r\right)\right)rd\theta r\sin\theta d\varphi dr=-\varepsilon_0Ab\int_{r=0}^{\infty}\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi}e^{-br}d\theta\sin\theta d\varphi dr+4\pi\varepsilon_0A$$

$$=4\pi\varepsilon_0A\left[e^{-br}\right]_0^{\infty}=-4\pi\varepsilon_0A+4\pi\varepsilon_0A=0$$

כלומר, גודל המטען הנקודתי הנמצא בראשית הוא בדיוק אותו גודל מטען שמרוח על פני כל המרחב שסביבו.

פתרונות פשוטים של משוואות מקסוול ועקרון הסופרפוזיציה - פתרון לתרגיל 2

נתונה צפיפות מטען במרחב:

$$\rho=\begin{cases}A\left(R-r\right), & r<R\\ 0, & r>R\end{cases}$$

ונתונה כמות המטען במרחב: Q.

<u>סעיף א</u>

יש לבטא את הקבוע A. נתחיל בחישוב המטען הכולל במרחב:

$$Q=\iiint_{\mathbb{R}^3}\rho dv=4\pi A\int_{r=0}^{R}\left(R-r\right)r^2dr=4\pi A\int_{r=0}^{R}\left(Rr^2-r^3\right)dr=4\pi A\left[R\frac{r^3}{3}-\frac{r^4}{4}\right]_{r=0}^{R}$$

$$=4\pi A\left[\frac{R^3}{3}-\frac{R^4}{4}\right]=\frac{1}{3}\pi AR^4$$

ולכן $A=\dfrac{3Q}{\pi R^4}$

<u>סעיף ב</u>

מכיוון שהבעיה סימטרית ביחס להזזה ב θ וב φ, כלומר $\dfrac{d}{d\theta}=\dfrac{d}{d\varphi}=0$, נסיק ש $\vec{E}=E\left(r\right)\vec{1}_r$.

ניצור קליפה גאוסית כדורית A סביב הראשית, ברדיוס $r<R$, ונכתוב את חוק גאוס עבור הקליפה:

$$\oiint_A\varepsilon_0\vec{E}d\vec{a}=\iiint_V\vec{\nabla}\cdot\vec{E}dv=\int_{r'=0}^{r}\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi}A\left(R-r'\right)r'^2d\theta\sin\theta d\varphi dr'=4\pi A\int_{r'=0}^{r}\left(R-r'\right)r'^2dr'$$

$$=4\pi A\int_{r'=0}^{r}\left(Rr^2-r^3\right)dr'=4\pi A\left[R\frac{r'^3}{3}-\frac{r'^4}{4}\right]_0^r=4\pi A\left(R\frac{r^3}{3}-\frac{r^4}{4}\right)=\frac{Q}{R^4}\left(4Rr^3-3r^4\right)$$

ומצד שני,

$$\oiint_A\varepsilon_0\vec{E}d\vec{a}=4\pi\varepsilon_0r^2\vec{E}$$

ולכן נקבל

$$\vec{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R^4}\left(4Rr-3r^2\right)\vec{1}_r$$

עבור התחום $\rho>R$, נקבל ש $\oiint_A\varepsilon_0\vec{E}d\vec{a}=4\pi\varepsilon_0r^2\vec{E}=Q$ ולכן $\vec{E}=\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0r^2}\vec{1}_r$.

לסיכום:

$$\vec{E}=\begin{cases}\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{4Rr-3r^2}{R^4}\vec{1}_r & ,r<R\\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0r^2}\vec{1}_r & ,r>R\end{cases}$$

פתרונות פשוטים של משוואות מקסוול ועקרון הסופרפוזיציה - פתרון לתרגיל 3

עבור פילוג המטען

$$\rho=\begin{cases}\rho_0, & r<R\\ 0, & r>R\end{cases}$$

נשתמש בחוק גאוס ונעזר בסימטריה הכדורית של הבעיה, כלומר $\dfrac{d}{d\theta}=\dfrac{d}{d\varphi}=0$. עבור $r<R$:

$$\oiint_A\varepsilon_0\vec{E}d\vec{a}=\iiint_V\rho dv\ \Rightarrow\ \varepsilon_0\vec{E}\oiint_A d\vec{a}=\rho_0\iiint_V dv\ \Rightarrow\ \vec{E}=\frac{\rho_0\frac{4}{3}\pi r^3}{4\varepsilon_0\pi r^2}=\frac{\rho_0}{3\varepsilon_0}r$$

ועבור $r>R$, אנו כולאים מטען כולל של $\frac{4}{3}\pi R^3\rho_0$, ולכן, בגלל הסימטריה הכדורית של הבעיה, נוכל לומר ישירות כי

$$\vec{E}=\frac{4}{3}\pi R^3\rho_0\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}=\frac{R^3\rho_0}{3\varepsilon_0 r^2}$$

ולכן, לסיכום

$$\vec{E}=\begin{cases}\dfrac{\rho_0}{3\varepsilon_0}r, & r<R\\ \dfrac{R^3\rho_0}{3\varepsilon_0 r^2}, & r>R\end{cases}$$

כמובן שניתן לראות שהשדה החשמלי רציף במעבר ב $r=R$, וזאת מכיוון שאין הצטברות מטען משטחית.

פתרונות פשוטים של משוואות מקסוול ועקרון הסופרפוזיציה - פתרון לתרגיל 4

עבור פילוג המטען

$$\rho(r)=\begin{cases}\rho_0\left(1-k\left(\dfrac{r}{a}\right)^2\right), & 0<r<a\\ 0, & r>a\end{cases}$$

נשתמש בחוק גאוס ונעזר בסימטריה הכדורית של הבעיה, כלומר נסיק שהשדה החשמלי תלוי רק ב r . עבור $r<a$:

$$\oiint_A \varepsilon_0\vec{E}d\vec{a}=\iiint_V \rho dv \;\Rightarrow\; \varepsilon_0\vec{E}\oiint_A d\vec{a}=\rho_0\int_{\rho=0}^{r}\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\left(1-k\left(\frac{\rho}{a}\right)^2\right)\rho^2\sin\theta d\rho d\theta d\varphi$$

$$\Rightarrow\; \vec{E}=\frac{\rho_0\int_{\rho=0}^{r}\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\left(1-k\left(\frac{\rho}{a}\right)^2\right)\rho^2\sin\theta d\rho d\theta d\varphi}{\varepsilon_0 4\pi r^2}=\frac{\rho_0 4\pi\int_{\rho=0}^{r}\left(\rho^2-k\frac{\rho^4}{a^2}\right)d\rho}{\varepsilon_0 4\pi r^2}$$

$$\Rightarrow\; \vec{E}=\frac{\rho_0\left[\frac{\rho^3}{3}-k\frac{\rho^5}{5a^2}\right]_0^r}{\varepsilon_0 r^2}=\frac{\rho_0}{3\varepsilon_0}r-\frac{\rho_0 k}{5a^2\varepsilon_0}r^3$$

ועבור $r>a$:

$$\oiint_A \varepsilon_0\vec{E}d\vec{a}=\iiint_V \rho dv \;\Rightarrow\; \varepsilon_0\vec{E}\oiint_A d\vec{a}=\rho_0\int_{\rho=0}^{a}\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\left(1-k\left(\frac{\rho}{a}\right)^2\right)\rho^2\sin\theta d\rho d\theta d\varphi$$

$$\Rightarrow\; \vec{E}=\frac{\rho_0\int_{\rho=0}^{a}\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\left(1-k\left(\frac{\rho}{a}\right)^2\right)\rho^2\sin\theta d\rho d\theta d\varphi}{\varepsilon_0 4\pi r^2}=\frac{\rho_0 4\pi\int_{\rho=0}^{a}\left(\rho^2-k\frac{\rho^4}{a^2}\right)d\rho}{\varepsilon_0 4\pi r^2}$$

$$\Rightarrow\; \vec{E}=\frac{\rho_0\left[\frac{\rho^3}{3}-k\frac{\rho^5}{5a^2}\right]_0^a}{\varepsilon_0 r^2}=\frac{\rho_0 a^3}{3\varepsilon_0 r^2}-\frac{\rho_0 k a^3}{5\varepsilon_0 r^2}=\frac{\rho_0 a^3}{\varepsilon_0 r^2}\left(\frac{1}{3}-\frac{k}{5}\right)$$

<u>סעיף ב</u>

נדרוש:

$$\vec{E}=\frac{\rho_0 a^3}{\varepsilon_0 r^2}\left(\frac{1}{3}-\frac{k}{5}\right)=0 \;\Rightarrow\; \frac{1}{3}=\frac{k}{5} \;\Rightarrow\; k=\frac{5}{3}$$

פתרונות פשוטים של משוואות מקסוול ועקרון הסופרפוזיציה - פתרון לתרגיל 5

יהי גליל מוליך ברדיוס ρ_0 , שבו עובר זרם לפי:

$$\vec{J}(\rho)=\begin{cases}J_0\dfrac{\rho}{\rho_0}\vec{1}_z, & \rho<\rho_0\\ 0, & \rho>\rho_0\end{cases}\qquad ,\qquad J_0\in\mathbb{R}$$

<u>סעיף א</u>

נוכל לחשב את הזרם הכולל העובר בגליל, ע"פ הגדרת צפיפות הזרם, כאשר A הוא חתך הגליל (בנקודה z כלשהיא – אין משמעות לנקודה זו בגלל שצפיפות הזרם אינה תלויה בקואורדינאטה z):

$$I=\iint_A \vec{J}d\vec{a}=\int_{r=0}^{\rho_0}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\left(J_0\frac{r}{\rho_0}\vec{I}_z\right)\cdot\left(rd\varphi dr\vec{1}_z\right)=2\pi\frac{J_0}{\rho_0}\int_{r=0}^{\rho_0}r^2dr=2\pi\frac{J_0}{\rho_0}\left[\frac{r^3}{3}\right]_{r=0}^{\rho_0}=\frac{2}{3}\pi J_0\rho_0^2$$

<u>סעיף ב</u>

נשתמש בחוק אמפר במצב יציב ($\frac{d}{dt}=0$):

$$\oint_C \vec{H}d\vec{\ell}=\iint_A \vec{J}d\vec{a}=I$$

משיקולי סימטריה ב φ וב z, נסיק ש $\vec{H}=H(\rho)\vec{1}_\varphi$ (ניתן גם לראות לפי כלל יד ימין).

עבור מסילה ברדיוס $\rho>\rho_0$, נקבל

$$\oint_C \vec{H}d\vec{\ell}=\vec{H}2\pi\rho=\frac{2}{3}\pi J_0\rho_0^2 \quad\Rightarrow\quad \vec{H}=\frac{J_0}{3}\frac{\rho_0^2}{\rho}\vec{1}_\varphi$$

עבור מסילה ברדיוס $\rho<\rho_0$, נקבל

$$\vec{H}2\pi\rho=\oint_C \vec{H}d\vec{\ell}=\iint_A \vec{J}d\vec{a}=\int_{r=0}^{\rho}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\left(J_0\frac{r}{\rho_0}\vec{I}_z\right)\cdot\left(rd\varphi dr\vec{1}_z\right)=2\pi\frac{J_0}{\rho_0}\int_{r=0}^{\rho}r^2dr=2\pi\frac{J_0}{\rho_0}\left[\frac{r^3}{3}\right]_{r=0}^{\rho}=\frac{2}{3}\pi\frac{J_0}{\rho_0}\rho^3$$

ולכן

$$\vec{H}=\frac{1}{3}\frac{J_0}{\rho_0}\rho^2\vec{1}_\varphi$$

לסיכום:

$$\vec{H}=\begin{cases}\frac{1}{3}\frac{J_0}{\rho_0}\rho^2\vec{1}_\varphi, & \rho<\rho_0\\ \frac{J_0}{3}\frac{\rho_0^2}{\rho}\vec{1}_\varphi, & \rho>\rho_0\end{cases}$$

פתרונות פשוטים של משוואות מקסוול ועקרון הסופרפוזיציה - פתרון לתרגיל 6

יהי גליל מוליך אינסופי ברדיוס ρ_0. בגליל זורם זרם היוצר שדה מגנטי בתוכו:

$$\vec{H}=\frac{1}{\rho}\left(\frac{4}{\pi^2}\sin\frac{\pi\rho}{2}-\frac{2\rho}{\pi}\cos\frac{\pi\rho}{2}\right)\vec{1}_\varphi$$

לכל $\rho\le\rho_0$.

<u>סעיף א</u>

צפיפות הזרם בגליל היא

$$\vec{J}=\vec{\nabla}\times\vec{H}=\frac{1}{\rho}\begin{vmatrix}\vec{1}_\rho & \vec{1}_\varphi & \vec{1}_z\\ \frac{\partial}{\partial\rho} & \frac{\partial}{\partial\varphi} & \frac{\partial}{\partial z}\\ 0 & \frac{4}{\pi^2}\sin\frac{\pi\rho}{2}-\frac{2\rho}{\pi}\cos\frac{\pi\rho}{2} & 0\end{vmatrix}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{4}{\pi^2}\sin\frac{\pi\rho}{2}-\frac{2\rho}{\pi}\cos\frac{\pi\rho}{2}\right)\vec{1}_z$$

$$=\frac{1}{\rho}\left(\frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi\rho}{2}-\frac{2}{\pi}\left[\cos\frac{\pi\rho}{2}-\frac{\pi}{2}\rho\sin\frac{\pi\rho}{2}\right]\right)\vec{1}_z=\sin\frac{\pi\rho}{2}\vec{1}_z$$

הזרם הכולל:

$$I=\iint_A \vec{J}d\vec{a}=\int_{\rho=0}^{\rho_0}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\left(\sin\frac{\pi\rho}{2}\vec{1}_z\right)\cdot\left(\rho d\varphi d\rho\vec{1}_z\right)=2\pi\int_{\rho=0}^{\rho_0}\rho\sin\frac{\pi\rho}{2}d\rho$$

$$=4\left(\frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi\rho_0}{2}-\rho_0\cos\frac{\pi\rho_0}{2}\right)\vec{1}_z$$

<u>סעיף ב</u>

השדה המגנטי עבור $\rho > \rho_0$ הוא, לפי חוק אמפר:

$$H\,2\pi\rho\vec{1}_\varphi = \vec{H}\oint_C d\vec{\ell} = \oint_C \vec{H}d\vec{\ell} = \iint_A \vec{J}d\vec{a} = \int_{r=0}^{\rho}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\left(\sin\frac{\pi\rho}{2}\vec{1}_z\right)\cdot\left(\rho d\varphi d\rho\vec{1}_z\right) = 2\pi\int_{r=0}^{\rho}\rho\sin\frac{\pi\rho}{2}d\rho$$

$$\vec{H} = \frac{1}{\rho}\left(\frac{4}{\pi^2}\sin\frac{\pi\rho_0}{2} - \frac{2}{\pi}\rho_0\cos\frac{\pi\rho_0}{2}\right)\vec{1}_\varphi$$

פתרונות פשוטים של משוואות מקסוול ועקרון הסופרפוזיציה - פתרון לתרגיל 7

נשתמש בחוק ביו-סבר:

$$\vec{H} = \frac{1}{4\pi}\oint_C I'\frac{d\vec{\ell}\times\left(\vec{r}-\vec{r}'\right)}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|^3}$$

$$\vec{H} = \frac{1}{4\pi}I_0\int_{\varphi=0}^{2\pi}\frac{ad\varphi\vec{1}_\varphi\times\left(\vec{r}-\vec{r}'\right)}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|^3} = \frac{1}{4\pi}I_0\int_{\varphi=0}^{2\pi}\frac{ad\varphi\vec{1}_\varphi\times\left(\vec{r}-\left(a\vec{1}_r+\varphi\vec{1}_\varphi\right)\right)}{\left|\vec{r}-a\vec{1}_r\right|^3}$$

$$= \frac{aI_0}{4\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\frac{d\varphi\vec{1}_\varphi\times\left(r\vec{1}_r+z\vec{1}_z-a\vec{1}_r\right)}{\left|r\vec{1}_r+z\vec{1}_z-a\vec{1}_r\right|^3} = \frac{aI_0}{4\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\frac{d\varphi\vec{1}_\varphi\times\left(\left(r-a\right)\vec{1}_r+z\vec{1}_z\right)}{\left|\left(r-a\right)\vec{1}_r+z\vec{1}_z\right|^3}$$

$$= \frac{aI_0}{4\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\begin{vmatrix}\vec{1}_r & \vec{1}_\varphi & \vec{1}_z\\ 0 & 1 & 0\\ r-a & 0 & z\end{vmatrix}\frac{d\varphi}{\left(\left(r-a\right)^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{aI_0}{4\pi}\left(\vec{1}_r z-\vec{1}_z\left(r-a\right)\right)\int_{\varphi=0}^{2\pi}\frac{d\varphi}{\left(\left(r-a\right)^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{aI_0}{4\pi}\left(\vec{1}_r z-\vec{1}_z\left(r-a\right)\right)\frac{2\pi}{\left(\left(r-a\right)^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

משוואות מקסול ברישום זמני

משוואות מקסול ברישום זמני - פתרון לתרגיל 1

סעיף א

נשתמש בחוק אמפר, האומר כי

$$\vec{\nabla}\times\vec{H}=\vec{J}$$

ונקבל

$$\begin{aligned}\vec{J}&=\vec{\nabla}\times\vec{H}=\vec{\nabla}\times\left(f(r)(\vec{a}\times\vec{r})\right)=f(r)\left(\vec{\nabla}\times(\vec{a}\times\vec{r})\right)+\vec{\nabla}f(r)\times(\vec{a}\times\vec{r})\\&=f(r)\left[\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{r}\right)\vec{a}-\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{a}\right)\vec{r}\right]+\left[\left(\vec{\nabla}f(r)\cdot\vec{r}\right)\vec{a}-\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{a}\right)\vec{r}\right]=f(r)\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{r}\right)\vec{a}+\left(\vec{\nabla}f(r)\cdot\vec{r}\right)\vec{a}\end{aligned}$$

סעיף ב

$$\begin{aligned}\vec{J}&=\vec{\nabla}\times\vec{H}=\vec{\nabla}\times\left((\vec{a}\cdot\vec{r})\left(\vec{b}\times\vec{r}\right)\right)=\vec{\nabla}(\vec{a}\cdot\vec{r})\times\left(\vec{b}\times\vec{r}\right)+(\vec{a}\cdot\vec{r})\vec{\nabla}\times\left(\vec{b}\times\vec{r}\right)=\\&=\vec{\nabla}(\vec{a}\cdot\vec{r})\times\left(\vec{b}\times\vec{r}\right)+(\vec{a}\cdot\vec{r})\vec{\nabla}\times\left(\vec{b}\times\vec{r}\right)=\left(\vec{\nabla}(\vec{a}\cdot\vec{r})\cdot\vec{r}\right)\vec{b}-\left(\vec{\nabla}(\vec{a}\cdot\vec{r})\cdot\vec{b}\right)\vec{r}+(\vec{a}\cdot\vec{r})\vec{\nabla}\times\left(\vec{b}\times\vec{r}\right)\\&=\left(\vec{\nabla}(\vec{a}\cdot\vec{r})\cdot\vec{r}\right)\vec{b}-\left(\vec{\nabla}(\vec{a}\cdot\vec{r})\cdot\vec{b}\right)\vec{r}+(\vec{a}\cdot\vec{r})\left[\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{r}\right)\vec{b}-\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{b}\right)\vec{r}\right]\\&=\left(\vec{\nabla}(\vec{a}\cdot\vec{r})\cdot\vec{r}\right)\vec{b}-\left(\vec{\nabla}(\vec{a}\cdot\vec{r})\cdot\vec{b}\right)\vec{r}+(\vec{a}\cdot\vec{r})\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{r}\right)\vec{b}\end{aligned}$$

משוואות מקסול ברישום זמני - פתרון לתרגיל 2

נבדוק האם $\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{H}=\vec{\nabla}\cdot\left(\frac{3(\vec{m}\cdot\vec{r})\vec{r}}{r^5}-\frac{\vec{m}}{r^3}\right)=\frac{3(\vec{m}\cdot\vec{r})\vec{\nabla}\cdot\vec{r}}{r^5}-\frac{\vec{\nabla}\cdot\vec{m}}{r^3}=\frac{3\vec{\nabla}\left((\vec{m}\cdot\vec{r})\vec{r}\right)}{r^5}=\frac{3\left(\vec{r}\vec{\nabla}(\vec{m}\cdot\vec{r})+(\vec{m}\cdot\vec{r})\vec{\nabla}\cdot\vec{r}\right)}{r^5}$$

משוואות מקסול ברישום זמני - פתרון לתרגיל 3

סעיף א

כן, כי אין סתירה למשוואות מקסוול.

סעיף ב

לא, משום שבאזור חסר מקורות, השדה המגנטי נוצר משינוי זמני בשדה החשמלי, כלומר חייב להיות שדה מגנטי במקרה שלנו.

משוואות מקסול ברישום זמני - פתרון לתרגיל 4

סעיף א

מחוק פרדי נקבל

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}=\begin{vmatrix}\vec{1}_x&\vec{1}_y&\vec{1}_z\\\frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\E_0\cos(\omega t-\beta z)&0&0\end{vmatrix}=\frac{\partial}{\partial z}E_0\cos(\omega t-\beta z)\vec{1}_y=\beta E_0\sin(\omega t-\beta z)\vec{1}_y=-\mu_0\frac{\partial}{\partial t}\vec{H}$$

ולכן השדה המגנטי הוא

$$\vec{H}=\frac{\beta E_0}{\mu_0\omega}\cos(\omega t-\beta z)\vec{1}_y$$

סעיף ב

$$\vec{\nabla}\times\vec{H}=\begin{vmatrix}\vec{1}_x & \vec{1}_y & \vec{1}_z\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ 0 & \frac{\beta E_0}{\mu_0\omega}\cos(\omega t-\beta z) & 0\end{vmatrix}=-\frac{\partial}{\partial z}\frac{\beta E_0}{\mu_0\omega}\cos(\omega t-\beta z)\vec{1}_x=-\frac{\beta^2 E_0}{\mu_0\omega}\sin(\omega t-\beta z)=\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}$$

$$\frac{\beta E_0}{\mu_0\omega}\sin(\omega t-\beta z)=\varepsilon_0\omega E_0\sin(\omega t-\beta z)$$

$$\frac{\beta^2}{\mu_0}=\varepsilon_0\omega^2$$

$$\beta=\frac{\omega}{c}$$

פוטנציאלים

פוטנציאלים - פתרון לתרגיל 1

<u>סעיף א</u>

נשתמש בחוק גאוס ברישום הדיפרנציאלי:

$$\rho=\varepsilon_0\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=\varepsilon_0\begin{cases}\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(-r^2\frac{1}{R}\cos\theta\right)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{1}{R}\sin^2\theta, & r<R\\ \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 2\frac{R^2}{r^3}\cos\theta\right)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{R^2}{r^3}\sin^2\theta, & r>R\end{cases}$$

$$=\varepsilon_0\begin{cases}-\frac{2}{Rr}\cos\theta+\frac{1}{Rr}2\cos\theta, & r<R\\ -2\frac{R^2}{r^4}\cos\theta+\frac{R^2}{r^4}2\cos\theta, & r>R\end{cases}=0$$

<u>סעיף ב</u>

נשתמש בתנאי השפה:

$$\vec{1}_n\cdot\left(\vec{D}_{out}-\vec{D}_{in}\right)=\rho_s$$

$$\rho_s=\vec{1}_r\cdot\varepsilon_0\left(\frac{R^2}{r^3}\left[\left(2\cos\theta\right)\vec{1}_r+\sin\theta\vec{1}_\theta\right]-\frac{1}{R}\left[-\cos\theta\vec{1}_r+\sin\theta\vec{1}_\theta\right]\right)\Bigg|_{r=R}=\frac{\varepsilon_0}{R}3\cos\theta$$

<u>סעיף ג</u>

$$Q_{in}=\iiint\limits_{inside}\rho dv=0$$

$$Q_{out}=\iiint\limits_{outside}\rho dv=0$$

$$Q_{surface}=\iint\limits_{surface}\rho_s da=\int\limits_{\theta=0}^{\pi}\int\limits_{\varphi=0}^{2\pi}\frac{\varepsilon_0}{R}3\cos\theta r\sin\theta d\theta d\varphi\Bigg|_{r=R}=3\pi\varepsilon_0\int\limits_{\theta=0}^{\pi}\sin 2\theta d\theta$$

$$=-\frac{3}{2}\pi\varepsilon_0\left[\cos 2\theta\right]_0^{\pi}=0$$

ולכן סך-כל המטען הוא 0.

פוטנציאלים - פתרון לתרגיל 2

<u>סעיף א</u>

נשתמש בתנאי השפה לקביעת מטען הכיסוי המשטחי:

$$\rho_s=\vec{1}_n\cdot\left(\vec{D}_{out}-\vec{D}_{in}\right)=\varepsilon_0\vec{1}_z\cdot\left(E_0\vec{1}_z-\left(-E_0\vec{1}_z\right)\right)=2\varepsilon_0E_0$$

<u>סעיף ב</u>

נשתמש בתנאי השפה לקביעת מטען הכיסוי המשטחי:

$$\rho_s=\vec{1}_n\cdot\left(\vec{D}_{out}-\vec{D}_{in}\right)=\varepsilon_0\vec{1}_r\cdot\left(\frac{q}{R}\vec{1}_r\right)=\frac{\varepsilon_0 q}{R}$$

פוטנציאלים - פתרון לתרגיל 3

<u>סעיף א</u>

ההתקן אינסופי בכיוון z, ולכן אין תלות בקואורדינאטה z.

מחוק אמפר, בתחום $0<r<a$:

$$\vec{J}=\vec{\nabla}\times\vec{H}=\frac{1}{r}\begin{vmatrix}\vec{1}_r & r\vec{1}_\varphi & \vec{1}_z\\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\varphi} & 0\\ 0 & rH_\varphi & 0\end{vmatrix}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}A\left(\frac{4R^2}{\pi^2}\sin\frac{\pi r}{2R}-\frac{2Rr}{\pi}\cos\frac{\pi r}{2R}\right)\vec{1}_z$$

$$=\frac{1}{r}A\left(\frac{2R}{\pi}\cos\frac{\pi r}{2R}-\frac{2R}{\pi}\left(\cos\frac{\pi r}{2R}-r\frac{\pi}{2R}\sin\frac{\pi r}{2R}\right)\right)\vec{1}_z=A\sin\frac{\pi r}{2R}\vec{1}_z$$

סעיף ב

נבצע אינטגרציה על חתך הגליל:

$$I=\iint\limits_{cross-section}\vec{J}\cdot d\vec{a}=\int\limits_{r=0}^{R}\int\limits_{\varphi=0}^{2\pi}A\sin\frac{\pi r}{2R}\vec{1}_z\cdot rd\varphi dr\vec{1}_z=2\pi A\int\limits_{r=0}^{R}\sin\frac{\pi r}{2R}rdr$$

$$=2\pi A\left[\frac{\sin\frac{\pi r}{2R}}{\left(\frac{\pi}{2R}\right)^2}-\frac{r\cos\frac{\pi r}{2R}}{\frac{\pi}{2R}}\right]_0^R=\frac{8AR^2}{\pi}$$

סעיף ג

נשתמש בחוק אמפר בצורתו האינטגרלית, כאשר נבחר מסלול מעגלי ברדיוס גדול מ a :

$$\oint\limits_C\vec{H}d\vec{\ell}=\frac{\partial}{\partial t}\iint\limits_S\vec{D}\cdot d\vec{a}+\iint\limits_S\vec{J}\cdot d\vec{a}$$

$$H\cdot 2\pi r=\iint\limits_S\vec{J}\cdot d\vec{a}=I$$

$$\Rightarrow\ \vec{H}=\frac{I}{2\pi r}\vec{1}_\varphi=\frac{4AR^2}{\pi^2 r}\vec{1}_\varphi$$

סעיף ד

לחישוב כיסוי הזרם, נשתמש בתנאי השפה:

$$\vec{J}_s=\vec{1}_n\times\left(\vec{H}_{out}-\vec{H}_{in}\right)=\vec{1}_r\times\left(\frac{4AR^2}{\pi^2 r}\vec{1}_\varphi-\frac{A}{r}\left(\frac{4R^2}{\pi^2}\sin\frac{\pi r}{2R}-\frac{2Rr}{\pi}\cos\frac{\pi r}{2R}\right)\vec{1}_\varphi\right)\Bigg|_{r=R}$$

$$=-\vec{1}_\theta\left(\frac{4AR}{\pi^2}-\frac{A}{R}\left(\frac{4R^2}{\pi^2}\sin\frac{\pi R}{2R}\right)\right)=0$$

יכולנו לראות שהשדה החשמלי רציף במעבר ברדיוס a , ומכאן להסיק שאין כיסוי זרם משטחי.
אין כיסוי זרם משטחי משום שאין חומר מוליך שבו יכול להתקיים זרם.

פתרונות פשוטים של משוואת לפלס

פתרונות פשוטים של משוואת לפלס - פתרון לתרגיל 1

בגלל הסימטריה בציר z, נסיק שלא חל שינוי לאורך ציר זה בפוטנציאל. מכיון שהפוטנציאל לא תלוי ב z, אז $k_z=0$, ומכיוון ש $k_x^2+k_y^2+k_z^2=0$, נקבל $|k_x|=|k_y|=k$.

עבור $y>0$, יש לקיים את תנאי השפה:

$$\phi(0,y)=\phi(a,y)=0$$
$$\lim_{y\to\infty}\phi(y)=0$$

לכן, עבור y נבחר פתרון דועך מהצורה e^{-ky}, ולכן $k_x=-k$, כלומר יש לבחור פתרון טריגונומטרי עבור x.

כדי לאפס את הפוטנציאל ב $x=0$ נבחר פתרון מצורת $\sin(kx)$. כלומר, לסיכום ננחש פתרון:

$$\phi(x,y>0,z)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin(kx)e^{-ky}$$

נציב את תנאי השפה:

$$\phi(0,y,z)=\sum_{n=1}^{\infty}A_ne^{-ky}=0\;\Rightarrow\;\sum_{n=1}^{\infty}A_n=0$$
$$\phi(a,y,z)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos(ka)e^{-ky}=0\;\Rightarrow\;\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos(ka)=0\;\Rightarrow\;ka=\frac{\pi}{2}+\pi n$$
$$\phi(x,0,z)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos(ka)=0$$
$$\phi_I(x,y,z)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)e^{-\frac{n\pi}{a}y}$$

עבור $y>0$, נשים לב שעבור $y\to-\infty$ מתקבל קבל לוחות אינסופי שלא מושפע מחצי המישור הימני. קבל כזה הוא בעל פוטנציאל מהצורה: $\phi=\frac{V_0x}{a}$.

עבור $y<0$ יש לקיים

$$\phi(0,y)=0$$
$$\phi(a,y)=V_0$$

ולכן ננחש פתרון מהצורה:

$$\phi_{II}(x,y,z)=\frac{xV_0}{a}+\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)e^{\frac{n\pi}{a}y}$$

נחשב את השדה החשמלי המתאים:

$$E_I(x,y,z)=-\frac{n\pi}{a}\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right)e^{-\frac{n\pi}{a}y}\vec{1}_x+\frac{n\pi}{a}\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)e^{-\frac{n\pi}{a}y}\vec{1}_y$$
$$E_{II}(x,y,z)=-\frac{V_0}{a}-\frac{n\pi}{a}\sum_{n=1}^{\infty}B_n\cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right)e^{\frac{n\pi}{a}y}\vec{1}_x-\frac{n\pi}{a}\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)e^{\frac{n\pi}{a}y}\vec{1}_y$$

את הקבועים נחשב בעזרת דרישת קיום תנאי הרציפות עבור השדה והפוטנציאל:

$$\vec{1}_n\left(\vec{E}_I-\vec{E}_{II}\right)\Big|_{y=0}=\varepsilon_0\rho_s=0$$
$$\Downarrow$$
$$\frac{n\pi}{a}\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)e^{\frac{n\pi}{a}y}=-\frac{n\pi}{a}\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)e^{-\frac{n\pi}{a}y}$$
$$\Downarrow$$
$$A_n=-B_n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)e^{-\frac{n\pi}{a}y}=\frac{xV_0}{a}-\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)e^{\frac{n\pi}{a}y}$$
$$\Downarrow$$
$$\frac{xV_0}{a}=\sum_{n=1}^{\infty}2A_n\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)e^{-\frac{n\pi}{a}y}$$
$$\Downarrow$$
$$A_n=\frac{2(-1)^{n+1}V_0}{n\pi 2}=\frac{(-1)^{n+1}V_0}{n\pi}$$

ולכן הפוטנציאל הדרוש הוא :

$$\phi_I(x,y,z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}V_0}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)e^{-\frac{n\pi}{a}y}$$
$$\phi_{II}(x,y,z)=\frac{xV_0}{a}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}V_0}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)e^{\frac{n\pi}{a}y}$$

פתרונות פשוטים של משוואת לפלס - פתרון לתרגיל 2

במקרה של $\delta=0$ נצפה לפוטנציאל:

$$u=V_1+(V_2-V_1)\frac{\ln\frac{\rho}{r_1}}{\ln\frac{r_2}{r_1}}$$

במקרה של $\delta=0$ נצפה לפוטנציאל שמגיע מהפתרון הטריביאלי, כלומר:

$$\phi(\rho,\varphi,z)=A+B\ln\rho$$

אך מכיוון ש $R(\varphi)=r_2+\delta\cos\varphi$, ננחש את פתרון :

$$\phi(\rho,\varphi,z)=A+B\ln(\rho+\delta\cos\varphi)=A+B\ln\left(\rho\left(1+\frac{\delta}{\rho}\cos\varphi\right)\right)=A+B\left(\ln(\rho)+\ln\left(1+\frac{\delta}{\rho}\cos\varphi\right)\right)$$

ומכיוון ש $\delta<<\rho$ נבצע קירוב ראשון לפי טיילור ונקבל

$$\phi(\rho,\varphi,z)=A+B\left(\ln\rho+\frac{\delta}{\rho}\cos\varphi\right)=A+B\ln\rho+B\frac{\delta}{\rho}\cos\varphi$$

וזהו פתרון טריביאלי בתוספת פתרון לא טריביאלי עבור $n=1$ (כי רק $\cos\varphi$ מופיע) ולכן הפתרון הכולל הוא

$$\phi(\rho,\varphi,z)=A+B\ln\rho+\rho(C\cos\varphi+D\sin\varphi)+\frac{1}{\rho}(E\cos\varphi+F\sin\varphi)$$

תנאי השפה הם:

$$u(R=r_2+\delta\cos\varphi,\varphi)=V_2$$
$$u(R=r_1,\varphi)=V_1$$

והפתרון שמתקבל הוא

$$\phi(\rho,\varphi,z)=V_1+\frac{V_2-V_1}{\ln\frac{r_2}{r_1}}\ln\frac{\rho}{r_1}-\frac{\delta}{r_2^2-r_1^2}\left(V_1-\frac{V_2-V_1}{\ln\frac{r_2}{r_1}}\right)\left(\rho-\frac{r_1^2}{\rho}\right)\cos\varphi$$

פתרונות פשוטים של משוואת לפלס - פתרון לתרגיל 3

סעיף א

נפריד בין שני תחומים:

$$I: \qquad 0\le r<R$$
$$II: \qquad r>R$$

לבעיה סימטריה ב φ, ולכן נקבל את הפתרון

$$\phi(r,\theta,\varphi)=\sum_n\left(A_nr^n+B_nr^{-(n+1)}\right)P_n^0(\cos\theta)$$

ומכיוון שצפיפות המטען המאולצת על הכדור R היא $\rho_s=\rho_0\cos 2\theta$, הרי ש

$$\vec{1}_r\left(\vec{D}_{II}-\vec{D}_I\right)=\rho_s=\rho_0\cos 2\theta$$

ומכיוון ש

$$-\frac{\partial\phi}{\partial r}=\vec{E}_r\sim\rho_0\cos 2\theta$$

נבחר את הפתרון להיות כזה שמכיל את $\cos 2\theta$. ע"פ הרמז שקיבלנו, $\cos 2\theta=\frac{4}{3}P_2^0(\cos\theta)-\frac{1}{3}P_0^0(\cos\theta)$, ולכן

נבחר את הפתרון להיות כזה שמכיל את $n=0,2$:

$$\phi_I(r,\theta,\varphi)=\left(A_0+B_0r^{-1}\right)P_0^0(\cos\theta)+\left(A_2r^2+B_2r^{-3}\right)P_2^0(\cos\theta)$$
$$\phi_{II}(r,\theta,\varphi)=\left(C_0+D_0r^{-1}\right)P_0^0(\cos\theta)+\left(C_2r^2+D_2r^{-3}\right)P_2^0(\cos\theta)$$

ומכיוון שהפתרון חייב להתכנס ב $r=0$ ולהתכנס ל 0 ב $r=\infty$, נקבל ש $B_0=B_2=C_0=C_2=0$, כלומר:

$$\phi_I(r,\theta,\varphi)=A_0+A_2r^2P_2^0(\cos\theta)$$
$$\phi_{II}(r,\theta,\varphi)=D_0r^{-1}+D_2r^{-3}P_2^0(\cos\theta)$$

נבנה את תנאי השפה:

$$\begin{cases}\vec{1}_r\left(\vec{D}_{II}-\vec{D}_I\right)=\vec{1}_r\varepsilon_0\left(\vec{E}_{II}-\vec{E}_I\right)=\varepsilon_0\left(-\left.\frac{\partial\phi_{II}}{\partial r}\right|_{r=R}+\left.\frac{\partial\phi_I}{\partial r}\right|_{r=R}\right)=\rho_0\cos 2\theta\\ \phi_I\left(R^-\right)=\phi_{II}\left(R^+\right)\end{cases}$$

כלומר נדרוש

$$\begin{cases}\varepsilon_0\left(-\left(-D_0R^{-2}-3D_2R^{-4}P_2^0(\cos\theta)\right)+2A_2P_2^0(\cos\theta)R\right)=\rho_0\left(\frac{4}{3}P_2^0(\cos\theta)-\frac{1}{3}P_0^0(\cos\theta)\right)\\ A_0+A_2R^2P_2^0(\cos\theta)=D_0R^{-1}+D_2R^{-3}P_2^0(\cos\theta)\end{cases}$$

ונקבל שצריך להתקיים

$$\begin{cases}\varepsilon_0D_0R^{-2}+3\varepsilon_0D_2R^{-4}P_2^0(\cos\theta)+2\varepsilon_0A_2RP_2^0(\cos\theta)=\rho_0\left(\frac{4}{3}P_2^0(\cos\theta)-\frac{1}{3}\right)\\ A_0+A_2R^2P_2^0(\cos\theta)=D_0R^{-1}+D_2R^{-3}P_2^0(\cos\theta)\end{cases}$$

ומהשוואת מקדמים, נקבל ש

$$\begin{cases} 3\varepsilon_0 D_2 R^{-4} + 2\varepsilon_0 A_2 R = \dfrac{4}{3}\rho_0 \\ \varepsilon_0 D_0 R^{-2} = -\dfrac{1}{3}\rho_0 \\ A_0 = D_0 R^{-1} \\ A_2 R^2 = D_2 R^{-3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3\varepsilon_0 D_2 R^{-4} + 2\varepsilon_0 A_2 R = \dfrac{4}{3}\rho_0 \\ D_0 = -\dfrac{R^2\rho_0}{3\varepsilon_0} \\ A_0 = D_0 R^{-1} = -\dfrac{R\rho_0}{3\varepsilon_0} \\ A_2 = D_2 R^{-5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3\varepsilon_0 D_2 R^{-4} + 2\varepsilon_0 D_2 R^{-4} = \dfrac{4}{3}\rho_0 \\ D_0 = -\dfrac{R^2\rho_0}{3\varepsilon_0} \\ A_0 = -\dfrac{R\rho_0}{3\varepsilon_0} \\ A_2 = D_2 R^{-5} \end{cases}$$

$$D_2 = \frac{4R^4}{15\varepsilon_0}\rho_0, \quad D_0 = -\frac{R^2\rho_0}{3\varepsilon_0}, \quad A_0 = -\frac{R\rho_0}{3\varepsilon_0}, \quad A_2 = \frac{4}{15\varepsilon_0 R}\rho_0$$

כלומר, הפוטנציאל שלנו הוא

$$\phi_I(r,\theta,\varphi) = \frac{4\rho_0 r^2}{15\varepsilon_0 R}P_2^0(\cos\theta) - \frac{R\rho_0}{3\varepsilon_0}$$

$$\phi_{II}(r,\theta,\varphi) = \frac{4R^4\rho_0}{15\varepsilon_0 r^3}P_2^0(\cos\theta) - \frac{R^2\rho_0}{3\varepsilon_0 r}$$

ולכן השדה שלנו הוא

$$\vec{E}_I = -\vec{\nabla}\phi_I = -\frac{4\rho_0 r}{15\varepsilon_0 R}\left(3\cos^2\theta - 1\right)\vec{1}_r - \frac{6\rho_0 r}{15\varepsilon_0 R}\sin 2\theta\vec{1}_\theta$$

$$\vec{E}_{II} = -\vec{\nabla}\phi_{II} = \frac{6R^4\rho_0}{15\varepsilon_0 r^4}\left(3\cos^2\theta - 1\right)\vec{1}_r - \frac{2R^4\rho_0}{5\varepsilon_0 r^4}\sin 2\theta\vec{1}_\theta$$

<u>סעיף ב</u>

נביט בארבעה תחומים :

$$\begin{aligned} I: &\quad 0 < r < R \\ II: &\quad R < r < R_1 \\ III: &\quad R_1 < r < R_2 \\ IV: &\quad r > R_2 \end{aligned}$$

כמובן שבמוליך נקבל

$$\phi_{III}(r,\theta,\varphi) = \phi_0 = \phi_{II}\left(R_1^-\right) = const$$

וגם נקבע כי

$$\phi_{IV}(r\to\infty,\theta,\varphi) = 0$$

מכיוון שהפוטנציאל ב $r = R_2$ קבוע, הוא לא יכול להיות פונקציה של θ או φ. מרציפות הפוטנציאל החשמלי, הרי שבכל התחום IV, התלות של הפוטנציאל חייבת להישאר רק ב r. לכן, השדה החשמלי באזור IV הוא רדיאלי. מחוק גאוס נקבל שהשדה בתחום IV הוא כזה של מטען נקודתי Q,

$$\vec{E}_{IV} = E_{IV}(r)\vec{1}_r = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

כאשר Q הוא סך כל המטען שנמצא ב $0 \le r < R_2$, כלומר המטען על הקליפה R :

$$Q=\iint_{R\,shell}\rho_s(\theta,\varphi)r\sin\theta d\varphi rd\theta\bigg|_{r=R}=\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\rho_0\cos 2\theta r^2\sin\theta d\theta d\varphi\bigg|_{r=R}=2\pi R^2\rho_0\int_{\theta=0}^{\pi}\left(1-2\sin^2\theta\right)\sin\theta d\theta$$

$$=2\pi R^2\rho_0\left(\int_{\theta=0}^{\pi}\sin\theta d\theta-2\int_{\theta=0}^{\pi}\left(1-\cos^2\theta\right)\sin\theta d\theta\right)$$

$$=2\pi R^2\rho_0\left(-\cos\theta\Big|_{\theta=0}^{\pi}-2\left[\int_{\theta=0}^{\pi}\sin\theta d\theta-\int_{\theta=0}^{\pi}\cos^2\theta\sin\theta d\theta\right]\right)$$

$$=2\pi R^2\rho_0\left(-(-1-1)-2\left[2+\frac{1}{3}\cos^3\theta\Big|_{\theta=0}^{\pi}\right]\right)=2\pi R^2\rho_0\left(2-2\left[2+\frac{1}{3}(-2)\right]\right)$$

$$=2\pi R^2\rho_0\left(2-\frac{8}{3}\right)=-\frac{4}{3}\pi R^2\rho_0$$

ובמילים אחרות,

$$\phi_{IV}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

מרציפות הפוטנציאל, נקבל ש

$$\phi(r=R_2)=\phi_{IV}\left(r=R_2^+\right)=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$$

ולכן

$$\phi_{III}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$$

כעת נותרנו עם חישוב הפוטנציאל באזורים I ו II, ובעיה זו דומה לבעיה שבסעיף א, כלומר נציע את הפתרון

$$\phi_I(r,\theta,\varphi)=\left(A_0+B_0r^{-1}\right)P_0^0(\cos\theta)+\left(A_2r^2+B_2r^{-3}\right)P_2^0(\cos\theta)$$

$$\phi_{II}(r,\theta,\varphi)=\left(C_0+D_0r^{-1}\right)P_0^0(\cos\theta)+\left(C_2r^2+D_2r^{-3}\right)P_2^0(\cos\theta)$$

כאשר התבדרות הפתרון ב $r=0$ לא באה בחשבון ולכן $B_0=B_2=0$, ולכן הפתרון המוצע הוא בעצם

$$\phi_I(r,\theta,\varphi)=A_0+A_2r^2P_2^0(\cos\theta)$$

$$\phi_{II}(r,\theta,\varphi)=C_0+D_0r^{-1}+\left(C_2r^2+D_2r^{-3}\right)P_2^0(\cos\theta)$$

עם התנאים הבאים

$$\phi_I\left(r=R^-\right)=\phi_{II}\left(r=R^+\right)$$

$$\vec{1}_r\left(\vec{D}_{II}-\vec{D}_I\right)\Big|_{r=R}=\rho_s$$

$$\phi_{II}\left(r=R_1^-\right)=\phi_{III}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$$

נחיל , אם כן, תנאים אלו, ונקבל את המשוואות

$$\begin{cases} A_0 + A_2 R^2 P_2^0(\cos\theta) = C_0 + D_0 R^{-1} + \left(C_2 R^2 + D_2 R^{-3}\right) P_2^0(\cos\theta) \\ D_0 R^{-2} + \left(3D_2 R^{-4} - 2C_2 R\right) P_2^0(\cos\theta) + 2A_2 R P_2^0(\cos\theta) = \rho_0 \left(\frac{4}{3} P_2^0(\cos\theta) - \frac{1}{3} P_0^0(\cos\theta)\right) \\ C_0 + D_0 R_1^{-1} + \left(C_2 R_1^2 + D_2 R_1^{-3}\right) P_2^0(\cos\theta) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_2} \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} A_0 = C_0 + D_0 R^{-1} \\ A_2 R^2 = C_2 R^2 + D_2 R^{-3} \\ D_0 R^{-2} = -\frac{1}{3}\rho_0 \\ 3D_2 R^{-4} - 2C_2 R + 2A_2 R = \frac{4}{3}\rho_0 \\ C_0 + D_0 R_1^{-1} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_2} \\ C_2 R_1^2 + D_2 R_1^{-3} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D_0 = -\frac{R^2\rho_0}{3} \\ A_0 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_2} + \frac{R^2\rho_0}{3R_1} - \frac{R\rho_0}{3} \\ C_0 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_2} + \frac{R^2\rho_0}{3R_1} \\ A_2 = D_2\left(\frac{1}{R^5} - \frac{1}{R_1^5}\right) \\ 3D_2 R^{-4} + \frac{2D_2 R}{R_1^5} + 2D_2\left(\frac{1}{R^4} - \frac{R}{R_1^5}\right) = \frac{4}{3}\rho_0 \\ C_2 = -\frac{D_2}{R_1^5} \end{cases}$$

ולכן נקבל

$$D_0 = -\frac{R^2\rho_0}{3},\ A_0 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_2} + \frac{R^2\rho_0}{3R_1} - \frac{R\rho_0}{3},\ C_0 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_2} + \frac{R^2\rho_0}{3R_1}$$

$$A_2 = \frac{4}{15}\rho_0 R^4\left(\frac{1}{R^5} - \frac{1}{R_1^5}\right), \qquad D_2 = \frac{4}{15}\rho_0 R^4,\ C_2 = -\frac{D_2}{R_1^5}$$

ולכן הפתרון הוא

$$\phi_I(r,\theta,\varphi) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_2} + \frac{R^2\rho_0}{3R_1} - \frac{R\rho_0}{3} + \frac{4}{15}\rho_0 R^4\left(\frac{1}{R^5} - \frac{1}{R_1^5}\right) r^2 P_2^0(\cos\theta)$$

$$\phi_{II}(r,\theta,\varphi) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_2} + \frac{R^2\rho_0}{3R_1} - \frac{R^2\rho_0}{3r} + \left(\frac{4}{15}\rho_0\frac{R^4}{r^3} - \frac{D_2}{R_1^5} r^2\right) P_2^0(\cos\theta)$$

$$\phi_{III}(r,\theta,\varphi) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$$

$$\phi_{IV}(r,\theta,\varphi) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

ואם נציב $Q = -\frac{4}{3}\pi R^2\rho_0$, נקבל

$$\phi_I(r,\theta,\varphi)=-\frac{R^2\rho_0}{3\varepsilon_0 R_2}+\frac{R^2\rho_0}{3R_1}-\frac{R\rho_0}{3}+\frac{4}{15}\rho_0 R^4\left(\frac{1}{R^5}-\frac{1}{R_1^5}\right)r^2 P_2^0(\cos\theta)$$

$$\phi_{II}(r,\theta,\varphi)=-\frac{R^2\rho_0}{3\varepsilon_0 R_2}+\frac{R^2\rho_0}{3R_1}-\frac{R^2\rho_0}{3r}+\left(\frac{4}{15}\rho_0\frac{R^4}{r^3}-\frac{D_2}{R_1^5}r^2\right)P_2^0(\cos\theta)$$

$$\phi_{III}(r,\theta,\varphi)=-\frac{R^2\rho_0}{3\varepsilon_0 R_2}$$

$$\phi_{IV}(r,\theta,\varphi)=-\frac{R^2\rho_0}{3\varepsilon_0 r}$$

פתרונות פשוטים של משוואת לפלס - פתרון לתרגיל 7

נבחן את הפתרון הטריביאלי מחוץ לקונוסים כלומר עבור $\theta_1<\theta<\theta_2$, כאשר ישנה סימטריה אזימוטלית:

$$\phi=\left(A+\frac{B}{r}\right)\left(C+D\ln\tan\tfrac{\theta}{2}\right)$$

מכיוון שהפתרון כולל את הראשית, הוא חייב להיות מהצורה

$$\phi=C+D\ln\tan\tfrac{\theta}{2}$$

ותנאי השפה הם

$$\phi(\theta_1)=C+D\ln\tan\tfrac{\theta_1}{2}=\phi_1$$

$$\phi(\theta_2)=C+D\ln\tan\tfrac{\theta_2}{2}=\phi_2$$

וחישוב הקבועים הוא

$$\begin{cases}C=\phi_1-D\ln\tan\frac{\theta_1}{2}\\ \phi_1-D\ln\tan\frac{\theta_1}{2}+D\ln\tan\frac{\theta_2}{2}=\phi_2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}C=\phi_1-\dfrac{(\phi_2-\phi_1)\ln\tan\frac{\theta_1}{2}}{\ln\tan\frac{\theta_2}{2}-\ln\tan\frac{\theta_1}{2}}=\dfrac{\phi_1\ln\tan\frac{\theta_2}{2}-\phi_2\ln\tan\frac{\theta_1}{2}}{\ln\tan\frac{\theta_2}{2}-\ln\tan\frac{\theta_1}{2}}\\ D=\dfrac{\phi_2-\phi_1}{\ln\tan\frac{\theta_2}{2}-\ln\tan\frac{\theta_1}{2}}\end{cases}$$

ולכן

$$\phi(\theta)=\frac{\phi_1\ln\tan\frac{\theta_2}{2}-\phi_2\ln\tan\frac{\theta_1}{2}}{\ln\tan\frac{\theta_2}{2}-\ln\tan\frac{\theta_1}{2}}+\frac{\phi_2-\phi_1}{\ln\tan\frac{\theta_2}{2}-\ln\tan\frac{\theta_1}{2}}\ln\tan\tfrac{\theta}{2}$$

ואז השדה המתאים הוא

$$\vec{E}=-\vec{\nabla}\phi=-\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\vec{1}_\theta=-\frac{1}{r}\left(\frac{\phi_2-\phi_1}{\ln\tan\frac{\theta_2}{2}-\ln\tan\frac{\theta_1}{2}}\frac{1}{2}\frac{1}{\tan\frac{\theta}{2}}\frac{1}{\cos^2\frac{\theta}{2}}\right)\vec{1}_\theta=-\frac{1}{r}\left(\frac{\phi_2-\phi_1}{\ln\tan\frac{\theta_2}{2}-\ln\tan\frac{\theta_1}{2}}\frac{1}{\sin\theta}\right)\vec{1}_\theta$$

ועבור $r=2cm,\theta=120^\circ$ נקבל

$$\vec{E}=-\frac{1}{2}\left(\frac{100}{\ln\tan\frac{135^\circ}{2}-\ln\tan\frac{30^\circ}{2}}\frac{1}{\sin 120^\circ}\right)\vec{1}_\theta=-26.26\vec{1}_\theta\left[\tfrac{V}{cm}\right]$$

וקטור פוינטינג ומשפט פוינטינג ברישום זמני

וקטור פוינטינג ומשפט פוינטינג ברישום זמני - פתרון לתרגיל 1

<u>סעיף א</u>

חישוב וקטור פוינטינג במרחב:

$$\vec{S} \triangleq \vec{E}\times\vec{H} = \frac{E_0}{r}\sin\theta\sin\left(\omega t-\omega\frac{r}{c}\right)\vec{1}_\theta \times \frac{E_0}{r\eta_0}\sin\theta\sin\left(\omega t-\omega\frac{r}{c}\right)\vec{1}_\varphi = \frac{E_0^2}{r^2\eta_0}\sin^2\theta\sin^2\left(\omega t-\omega\frac{r}{c}\right)\vec{1}_r$$

<u>סעיף ב</u>

צפיפות האנרגיה החשמלית היא

$$w_e \triangleq \frac{1}{2}\vec{D}\cdot\vec{E} = \frac{1}{2}\varepsilon_0\left|\vec{E}\right|^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0\frac{E_0^2}{r^2}\sin^2\theta\sin^2\left(\omega t-\omega\frac{r}{c}\right)$$

צפיפות האנרגיה המגנטית היא

$$w_m \triangleq \frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H} = \frac{1}{2}\mu_0\left|\vec{H}\right|^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0\frac{E_0^2}{r^2}\sin^2\theta\sin^2\left(\omega t-\omega\frac{r}{c}\right)$$

<u>סעיף ג</u>

נבדוק את קיום משפט פוינטינג הדיפרנציאלי:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{S}+\frac{\partial}{\partial t}\left(w_e+w_m\right) = \vec{\nabla}\cdot\left(\frac{E_0^2}{r^2\eta_0}\sin^2\theta\sin^2\left(\omega t-\omega\frac{r}{c}\right)\vec{1}_r\right)+\frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon_0\frac{E_0^2}{r^2}\sin^2\theta\sin^2\left(\omega t-\omega\frac{r}{c}\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{E_0^2}{\eta_0}\sin^2\theta\sin^2\left(\omega t-\omega\frac{r}{c}\right)\right)+2\varepsilon_0\frac{E_0^2}{r^2}\sin^2\theta\sin\left(\omega t-\omega\frac{r}{c}\right)\cos\left(\omega t-\omega\frac{r}{c}\right)\omega=$$

$$=\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\frac{E_0^2}{r^2}\sin^2\theta\sin 2\left(\omega t-\omega\frac{r}{c}\right)\left(-\frac{\omega}{c}\right)+\omega\varepsilon_0\frac{E_0^2}{r^2}\sin^2\theta\sin 2\left(\omega t-\omega\frac{r}{c}\right)$$

$$=-\omega\varepsilon_0\frac{E_0^2}{r^2}\sin^2\theta\sin 2\left(\omega t-\omega\frac{r}{c}\right)+\omega\varepsilon_0\frac{E_0^2}{r^2}\sin^2\theta\sin 2\left(\omega t-\omega\frac{r}{c}\right)=0$$

ומצד שני,

$$-\vec{J}\cdot\vec{E}=0$$

כי אין זרם במערכת, ולכן משפט פוינטינג נכון במקרה זה.

וקטור פוינטינג ומשפט פוינטינג ברישום זמני - פתרון לתרגיל 2

נבדוק את קיום משפט פוינטינג.

$$\vec{S}=\vec{E}\times\vec{H}=\left(\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\frac{k^2Ia}{4\pi r}\sin\theta\cos\left(kr-\omega t\right)\vec{1}_\varphi\right)\times\left(-\frac{k^2Ia}{4\pi r}\sin\theta\cos\left(kr-\omega t\right)\vec{1}_\theta\right)$$

$$=\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\frac{k^4I^2a^2}{16\pi^2r^2}\sin^2\theta\cos^2\left(kr-\omega t\right)\vec{1}_r$$

$$w_e=\frac{1}{2}\vec{D}\cdot\vec{E}=\frac{1}{2}\varepsilon_0\left|\vec{E}\right|^2=\frac{1}{2}\mu_0\frac{k^4I^2a^2}{16\pi^2r^2}\sin^2\theta\cos^2\left(kr-\omega t\right)$$

$$w_m=\frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H}=\frac{1}{2}\mu_0\left|\vec{H}\right|^2=\frac{1}{2}\mu_0\frac{k^4I^2a^2}{16\pi^2r^2}\sin^2\theta\cos^2\left(kr-\omega t\right)$$

ולכן

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{S}+\frac{\partial}{\partial t}\left(w_e+w_m\right)=\vec{\nabla}\cdot\left(\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\frac{k^4I^2a^2}{16\pi^2r^2}\sin^2\theta\cos^2\left(kr-\omega t\right)\vec{1}_r\right)+\frac{\partial}{\partial t}\left(\mu_0\frac{k^4I^2a^2}{16\pi^2r^2}\sin^2\theta\cos^2\left(kr-\omega t\right)\right)$$

$$=\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\frac{k^4I^2a^2}{16\pi^2}\sin^2\theta\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\cos^2\left(kr-\omega t\right)+\mu_0\frac{k^4I^2a^2}{16\pi^2r^2}\sin^2\theta\frac{\partial}{\partial t}\cos^2\left(kr-\omega t\right)$$

$$=-\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\frac{k^5I^2a^2}{16\pi^2r^2}\sin^2\theta\sin 2\left(kr-\omega t\right)+\omega\mu_0\frac{k^4I^2a^2}{16\pi^2r^2}\sin^2\theta\sin 2\left(kr-\omega t\right)$$

$$=\sin^2\theta\sin 2\left(kr-\omega t\right)\frac{k^4I^2a^2}{16\pi^2r^2}\left(\mu_0\omega-\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}k\right)$$

$$\underset{\omega=ck}{=}\sin^2\theta\sin 2\left(kr-\omega t\right)\frac{k^4I^2a^2}{16\pi^2r^2}\left(\mu_0\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}k-\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}k\right)$$

$$=0$$

ומצד שני,

$$-\vec{J}\cdot\vec{E}=0$$

<u>סעיף ב</u>

שטף האנרגיה עבור כדור ברדיוס r סביב הראשית הוא

$$\oiint_r\vec{S}d\vec{a}=\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\frac{k^4I^2a^2}{16\pi^2r^2}\sin^2\theta\cos^2\left(kr-\omega t\right)rd\theta r\sin\theta d\varphi=$$

$$=\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\frac{k^4I^2a^2}{8\pi}\cos^2\left(kr-\omega t\right)\int_{\theta=0}^{\pi}\left(1-\cos^2\theta\right)\sin\theta d\theta$$

$$=\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\frac{k^4I^2a^2}{8\pi}\cos^2\left(kr-\omega t\right)\left(-\cos\theta\Big|_0^\pi-\int_{\theta=0}^{\pi}\cos^2\theta\sin\theta d\theta\right)$$

$$=\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\frac{k^4I^2a^2}{8\pi}\cos^2\left(kr-\omega t\right)\left(2+\frac{1}{3}\cos^3\theta\Big|_0^\pi\right)$$

$$=\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\frac{k^4I^2a^2}{8\pi}\cos^2\left(kr-\omega t\right)\left(2-\frac{2}{3}\right)=\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\frac{k^4I^2a^2}{6\pi}\cos^2\left(kr-\omega t\right)$$

וקטור פוינטינג ומשפט פוינטינג ברישום זמני - פתרון לתרגיל 4

<u>סעיף א</u>

1. השדה החשמלי של לוחות אינסופיים, כלומר אם נניח ש $R>>d$, הוא $\vec{E}=-\frac{V_0}{d}\vec{1}_z$.
2. מהסימטריה האזימוטאלית, נסיק כי $\vec{H}=H_\varphi\vec{1}_\varphi$. עבור $r<R$, מחוק אמפר נקבל כי

$$\oint_C\vec{H}d\vec{\ell}=H_\varphi\oint_C\vec{1}_\varphi d\vec{\ell}=2\pi rH_\varphi=\iint_A\vec{J}d\vec{a}=\sigma E_z\iint_A\left(-\vec{1}_z\right)d\vec{a}=-\pi r^2\sigma\frac{V_0}{d}$$

ולכן $H=-\frac{\sigma V_0}{2d}r\vec{1}_\varphi$.

3. עבור $r<R$, וקטור פוינטינג הוא

$$\vec{S}=\vec{E}\times\vec{H}=\left(-\frac{V_0}{d}\vec{1}_z\right)\times\left(-\frac{\sigma V_0}{2d}r\vec{1}_\varphi\right)=-\frac{\sigma V_0^2}{2d^2}r\vec{1}_r$$

4. ראשית, $\oiint_A\vec{S}\cdot d\vec{a}-\cancel{\frac{d}{dt}\left(W_{em}\right)}=\oiint_A\vec{S}\cdot d\vec{a}=-\frac{\sigma V_0^2}{2d^2}R\cdot 2\pi Rd=-\frac{\sigma\pi V_0^2R^2}{d}$

ומצד שני, $-\iiint_V\vec{J}\cdot\vec{E}dv=-\sigma\left|\vec{E}\right|^2\pi R^2d=-\sigma\frac{V_0^2}{d^2}\pi R^2d=-\frac{\sigma\pi V_0^2R^2}{d}$, וזו הדגמה לנכונותו של משפט פוינטינג.

סעיף ב

1. נפתור את משוואת פואסון, $u=-\frac{\rho_0}{2\varepsilon_0}z^2+Az+B \Rightarrow \nabla^2 u=-\frac{\rho_0}{\varepsilon_0}$, כאשר
$u(z=0)=0,\quad u(z=d)=V_0$, ואז נקבל $u(0)=B=0$,
$u(d)=-\frac{\rho_0}{2\varepsilon_0}d^2+Ad=V_0 \Rightarrow A=\frac{\rho_0}{2\varepsilon_0}d+\frac{V_0}{d}$, ולכן

$$\vec{E}=-\vec{\nabla}u=-\frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{\rho_0}{2\varepsilon_0}z^2+Az\right)=\frac{\rho_0}{\varepsilon_0}z-A=\left(\frac{\rho_0}{\varepsilon_0}z-\frac{\rho_0}{2\varepsilon_0}d-\frac{V_0}{d}\right)\vec{1}_z$$

2. מהסימטריה האזימוטאלית, נסיק כי $\vec{H}=H_\varphi\vec{1}_\varphi$. עבור $r<R$, מחוק אמפר נקבל כי

$$\oint_C \vec{H}d\vec{\ell}=H_\varphi\oint_C \vec{1}_\varphi d\vec{\ell}=2\pi r H_\varphi=\iint_A \vec{J}d\vec{a}=\iint_A \rho_0 v_0\vec{1}_z d\vec{a}=\pi r^2\rho_0 v_0$$

ולכן $H_\varphi=\frac{\rho_0 v_0 r}{2}\vec{1}_\varphi$.

3. עבור $r<R$, וקטור פוינטינג הוא

$$\vec{S}=\vec{E}\times\vec{H}=\left(\left(\frac{\rho_0}{\varepsilon_0}z-\frac{\rho_0}{2\varepsilon_0}d-\frac{V_0}{d}\right)\vec{1}_z\right)\times\left(\frac{\rho_0 v_0 r}{2}\vec{1}_\varphi\right)=-\left(\frac{\rho_0}{\varepsilon_0}z-\frac{\rho_0}{2\varepsilon_0}d-\frac{V_0}{d}\right)\frac{\rho_0 v_0 r}{2}\vec{1}_r$$

4. ראשית, $\oiint_A \vec{S}\cdot d\vec{a}-\cancel{\frac{d}{dt}(W_{em})}=\oiint_A \vec{S}\cdot d\vec{a}=\int_{z=0}^{d}\left(\frac{\rho_0}{2\varepsilon_0}d+\frac{V_0}{d}-\frac{\rho_0}{\varepsilon_0}z\right)\frac{\rho_0 v_0 R}{2}2\pi R dz$, או

$$\oiint_A \vec{S}\cdot d\vec{a}=\rho_0 v_0\pi R^2\left[\left(\frac{\rho_0 d}{2\varepsilon_0}+\frac{V_0}{d}\right)z-\frac{\rho_0}{2\varepsilon_0}z^2\right]_0^d=\rho_0 v_0\pi R^2\left(\left(\frac{\rho_0 d}{2\varepsilon_0}+\frac{V_0}{d}\right)d-\frac{\rho_0}{2\varepsilon_0}d^2\right)$$
$$=\rho_0 v_0\pi R^2 V_0$$

ומצד שני,

$$-\iiint_V \vec{J}\cdot\vec{E}dv=-\rho_0 v_0\pi R^2\int_0^d \frac{\rho_0}{\varepsilon_0}z-\frac{\rho_0 d}{2\varepsilon_0}-\frac{V_0}{d}dz=-\rho_0 v_0\pi R^2\left(\frac{\rho_0}{2\varepsilon_0}d^2-\left(\frac{\rho_0 d}{2\varepsilon_0}+\frac{V_0}{d}\right)d\right)=-\rho_0 v_0\pi R^2 V_0$$

,
וזו הדגמה נוספת לנכונותו של משפט פוינטינג

סעיף ג

בשני המקרים, הייתה זרימה של מטענים בכיוון $\vec{1}_z$, ווקטור פוינטינג היה בכיוון $\vec{1}_r$, כלומר ההספק האלקטרומגנטי לא נכנס או יוצא מהאלקטרודות, אלא מתפזר בריק שמסביב. נביט בביטויים להספק המתבזבז בהתקן.
בסעיף א, קיבלנו

$$P=\frac{\sigma\pi R^2}{d}V_0^2=\frac{V_0^2}{r}$$

כאשר $r=\frac{1}{\sigma}\frac{d}{\pi R^2}$ היא התנגדות ההתקן.
בסעיף ב, קיבלנו

$$P=\rho_0 v_0\pi R^2 V_0=iV_0$$

כאשר $i=\lambda A=\rho_0 v_0\pi R^2$ הוא הזרם בהתקן, $\lambda=\rho_0 v_0$ הוא צפיפות הזרם הקווית ו $A=\pi R^2$ שטח ההתקן.
כלומר, הביטויים להספקים נוצרים מהאילוצים על ההתקן – כאשר מאולץ חומר, קיבלנו ביטוי המכיל את התנגדות ההתקן, וכאשר מאולץ זרם, נקבל את ההספק עם הביטוי לזרם.

משפט פוינטינג המרוכב

משפט פוינטינג המרוכב - פתרון לתרגיל 1

סעיף א

נניח שמחוץ להתקן, השדות מתאפסים. מכיוון שהשדה החשמלי המשיקי עובר את שכבות המוליך הדקות ברציפות, אזי $\underline{E}_y(x=0,d)=\underline{E}_z(x=0,d)=0$. מכיוון שההתקן אינסופי בכיוון $\vec{1}_y$, אין שינויים בשדות בכיוון זה, ולכן $\underline{E}_y=0$ בתוך כל ההתקן. מכיוון שההתקן צר מאוד, ולכן אין שינוי בשדות בכיוון $\vec{1}_x$, אזי רכיב $\underline{E}_z$ חייב להישאר קבוע לאורך ציר x, ולכן $\underline{E}_z=0$ בתוך כל ההתקן. לכן נסיק ש $\vec{\underline{E}}=\underline{E}_x\vec{1}_x$ בתוך ההתקן, וגם $\underline{E}_x(z=\ell)=0$.

מכיוון שהשדה המגנטי הניצב עובר את שכבות המוליך הדקות ברציפות, אזי $\underline{H}_x=0$ וגם $\underline{H}_z(z=\ell)=0$

נרשום את חוק פרדי וחוק אמפר הדיפרנציאלים ברישום פאזורי:

$$\vec{\nabla}\times\vec{\underline{H}}=j\omega\varepsilon\vec{\underline{E}}+\vec{\underline{J}}=j\omega\varepsilon\vec{\underline{E}}+\sigma\vec{\underline{E}}=j\omega\varepsilon\left(1+\frac{\sigma}{j\omega\varepsilon}\right)\vec{\underline{E}}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{\underline{E}}=-j\omega\mu_0\vec{\underline{H}}$$

ונסמן את המקדם הדיאלקטרי המרוכב:

$$\varepsilon_{eff}\triangleq\varepsilon\left(1+\frac{\sigma}{j\omega\varepsilon}\right)$$

ונחשב:

$$\begin{vmatrix}\vec{1}_x & \vec{1}_y & \vec{1}_z\\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z}\\ 0 & \underline{H}_y & \underline{H}_z\end{vmatrix}=-\frac{\partial}{\partial z}\underline{H}_y\vec{1}_x=j\omega\varepsilon_{eff}\underline{E}_x\vec{1}_x$$

$$\begin{vmatrix}\vec{1}_x & \vec{1}_y & \vec{1}_z\\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z}\\ \underline{E}_x & 0 & 0\end{vmatrix}=\frac{\partial}{\partial z}\underline{E}_x\vec{1}_y=-j\omega\mu_0\vec{\underline{H}}=-j\omega\mu_0\underline{H}_y\vec{1}_y$$

ולכן

$$\begin{cases}j\omega\varepsilon_{eff}\underline{E}_x=-\frac{\partial}{\partial z}\underline{H}_y\\ \frac{\partial}{\partial z}\underline{E}_x=-j\omega\mu_0\underline{H}_y\end{cases}\Rightarrow\quad j\omega\varepsilon_{eff}\underline{E}_x=\frac{1}{j\omega\mu_0}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\underline{E}_x\quad\Rightarrow\quad\frac{\partial^2}{\partial z^2}\underline{E}_x+\omega^2\varepsilon_{eff}\mu_0\underline{E}_x=0$$

סעיף ב

מאילוץ מקור המתח, צריך להתקיים

$$V(z=0,x=d)-V(z=0,x=0)=\underline{V}=-\int_{x=0}^{d}\underline{E}_x(z=0)d\vec{\ell}=\underline{E}_x(z=0)\int_{x=0}^{d}d\vec{\ell}=d\underline{E}_x(z=0)$$

$$\Rightarrow\quad\underline{E}_x(z=0)=-\frac{\underline{V}}{d}$$

ב נוסף, מרציפות השדה החשמלי המשיק ב $z=\ell$, צריך להתקיים $\underline{E}_x(z=\ell)=0$.

סעיף ג

קיבלנו את המשוואה הדיפרנציאלית שהשדה החשמלי מקיים:

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\underline{E}_x+\omega^2\varepsilon_{eff}\mu_0\underline{E}_x=0$$

פתרון משוואה זו הוא

$$\underline{E}_x=Ae^{jkz}+Be^{-jkz},\qquad k\triangleq\omega\sqrt{\varepsilon_{eff}\mu_0}$$

ולכן

$$\underline{H}_y = -\frac{jk}{j\omega\mu_0}Ae^{jkz} + \frac{jk}{j\omega\mu_0}Be^{-jkz} = -\sqrt{\frac{\varepsilon_{eff}}{\mu_0}}Ae^{jkz} + \sqrt{\frac{\varepsilon_{eff}}{\mu_0}}Be^{-jkz}$$

נחיל את תנאי ההתחלה ונקבל:

$$\begin{cases} \underline{E}_x(z=0) = A + B = -\frac{\underline{V}}{d} \\ \underline{E}_x(z=\ell) = Ae^{jk\ell} + Be^{-jk\ell} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B\left(1-e^{-2jk\ell}\right) = -\frac{\underline{V}}{d} \\ A = -Be^{-2jk\ell} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{\underline{V}}{d}\frac{e^{-2jk\ell}}{1-e^{-2jk\ell}} \\ B = -\frac{\underline{V}}{d}\frac{1}{1-e^{-2jk\ell}} \end{cases}$$

כעת, נסמן

$$\varepsilon_{eff} = \varepsilon' - j\varepsilon''$$

ואז, בהנחת הפסדים נמוכים, נקבל

$$\sqrt{\varepsilon_{eff}} = \sqrt{\varepsilon' - j\varepsilon''} = \sqrt{\varepsilon'}\left(1 - j\frac{\varepsilon''}{\varepsilon'}\right)^{\frac{1}{2}} \approx \sqrt{\varepsilon'}\left(1 - \frac{j}{2}\frac{\varepsilon''}{\varepsilon'}\right)$$

וכאשר נגדיר את מקדם השבירה:

$$n \triangleq \sqrt{\frac{\varepsilon'}{\varepsilon_0}}$$

נקבל

$$k = \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_{eff}} \approx \omega n\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}\left(1 - \frac{j}{2}\frac{\varepsilon''}{\varepsilon'}\right) = \frac{\omega n}{c} - j\frac{1}{2}\frac{\omega n}{c}\frac{\varepsilon''}{\varepsilon'} \triangleq \frac{\omega n}{c} - j\alpha$$

וכאשר נקרב את הביטוי שבאמפליטודה, נקבל

$$\sqrt{\frac{\varepsilon_{eff}}{\mu_0}} \approx \frac{\sqrt{\varepsilon'}\left(1 - \frac{j}{2}\frac{\varepsilon''}{\varepsilon'}\right)}{\sqrt{\mu_0}} = \frac{n\sqrt{\varepsilon_0}}{\sqrt{\mu_0}}\left(1 - \frac{j}{2}\frac{\varepsilon''}{\varepsilon'}\right) \underset{\varepsilon''<<\varepsilon'}{\approx} \frac{n}{\eta_0}, \qquad \eta_0 \triangleq \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}$$

לאחר כל הסימונים והקירובים ההלו, נקבל

$$\underline{E}_x = Ae^{jkz} + Be^{-jkz}$$

$$\underline{H}_y = -\frac{n}{\eta_0}Ae^{jkz} + \frac{n}{\eta_0}Be^{-jkz}$$

ולסיכום, השדות האלקטרומגנטיים בהתקן הם

$$\vec{\underline{E}} = \left(Ae^{jkz} + Be^{-jkz}\right)\vec{1}_x = \frac{\underline{V}}{d}\frac{e^{-2jk\ell}e^{jkz} - e^{-jkz}}{1-e^{-2jk\ell}}\vec{1}_x = \frac{\underline{V}}{d}\frac{e^{-j\frac{\omega n}{c}\ell}e^{-\alpha\ell}e^{j\frac{\omega n}{c}z}e^{\alpha z} - e^{j\frac{\omega n}{c}\ell}e^{\alpha\ell}e^{-j\frac{\omega n}{c}z}e^{-\alpha z}}{e^{j\frac{\omega n}{c}\ell}e^{\alpha\ell} - e^{-j\frac{\omega n}{c}\ell}e^{-\alpha\ell}}\vec{1}_x$$

$$= \frac{\underline{V}}{d}\frac{e^{j\frac{\omega n}{c}(z-\ell)}e^{\alpha(z-\ell)} - e^{-j\frac{\omega n}{c}(z-\ell)}e^{-\alpha(z-\ell)}}{e^{j\frac{\omega n}{c}\ell}e^{\alpha\ell} - e^{-j\frac{\omega n}{c}\ell}e^{-\alpha\ell}}\vec{1}_x$$

$$\vec{\underline{H}} = \left(-\frac{n}{\eta_0}Ae^{jkz} + \frac{n}{\eta_0}Be^{-jkz}\right)\vec{1}_y = -\frac{n}{\eta_0}\frac{\underline{V}}{d}\frac{e^{-2jk\ell}e^{jkz} + e^{-jkz}}{1-e^{-2jk\ell}}\vec{1}_y$$

$$= -\frac{n}{\eta_0}\frac{\underline{V}}{d}\frac{e^{-j\frac{\omega n}{c}\ell}e^{-\alpha\ell}e^{j\frac{\omega n}{c}z}e^{\alpha z} + e^{j\frac{\omega n}{c}\ell}e^{\alpha\ell}e^{-j\frac{\omega n}{c}z}e^{-\alpha z}}{e^{j\frac{\omega n}{c}\ell}e^{\alpha\ell} - e^{-j\frac{\omega n}{c}\ell}e^{-\alpha\ell}}\vec{1}_y = -\frac{n}{\eta_0}\frac{\underline{V}}{d}\frac{e^{j\frac{\omega n}{c}(z-\ell)}e^{\alpha(z-\ell)} + e^{-j\frac{\omega n}{c}(z-\ell)}e^{-\alpha(z-\ell)}}{e^{j\frac{\omega n}{c}\ell}e^{\alpha\ell} - e^{-j\frac{\omega n}{c}\ell}e^{-\alpha\ell}}\vec{1}_y$$

<u>סעיף ד</u>

ההספק הוא האינטגרל על צפיפות ההספק, כלומר אינטגרל משטחי על וקטור פוינטינג.

וקטור פוינטינג המרוכב :

$$\vec{S}=\frac{1}{2}\underline{\vec{E}}\times\underline{\vec{H}}^*=-\frac{1}{2}\frac{n}{\eta_0}\frac{|\underline{V}|^2}{d^2}\frac{e^{j\frac{\omega n}{c}(z-\ell)}e^{\alpha(z-\ell)}-e^{-j\frac{\omega n}{c}(z-\ell)}e^{-\alpha(z-\ell)}}{e^{j\frac{\omega n}{c}\ell}e^{\alpha\ell}-e^{-j\frac{\omega n}{c}\ell}e^{-\alpha\ell}}\frac{e^{-j\frac{\omega n}{c}(z-\ell)}e^{\alpha(z-\ell)}+e^{j\frac{\omega n}{c}(z-\ell)}e^{-\alpha(z-\ell)}}{e^{-j\frac{\omega n}{c}\ell}e^{\alpha\ell}-e^{j\frac{\omega n}{c}\ell}e^{-\alpha\ell}}\vec{1}_z$$

$$=-\frac{1}{2}\frac{n}{\eta_0}\frac{|\underline{V}|^2}{d^2}\frac{e^{2\alpha(z-\ell)}+e^{2j\frac{\omega n}{c}(z-\ell)}-e^{-2j\frac{\omega n}{c}(z-\ell)}-e^{-2\alpha(z-\ell)}}{e^{2\alpha\ell}-e^{2j\frac{\omega n}{c}\ell}-e^{-2j\frac{\omega n}{c}\ell}+e^{-2\alpha\ell}}=-\frac{1}{2}\frac{n}{\eta_0}\frac{|\underline{V}|^2}{d^2}\frac{\sinh 2\alpha(z-\ell)-j\sin 2\frac{\omega n}{c}(z-\ell)}{\cosh 2\alpha\ell-\cos 2\frac{\omega n}{c}\ell}$$

נחשב את ההספק ביחידת אורך Δ_y , וכך נוכל לקבל ביטוי להספק ליחידת אורך של ההתקן :

$$P_{in}=\mathrm{Re}\left(\iint\limits_{\substack{z=0\\0<y<\Delta_y\\0<x<d}}\vec{S}\cdot d\vec{a}\right)=d\Delta_y\,\mathrm{Re}\left(\vec{S}(z=0)\right)=-d\Delta_y\frac{1}{2}\frac{n}{\eta_0}\frac{|\underline{V}|^2}{d^2}\frac{\sinh(-2\alpha\ell)}{\cosh 2\alpha\ell-\cos 2\frac{\omega n}{c}\ell}$$

ולכן ההספק ליחידת אורך הוא

$$\frac{P_{in}}{\Delta_y}=\frac{1}{2}\frac{n}{\eta_0}\frac{|\underline{V}|^2}{d}\frac{\sinh 2\alpha\ell}{\cosh 2\alpha\ell-\cos 2\frac{\omega n}{c}\ell}\left[\frac{W}{m}\right]$$

<u>סעיף ה</u>

נחשב ראשית את ההספק הראקטיבי :

$$P_{reactive}=\mathrm{Im}\left(\iint\limits_{\substack{z=0\\0<y<\Delta_y\\0<x<d}}\vec{S}\cdot d\vec{a}\right)=d\Delta_y\,\mathrm{Im}\left(\vec{S}(z=0)\right)=-\Delta_y\frac{1}{2}\frac{n}{\eta_0}\frac{|\underline{V}|^2}{d}\frac{\sin 2\frac{\omega n}{c}\ell}{\cosh 2\alpha\ell-\cos 2\frac{\omega n}{c}\ell}$$

וכעט את הפרש האנרגיות הממוצעות :

$$\langle W\rangle=2j\omega\left(\iiint\limits_V\frac{1}{4}\underline{\vec{D}}\cdot\underline{\vec{E}}dv-\iiint\limits_V\frac{1}{4}\underline{\vec{B}}\cdot\underline{\vec{H}}dv\right)=j\omega\frac{1}{2}\left(\varepsilon\int\limits_{x=0}^{d}\int\limits_{y=0}^{\Delta_y}\int\limits_{z=0}^{\ell}\left|\underline{\vec{E}}\right|^2dxdydz-\mu_0\int\limits_{x=0}^{d}\int\limits_{y=0}^{\Delta_y}\int\limits_{z=0}^{\ell}\left|\underline{\vec{H}}\right|^2dxdydz\right)$$

$$=j\omega d\frac{|\underline{V}|^2}{d^2}\Delta_y\frac{1}{2}\left(\varepsilon\int\limits_{z=0}^{\ell}\left|\frac{e^{j\frac{\omega n}{c}(z-\ell)}e^{\alpha(z-\ell)}-e^{-j\frac{\omega n}{c}(z-\ell)}e^{-\alpha(z-\ell)}}{e^{j\frac{\omega n}{c}\ell}e^{\alpha\ell}-e^{-j\frac{\omega n}{c}\ell}e^{-\alpha\ell}}\right|^2dz-\mu_0\frac{n^2}{\eta_0^2}\int\limits_{z=0}^{\ell}\left|\frac{e^{j\frac{\omega n}{c}(z-\ell)}e^{\alpha(z-\ell)}+e^{-j\frac{\omega n}{c}(z-\ell)}e^{-\alpha(z-\ell)}}{e^{j\frac{\omega n}{c}\ell}e^{\alpha\ell}-e^{-j\frac{\omega n}{c}\ell}e^{-\alpha\ell}}\right|^2dz\right)$$

$$=j\omega\frac{|\underline{V}|^2}{d}\Delta_y\frac{1}{2}\left(\begin{array}{l}\varepsilon\int\limits_{z=0}^{\ell}\frac{e^{2\alpha(z-\ell)}-e^{2j\frac{\omega n}{c}(z-\ell)}-e^{-2j\frac{\omega n}{c}(z-\ell)}+e^{-2\alpha(z-\ell)}}{e^{2\alpha\ell}-e^{2j\frac{\omega n}{c}\ell}-e^{-2j\frac{\omega n}{c}\ell}+e^{-2\alpha\ell}}dz\\-\varepsilon_0^2n^2\int\limits_{z=0}^{\ell}\frac{e^{2\alpha(z-\ell)}+e^{2j\frac{\omega n}{c}(z-\ell)}+e^{-2j\frac{\omega n}{c}(z-\ell)}+e^{-2\alpha(z-\ell)}}{e^{2\alpha\ell}-e^{2j\frac{\omega n}{c}\ell}-e^{-2j\frac{\omega n}{c}\ell}+e^{-2\alpha\ell}}dz\end{array}\right)$$

$$=j\omega\varepsilon\frac{|\underline{V}|^2}{d}\Delta_y\frac{1}{2}\int\limits_{z=0}^{\ell}\frac{\cosh 2\alpha(z-\ell)-\cos 2\frac{\omega n}{c}(z-\ell)-\cosh 2\alpha(z-\ell)-\cos 2\frac{\omega n}{c}(z-\ell)}{\cosh 2\alpha\ell-\cos 2\frac{\omega n}{c}\ell}dz$$

$$=-\frac{j\omega\varepsilon\frac{|\underline{V}|^2}{d}\Delta_y}{\cosh 2\alpha\ell-\cos 2\frac{\omega n}{c}\ell}\int\limits_{z=0}^{\ell}\cos 2\frac{\omega n}{c}(z-\ell)dz$$

ואכן קיבלנו שמתקיים :

$$-\frac{j\omega\varepsilon\frac{\underline{V}^2}{d}\Delta_y}{\cosh 2\alpha\ell-\cos 2\frac{\omega n}{c}\ell}\frac{\sin 2\frac{\omega n}{c}\ell}{2\frac{\omega n}{c}}=-j\Delta_y\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}\sqrt{\varepsilon_r}}\varepsilon_0\varepsilon_r\frac{|\underline{V}|^2}{d}\frac{\sin 2\frac{\omega n}{c}\ell}{\cosh 2\alpha\ell-\cos 2\frac{\omega n}{c}\ell}$$

$$=-\Delta_y\frac{1}{2}\frac{\sqrt{\varepsilon_r}\sqrt{\varepsilon_0}}{\sqrt{\mu_0}}\frac{|\underline{V}|^2}{d}\frac{\sin 2\frac{\omega n}{c}\ell}{\cosh 2\alpha\ell-\cos 2\frac{\omega n}{c}\ell}=j\,\mathrm{Im}\left(\iint\limits_{\substack{z=0\\0<y<\Delta_y\\0<x<d}}\vec{S}\cdot d\vec{a}\right)$$

משפט פוינטינג המרוכב - פתרון לתרגיל 2

<u>סעיף א</u>

מנתוני הבעיה, אין תלות של השדות האלקטרומגנטיים בקואורדינאטות x ו y.

מרציפות השדה החשמלי המשיקי ורציפות השדה המגנטי הניצב, ומההנחה שהשדות מתאפסים מחוץ להתקן, נקבל שהשדה החשמלי מקיים

$$\underline{\vec{E}}=E_x(z)\vec{1}_x$$

ולכן, מחוק פרדי נקבל

$$\vec{\nabla}\times\underline{\vec{E}}=\begin{vmatrix}\vec{1}_x & \vec{1}_y & \vec{1}_z\\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z}\\ E_x & 0 & 0\end{vmatrix}=\frac{\partial}{\partial z}E_x\vec{1}_y=-j\omega\mu_0\underline{\vec{H}}$$

ולכן $\underline{\vec{H}}=H_y\vec{1}_y$. מחוק אמפר:

$$\vec{\nabla}\times\underline{\vec{H}}=\begin{vmatrix}\vec{1}_x & \vec{1}_y & \vec{1}_z\\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z}\\ 0 & H_y & 0\end{vmatrix}=\frac{\partial}{\partial z}H_y=j\omega\varepsilon_0\underline{\vec{E}}$$

כלומר

$$\begin{cases}\underline{H}_y=-\frac{1}{j\omega\mu_0}\frac{\partial}{\partial z}\underline{E}_x\\ \frac{\partial}{\partial z}\underline{H}_y=j\omega\varepsilon_0\underline{E}_x\end{cases}\Rightarrow\frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{1}{j\omega\mu_0}\frac{\partial}{\partial z}\underline{E}\right)=-\frac{1}{j\omega\mu_0}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\underline{E}=j\omega\varepsilon_0\underline{E}_x\Rightarrow\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}+\frac{\omega^2}{c^2}\right)\underline{E}_x=0$$

והפתרון הכללי הוא

$$\underline{E}_x=Ae^{j\beta z}+Be^{-j\beta z}$$

$$\underline{H}_y=\frac{1}{\eta_0}\left(Be^{-j\beta z}-Ae^{j\beta z}\right),\qquad\beta\triangleq\frac{\omega}{c},\qquad\eta_0\triangleq\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}$$

נאלץ כעת תנאי שפה לקבלת הפתרון הפרטי.

מאילוץ המתח על המוליך ב $z=0$ נקבל

$$-\overline{V}_L=-\int_0^d\underline{E}_x(z=0)\,dy\Rightarrow\underline{E}_x(z=0)=\frac{\overline{V}_L}{h}$$

$$\Rightarrow\underline{E}_x(z=0)=A+B=\frac{\overline{V}_L}{h}$$

מאילוץ הזרם על המוליך ב $z=0$ נקבל

$$\vec{1}_n\times\left(\cancel{\underline{\vec{H}}_{out}}-\underline{\vec{H}}_{in}\right)=\vec{1}_z\times\left(-\underline{\vec{H}}_{in}\right)=\underline{H}_y(z=0)=\frac{\overline{I}_L}{\ell}$$

$$\Rightarrow\underline{H}_y(z=0)=\frac{1}{\eta_0}(B-A)=\frac{\overline{I}_L}{\ell}\Rightarrow B-A=\frac{\eta_0\overline{I}_L}{\ell}$$

ואם נפתור את שתי המשוואות נקבל

$$\begin{cases} A+B=\dfrac{\bar{V}_L}{h} \\ B=A+\dfrac{\eta_0\bar{I}_L}{\ell} \end{cases} \Rightarrow\ 2A+\frac{\eta_0\bar{I}_L}{\ell}=\frac{\bar{V}_L}{h}\ \Rightarrow \begin{cases} A=\dfrac{\bar{V}_L}{2h}-\dfrac{\eta_0\bar{I}_L}{2\ell} \\ B=\dfrac{\bar{V}_L}{2h}+\dfrac{\eta_0\bar{I}_L}{2\ell} \end{cases}$$

ולכן הפתרון הפרטי הוא

$$\underline{E}_x=\frac{1}{2}\left(\frac{\bar{V}_L}{h}-\frac{\eta_0\bar{I}_L}{\ell}\right)e^{j\beta z}+\left(\frac{\bar{V}_L}{h}+\frac{\eta_0\bar{I}_L}{\ell}\right)e^{-j\beta z},\quad \beta\triangleq\frac{\omega}{c}$$

$$\underline{H}_y=\frac{1}{2}\left(\frac{\bar{V}_L}{\eta_0 h}+\frac{\bar{I}_L}{\ell}\right)e^{-j\beta z}-\frac{1}{2}\left(\frac{\bar{V}_L}{\eta_0 h}-\frac{\bar{I}_L}{\ell}\right)e^{j\beta z},\quad \eta_0\triangleq\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}$$

או

$$\underline{E}_x=\frac{\bar{V}_L}{h}\cos\beta z-j\frac{\eta_0\bar{I}_L}{\ell}\sin\beta z$$

$$\underline{H}_y=-j\frac{\bar{V}_L}{\eta_0 h}\sin\beta z+\frac{\bar{I}_L}{\ell}\cos\beta z$$

<u>סעיף ב</u>

נחשב את וקטור פוינטינג:

$$\begin{aligned}\underline{\vec{S}}&=\frac{1}{2}\underline{\vec{E}}\times\underline{\vec{H}}^*=\frac{1}{2}\left(\frac{\bar{V}_L}{h}\cos\beta z-j\frac{\eta_0\bar{I}_L}{\ell}\sin\beta z\right)\left(j\frac{\bar{V}_L}{\eta_0 h}\sin\beta z+\frac{\bar{I}_L}{\ell}\cos\beta z\right)\vec{1}_z\\
&=\frac{1}{2}\left(j\frac{\bar{V}_L^2}{\eta_0 h^2}\cos\beta z\sin\beta z+\frac{\bar{V}_L\bar{I}_L}{h\ell}\sin^2\beta z+\frac{\bar{V}_L\bar{I}_L}{h\ell}\cos^2\beta z-j\frac{\bar{I}_L^2\eta_0}{\ell^2}\cos\beta z\sin\beta z\right)\vec{1}_z\\
&=\frac{1}{2}\left(j\left(\frac{\bar{V}_L^2}{\eta_0 h^2}-\frac{\bar{I}_L^2\eta_0}{\ell^2}\right)\cos\beta z\sin\beta z+\frac{\bar{V}_L\bar{I}_L}{h\ell}\right)\vec{1}_z\\
&=\frac{1}{2}\frac{\bar{V}_L\bar{I}_L}{h\ell}\vec{1}_z+\frac{j}{4}\left(\frac{\bar{V}_L^2}{\eta_0 h^2}-\frac{\bar{I}_L^2\eta_0}{\ell^2}\right)\sin(2\beta z)\vec{1}_z\end{aligned}$$

<u>סעיף ג</u>

לחישוב ההספק על המוליך הימני, נקבע אינטגרציה של צפיפות ההספק, הלא היא וקטור פוינטינג, על המוליך. כמובן שניקח את החלק הממשי של צפיפות זו, כי הספק ממשי זה מועבר למוליך:

$$P=\mathrm{Re}\left\{\iint_{\ell\times h}\vec{S}(z=0)\cdot d\vec{a}\right\}=\frac{1}{2}\frac{\bar{V}_L\bar{I}_L}{h\ell}\iint_{\ell\times h}\vec{1}_z\cdot\vec{1}_z\,da=\frac{1}{2}\bar{V}_L\bar{I}_L$$

<u>סעיף ד</u>

באופן לא מפתיע, מכיוון שהמוליך מציית לחוק אוהם, קיבלנו את הביטוי

$$P=\frac{1}{2}VI$$

<u>סעיף ה</u>

כדי לקבל וקטור פוינטינג ממשי, נדרוש

$$\frac{1}{4}\left(\frac{\bar{V}_L^2}{\eta_0 h^2}-\frac{\bar{I}_L^2\eta_0}{\ell^2}\right)\sin(2\beta z)=0$$

$$\Rightarrow\ \frac{\bar{V}_L^2}{\eta_0 h^2}=\frac{\bar{I}_L^2\eta_0}{\ell^2}\ \Rightarrow\ \frac{\bar{V}_L}{\bar{I}_L}=\eta_0\frac{h}{\ell}$$

<u>סעיף ו</u>

אם המוליך יהיה מושלם, אזי מפל המתח עליו הוא אפס, ולכן נוכל לקחת את הפתרון מסעיף א ולהציב $\bar{V}_L=0$:

$$\underline{E}_x=-j\frac{\eta_0\bar{I}_L}{\ell}\sin\beta z$$

$$\underline{H}_y=\frac{\bar{I}_L}{\ell}\cos\beta z$$

נשים לב שבמצב זה, וקטור פוינטינג יהיה מדומה טהור, כלומר לא יתבזבז הספק במעגל.

קוואזי-סטאטיקה

קוואזי-סטאטיקה - פתרון לתרגיל 1

סעיף א

משמעות התנאי $d << \ell$ היא שההתקן צר מאוד בכיוון x, ולכן השדות האלקטרומגנטיים לא ישתנו בכיוון זה.

משמעות התנאי $\frac{\omega\ell}{c} << 1$ היא שאורך הגל של מקור המתח המעורר את המערכת, $\lambda = \frac{2\pi c}{\omega}$, גדול מאוד מהמימד האופייני של המערכת, ℓ. לכן, אנו נמצאים בקירוב הקוואזי-סטאטי של משוואות מקסוול.

סעיף ב

מרציפות השדה החשמלי במעבר בין המוליכים, צריך להתקיים בהתקן:

$$\underline{E}_y\left(x=0,d\right) = \underline{E}_z\left(x=0,d\right) = 0$$

ומכיוון שהסקנו כבר שאין שינוי של השדות בציר x, הרי ש

$$\underline{E}_y = \underline{E}_z = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\vec{E}} = \underline{E}_x \vec{1}_x$$

מכיוון שאין מסלול לזרימה בהתקן, נסיק שההתקן מתנהג כקבל, ולכן נהיה במשטר אלקטרו-קוואזי-סטאטי. כלומר, המשוואות שיתארו את השדות בהתקן הן

$$\vec{\nabla}\times\underline{\vec{E}} = 0$$

$$\vec{\nabla}\cdot\varepsilon_0\underline{\vec{E}} = \rho$$

$$\vec{\nabla}\times\underline{\vec{H}} = j\omega\varepsilon_0\underline{\vec{E}}$$

ולכן

$$\vec{\nabla}\times\underline{\vec{E}} = \begin{vmatrix} \vec{1}_x & \vec{1}_y & \vec{1}_z \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \underline{E}_x & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{\partial}{\partial z}\underline{E}_x = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{E}_x = Const$$

מאילוץ מקור המתח ב $z=-\ell$ נקבל

$$V\left(x=d\right) - V\left(x=0\right) = -\int_{x=0}^{d} \underline{E}_x dx$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\vec{E}} = -\frac{\underline{V}_0}{d}\vec{1}_x$$

וכך נחשב את השדה המגנטי:

$$\vec{\nabla}\times\underline{\vec{H}} = \begin{vmatrix} \vec{1}_x & \vec{1}_y & \vec{1}_z \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \underline{H}_x & \underline{H}_y & \underline{H}_z \end{vmatrix} = -\frac{\partial}{\partial z}\underline{H}_y\vec{1}_x + \frac{\partial}{\partial z}\underline{H}_x\vec{1}_y = -j\omega\varepsilon_0\frac{\underline{V}_0}{d}\vec{1}_x$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial z}\underline{H}_y = j\omega\varepsilon_0\frac{\underline{V}_0}{d} \quad \Rightarrow \quad \underline{H}_y = j\omega\varepsilon_0\frac{\underline{V}_0}{d}z + Const$$

ובגלל הקיר המגנטי, צריך להתקיים

$$\underline{\vec{H}}\left(z=0\right) = 0$$

ולכן

$$\underline{\vec{H}} = j\omega\varepsilon_0\frac{\underline{V}_0}{d}z\vec{1}_y$$

סעיף ג

חישוב צפיפויות האנרגיה בהתקן:

$$\left\langle w_e\right\rangle = \frac{1}{4}\underline{\vec{D}}\cdot\underline{\vec{E}}^* = \frac{1}{4}\varepsilon_0\left|\underline{\vec{E}}\right|^2 = \frac{1}{4}\varepsilon_0\frac{\left|\underline{V}_0\right|^2}{d^2}$$

$$\left\langle w_m\right\rangle = \frac{1}{4}\underline{\vec{B}}\cdot\underline{\vec{H}}^* = \frac{1}{4}\mu_0\left|\underline{\vec{H}}\right|^2 = -\frac{1}{4}\mu_0\omega^2\varepsilon_0^2\frac{\left|\underline{V}_0\right|^2}{d^2}z^2$$

נבדוק את היחס בין צפיפות האנרגיות, ונוודא שצפיפות האנרגיה החשמלית גדולה בהרבה מצפיפות האנרגיה המגנטית, בהינתן התנאי $\frac{\omega\ell}{c}<<1$. אכן מתקיים:

$$\left|\frac{\langle w_e\rangle}{\langle w_m\rangle}\right|=\frac{\frac{1}{4}\varepsilon_0\frac{|\underline{V}_0|^2}{d^2}}{\frac{1}{4}\mu_0\omega^2\varepsilon_0^2\frac{|\underline{V}_0|^2}{d^2}z^2}=\frac{1}{\mu_0\omega^2\varepsilon_0 z^2}<\frac{1}{\mu_0\varepsilon_0\omega^2\ell^2}=\frac{c^2}{\omega^2\ell^2}>>1$$

סעיף ד

ראשית נחשב את וקטור פוינטינג המרוכב:

$$\underline{\vec{S}}=\frac{1}{2}\underline{\vec{E}}\times\underline{\vec{H}}^*=\frac{1}{2}\left(-\frac{\underline{V}_0}{d}\vec{1}_x\right)\times\left(-j\omega\varepsilon_0\frac{\underline{V}_0}{d}z\vec{1}_y\right)=\frac{1}{2}\frac{|\underline{V}_0|^2}{d^2}j\omega\varepsilon_0 z$$

מכיוון שאין הפסדים אוהמים בהתקן, נבדוק שמתקיים משפט פוינטינג הבא:

$$\vec{\nabla}\cdot\underline{\vec{S}}=2j\omega\langle w_e\rangle$$

ואכן:

$$\vec{\nabla}\cdot\underline{\vec{S}}=\vec{\nabla}\cdot\left(\frac{1}{2}\frac{|\underline{V}_0|^2}{d^2}j\omega\varepsilon_0 z\right)=j\frac{1}{2}\frac{|\underline{V}_0|^2}{d^2}\omega\varepsilon_0$$

$$2j\omega\langle w_e\rangle=2j\omega\frac{1}{4}\varepsilon_0\frac{|\underline{V}_0|^2}{d^2}=j\frac{1}{2}\frac{|\underline{V}_0|^2}{d^2}\omega\varepsilon_0$$

סעיף ה

את הזרם המשטחי על המוליכים נחשב מתנאי השפה. על המוליך העליון:

$$\vec{1}_n\times\left(\cancel{\underline{\vec{H}}_{out}}-\underline{\vec{H}}_{in}\right)=\underline{\vec{J}}_s$$

$$\Rightarrow\ \underline{\vec{J}}_s=\vec{1}_x\times\left(-j\omega\varepsilon_0\frac{\underline{V}_0}{d}z\vec{1}_y\right)=-j\omega\varepsilon_0\frac{\underline{V}_0}{d}z\vec{1}_z$$

ועל המוליך התחתון:

$$\vec{1}_n\times\left(\cancel{\underline{\vec{H}}_{out}}-\underline{\vec{H}}_{in}\right)=\underline{\vec{J}}_s$$

$$\Rightarrow\ \underline{\vec{J}}_s=\left(-\vec{1}_x\right)\times\left(-j\omega\varepsilon_0\frac{\underline{V}_0}{d}z\vec{1}_y\right)=j\omega\varepsilon_0\frac{\underline{V}_0}{d}z\vec{1}_z$$

ולכן, אימפדנס הכניסה של ההתקן, ליחידת אורך, הוא:

$$\frac{\underline{Z}_{in}}{\ell}=\frac{\underline{V}_0}{\frac{\underline{I}_{in}}{\ell}}=\frac{\underline{V}_0}{\int_{z=-\ell}^{0}\underline{J}_s dz}=\frac{\underline{V}_0}{j\omega\varepsilon_0\frac{\underline{V}_0}{d}\left.\frac{z^2}{2}\right|_{-\ell}^{0}}=\frac{2d}{j\omega\varepsilon_0\ell^2}$$

סעיף ו

ניתן לומר שמולנו עומד מעגל מקובץ הכולל מקור מתח הרמוני וקבל עם קיבול $C=\varepsilon_0\frac{1}{2}\frac{\ell^2}{d}$

קוואזי-סטאטיקה - פתרון לתרגיל 5

<u>סעיף א</u>

מהנתונים נסיק שאנו במשטר קוואזי-סטטי. מכיוון שיש מסלול זרימה סגור, אנו במשטר של מגנו-קוואזי-סטאטיקה. כלומר אנו נעבוד עם משואות מקסוול המקורבות הבאות:

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -j\omega\mu_0\vec{H}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{H} = \vec{J}$$

מתנאי הרציפות של השדה המגנטי הניצב, ומהעובדה שההתקן צר מאוד בכיוון x, נסיק ש $\underline{H}_x = 0$.

מתנאי הרציפות של השדה החשמלי המשיק, נסיק ש $\underline{\vec{E}} = \underline{E}_x\vec{1}_x$, ולכן

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{1}_x & \vec{1}_y & \vec{1}_z \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \underline{E}_x & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{\partial}{\partial z}\underline{E}_x\vec{1}_y = -j\omega\mu_0\vec{H}$$

ולכן $\underline{\vec{H}} = \underline{H}_y\vec{1}_y$.

למציאת השדה המגנטי בתוך ההתקן, נשתמש בתנאי הרציפות של השדה המגנטי המשיק על הלוח העליון, ונקבל:

$$\vec{1}_n\times\left(\cancel{\underline{\vec{H}}_{out}} - \underline{\vec{H}}_{in}\right) = \underline{\vec{J}}_s = \underline{K}_0\vec{1}_z$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\vec{H}} = -\underline{K}_0\vec{1}_y$$

וזאת משום שחוק קירכהוף לזרמים מתקיים, כלומר הזרם על הלוח העליון חייב להיות שווה לזרם שמאלץ המקור.

<u>סעיף ב</u>

נשתמש בפיתוח שעשינו כבר לחוק פרדי:

$$\frac{\partial}{\partial z}\underline{E}_x = -j\omega\mu_0\underline{H}_y = j\omega\mu_0\underline{K}_0 \quad\Rightarrow\quad \underline{\vec{E}} = \left(j\omega\mu_0\underline{K}_0 z + Const\right)\vec{1}_x$$

ומכיוון שהלוח הימני מאלץ

$$\vec{E}\left(z=0\right) = 0$$

נקבל

$$\underline{\vec{E}} = j\omega\mu_0\underline{K}_0 z\vec{1}_x$$

<u>סעיף ג</u>

חישוב כיסוי המטען המשטחי:

על הלוח העליון:

$$\rho_s = \vec{1}_n\cdot\left(\cancel{\underline{\vec{E}}_{out}} - \underline{\vec{E}}_{in}\right) = -j\omega\mu_0\underline{K}_0 z$$

על הלוח התחתון:

$$\vec{1}_n\cdot\left(\cancel{\underline{\vec{E}}_{out}} - \underline{\vec{E}}_{in}\right) = j\omega\mu_0\underline{K}_0 z = -\rho_s$$

ועל הלוח הימני אין הצטברות מטען.

<u>סעיף ד</u>

צפיפות האנרגיה המגנטית הממוצעת:

$$\left\langle w_m\right\rangle = \frac{1}{4}\underline{\vec{B}}\cdot\underline{\vec{H}} = \frac{1}{4}\mu_0\left|\underline{\vec{H}}\right|^2 = \frac{1}{4}\mu_0\underline{K}_0^2$$

צפיפות האנרגיה החשמלית הממוצעת:

$$\left\langle w_e\right\rangle = \frac{1}{4}\underline{\vec{D}}\cdot\underline{\vec{E}} = \frac{1}{4}\varepsilon_0\left|\underline{\vec{E}}\right|^2 = \frac{1}{4}\varepsilon_0\mu_0^2\omega^2\underline{K}_0^2 z^2$$

וכאשר נבדוק סדרי גודל:

$$\frac{\left\langle w_m\right\rangle}{\left\langle w_e\right\rangle} = \frac{\frac{1}{4}\mu_0\underline{K}_0^2}{\frac{1}{4}\varepsilon_0\mu_0^2\omega^2\underline{K}_0^2 z^2} = \frac{1}{\varepsilon_0\mu_0\omega^2 z^2} \le \frac{c^2}{\omega^2\ell^2} >> 1$$

ואכן, מנתוני השאלה על התדר הנמוך מאוד, האנרגיה המגנטית גדולה בהרבה מהאנרגיה החשמלית האגורה בהתקן.

סעיף ה

עבור יחידת אורך Δ_y, זרם הכניסה הוא

$$\underline{I}_{in} = \vec{\underline{J}}_s \Delta_y = \underline{K}_0 \Delta_y$$

לחישוב המתח, נבצע אינטרגציה:

$$\Delta \underline{V} = -\int_{x=0}^{d} \underline{E}\left(z=-\ell\right) dx = j\omega\mu_0 \underline{K}_0 d\ell$$

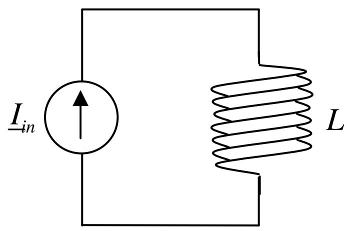
ולכן אימפדנס הכניסה, בהינתן יחידת אורך Δ_y, הוא

$$\underline{Z}_{in} = \frac{\Delta V}{\underline{I}_{in}} = \frac{j\omega\mu_0 \underline{K}_0 d\ell}{\underline{K}_0 \Delta_y} = j\omega \frac{\mu_0 d\ell}{\Delta_y}$$

סעיף ו

מהתוצאה של הסעיף הקודם, קל לראות שניתן להחליף את ההתקן שלנו במעגל מקובץ עם מקור זרם $\underline{I}_{in} = \underline{K}_0 \Delta_y$

וסליל שהשראותו היא $L = \frac{\mu_0 d\ell}{\Delta_y}$, כאשר לוקחים חתיכה באורך Δ_y מההתקן. כלומר:



קווזי-סטאטיקה - פתרון לתרגיל 7

סעיף א

בהנחה שהשדות מתאפסים מחוץ להתקן, ובהנחה שההתקן אינסופי בכיוון y, וגם צר מאוד בכיוון z, נקבל ש

$$\vec{\underline{E}} = \underline{E}_z \vec{1}_z$$

במשטר מגנטו-קווי-סטאטי:

$$\vec{\nabla} \times \vec{\underline{H}} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\underline{E}} = -j\omega\mu_0\mu_r \vec{\underline{H}}$$

$$\begin{vmatrix} \vec{1}_x & \vec{1}_y & \vec{1}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ \underline{H}_x & \underline{H}_y & 0 \end{vmatrix} = \vec{1}_z \left(\frac{\partial}{\partial x} \underline{H}_y - \frac{\partial}{\partial y} \underline{H}_x \right) = 0 \;\Rightarrow\; \underline{H}_y = Const \cdot \vec{1}_y$$

$$\begin{vmatrix} \vec{1}_x & \vec{1}_y & \vec{1}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \underline{E}_z \end{vmatrix} = -\vec{1}_y \left(\frac{\partial}{\partial x} \underline{E}_z \right) = -j\omega\mu_0\mu_r \vec{\underline{H}}$$

מתנאי השפה:

$$\vec{1}_n \times \left(\cancel{\vec{\underline{H}}_{out}} - \vec{\underline{H}}_{in} \right) = \vec{\underline{J}}_S = \vec{\underline{K}}_0 = \underline{K}_0 \vec{1}_z$$

$$\Rightarrow -\vec{1}_x \times \left(-\underline{H}_y \vec{1}_y \right) = \underline{K}_0 \vec{1}_z \;\Rightarrow\; \vec{\underline{H}} = \underline{K}_0 \vec{1}_y$$

סעיף ב

מחוק פרדיי:

$$\frac{\partial}{\partial x} \underline{E}_z = j\omega\mu_0\mu_r \underline{K}_0 \;\Rightarrow\; \underline{E}_z = j\omega\mu_0\mu_r \underline{K}_0 x + C$$

ובגלל ההבדלים בחדירות המגנטית בהתקן נקבל

$$\vec{\underline{E}}_z = \begin{cases} j\omega\mu_0\mu_1 \underline{K}_0 x + C_1, & -\ell < x < 0 \\ j\omega\mu_0\mu_2 \underline{K}_0 x + C_2, & 0 < x < \ell \end{cases}$$

כעת נדרוש תנאי שפה ב $x = \ell$:

$$\underline{\vec{E}}(x=\ell)=j\omega\mu_0\mu_2\underline{K}_0\ell+C_2=0 \;\Rightarrow\; C_2=-j\omega\mu_0\mu_2\underline{K}_0\ell$$

וגם רציפות במעבר בין החומרים:

$$\underline{\vec{E}}(x=0^+)=\underline{\vec{E}}(x=0^-)$$
$$C_1=-j\omega\mu_0\mu_2\underline{K}_0\ell$$

ולסיכום

$$\underline{E}_z=\begin{cases} j\omega\mu_0\underline{K}_0(\mu_1 x-\mu_2\ell), & -\ell<x<0 \\ j\omega\mu_0\mu_2\underline{K}_0(x-\ell), & 0<x<\ell \end{cases}$$

<u>סעיף ג</u>

נחשב את האנרגיות:

$$\langle w_e\rangle=\frac{1}{4}\underline{\vec{D}}\cdot\underline{\vec{E}}=\begin{cases} \frac{1}{4}\varepsilon_0\left|j\omega\mu_0\underline{K}_0(\mu_1 x-\mu_2\ell)\right|^2, & -\ell<x<0 \\ \frac{1}{4}\varepsilon_0\left|j\omega\mu_0\mu_2\underline{K}_0(x-\ell)\right|^2, & 0\le x<\ell \end{cases}$$

$$\langle w_m\rangle=\begin{cases} \frac{1}{4}\mu_0\mu_1\left|\underline{K}_0\right|^2, & -\ell<x<0 \\ \frac{1}{4}\mu_0\mu_2\left|\underline{K}_0\right|^2, & 0\le x<\ell \end{cases}$$

ואכן מתקיים

$$\frac{\langle w_m\rangle}{\langle w_e\rangle}=\begin{cases} \frac{\mu_0\mu_1}{\varepsilon_0\left|j\omega\mu_0(\mu_1 x-\mu_2\ell)\right|^2}, -\ell<x<0 \\ \frac{\mu_0\mu_2}{\varepsilon_0\left|j\omega\mu_0\mu_2(x-\ell)\right|^2}, & 0\le x<\ell \end{cases} \le \begin{cases} \frac{\mu_0\mu_1}{\varepsilon_0\omega^2\mu_0^2(-\mu_1\ell-\mu_2\ell)^2}, -\ell<x<0 \\ \frac{\mu_0\mu_2}{\varepsilon_0\omega^2\mu_0^2\mu_2^2(-\ell)^2}, & 0\le x<\ell \end{cases}$$

$$=\begin{cases} \frac{\mu_1}{\varepsilon_0\mu_0\omega^2\ell^2(\mu_1+\mu_2)^2}, & -\ell<x<0 \\ \frac{1}{\varepsilon_0\mu_0\omega^2\mu_2\ell^2}, & 0\le x<\ell \end{cases} = \begin{cases} \frac{c^2}{\omega^2\ell^2}\frac{\mu_1}{(\mu_1+\mu_2)^2}, & -\ell<x<0 \\ \frac{c^2}{\omega^2\ell^2}\frac{1}{\mu_2}, & 0\le x<\ell \end{cases} >>1$$

<u>סעיף ד</u>

משפט פוינטניג, עבור הקירוב בו אנו נמצאים, אומר כי

$$\vec{\nabla}\cdot\underline{\vec{S}}=-j2\omega\langle w_m\rangle$$

וקטור פוינטינג הוא:

$$\underline{\vec{S}}=\frac{1}{2}\underline{\vec{E}}\times\underline{\vec{H}}^*=\frac{1}{2}\begin{cases} -j\omega\mu_0\underline{K}_0(\mu_1 x-\mu_2\ell)\underline{K}_0\vec{1}_x, & -\ell<x<0 \\ -j\omega\mu_0\mu_2\underline{K}_0(x-\ell)\underline{K}_0\vec{1}_x, & 0<x<\ell \end{cases}$$

ולכן

$$\vec{\nabla}\cdot\underline{\vec{S}}=\frac{1}{2}\begin{cases} -j\omega\mu_0\mu_1\underline{K}_0^2, & -\ell<x<0 \\ -j\omega\mu_0\mu_2\underline{K}_0^2, & 0<x<\ell \end{cases}$$

ומצד שני

$$\langle w_m\rangle=\begin{cases} \frac{1}{4}\mu_0\mu_1\left|\underline{K}_0\right|^2, & -\ell<x<0 \\ \frac{1}{4}\mu_0\mu_2\left|\underline{K}_0\right|^2, & 0\le x<\ell \end{cases}$$

מ.ש.ל.

קוואזי-סטאטיקה - פתרון לתרגיל 7

<u>סעיף א</u>

ראשית נציין כי משטר העבודה הוא מגנטו-קוואזי-סטאטי, מכיוון שישנה זרימה בהתקן.

מכיוון שההתקן אינסופי בכיוון y, אין תלות של השדות ב y, ומכיוון שההתקן צר מאוד בכיוון z, אין תלות של השדות ב z. מדרישת רציפות השדה החשמלי המשיקי, נקבל באופן מיידי ש $\underline{\vec{E}} = \underline{E}_z(z)\vec{1}_z$.

לחישוב השדות בהתקן, נשתמש כמובן במשוואות מקסוול בקירוב המגנטו-קוואזי-סטאטי:

$$\begin{cases}\vec{\nabla}\times\underline{\vec{E}} = -j\omega\mu_0\mu_r\underline{\vec{H}} \\ \vec{\nabla}\times\underline{\vec{H}} = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\begin{vmatrix}\vec{1}_x & \vec{1}_y & \vec{1}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_z\end{vmatrix} = -\dfrac{\partial}{\partial x}E_z\vec{1}_y = -j\omega\mu_0\mu_r\underline{\vec{H}} \Rightarrow \underline{\vec{H}} = \underline{H}_y\vec{1}_y \\ \begin{vmatrix}\vec{1}_x & \vec{1}_y & \vec{1}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & H_y & 0\end{vmatrix} = \dfrac{\partial}{\partial x}H_y\vec{1}_z = 0 \Rightarrow \underline{H}_y = Const\end{cases}$$

נאלץ את תנאי השפה עבור עירור הזרם ב $x=-\ell$:

$$\vec{1}_n\times\left(\vec{H}_{out}-\vec{H}_{in}\right) = -\vec{1}_x\times\left(-\vec{H}_y\vec{1}_y\right) = \vec{H}_y\vec{1}_z = K_0\vec{1}_z$$

כלומר

$$\underline{\vec{H}} = K_0\vec{1}_z$$

<u>סעיף ב</u>

נמשיך מהסעיף הקודם:

$$\frac{\partial}{\partial x}E_z\vec{1}_y = j\omega\mu_0\mu_r\underline{\vec{H}} \Rightarrow E_z = \begin{cases}j\omega\mu_1K_0x+C_1, & -\ell<x<0 \\ j\omega\mu_2K_0x+C_2, & 0<x<\ell\end{cases}$$

נדרוש את רציפות השדה החשמלי ב $x=0$ (אין הצטברות מטען במשטח ההפרדה):

$$\underline{\vec{E}}\left(x=0^-\right) = \underline{\vec{E}}\left(x=0^+\right) \Rightarrow C_1 = C_2$$

נאלץ את תנאי השפה ב $x=\ell$ (איפוס השדה החשמלי בסמוך למוליך מושלם):

$$E_z\left(z=\ell\right) = j\omega\mu_2K_0\ell + C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = -j\omega\mu_2K_0\ell$$

ולכן

$$E_z = j\omega K_0\begin{cases}\left(\mu_1x-\mu_2\ell\right), & -\ell<x<0 \\ \mu_2\left(x-\ell\right), & 0<x<\ell\end{cases}$$

<u>סעיף ג</u>

האנרגיות האגורות בהתקן:

$$\left\langle w_e\right\rangle = \frac{1}{4}\underline{\vec{D}}\cdot\underline{\vec{E}} = \frac{1}{4}\varepsilon_0\left|\underline{\vec{E}}\right|^2 = \frac{1}{4}\varepsilon_0\omega^2K_0^2\begin{cases}\left(\mu_1x-\mu_2\ell\right)^2, & -\ell<x<0 \\ \mu_2^2\left(x-\ell\right)^2, & 0<x<\ell\end{cases}$$

$$\left\langle w_m\right\rangle = \frac{1}{4}\underline{\vec{B}}\cdot\underline{\vec{H}} = \frac{1}{4}\begin{cases}\mu_1\left|\underline{\vec{H}}\right|^2, & -\ell<x<0 \\ \mu_2\left|\underline{\vec{H}}\right|^2, & 0<x<\ell\end{cases} = \frac{1}{4}\begin{cases}\mu_1K_0^2, & -\ell<x<0 \\ \mu_2K_0^2, & 0<x<\ell\end{cases}$$

נשווה בין האנרגיות. עבור $-\ell<x<0$:

$$\left\langle w_e\right\rangle = \frac{1}{4}\varepsilon_0\omega^2K_0^2\left(\mu_1x-\mu_2\ell\right)^2 < \frac{1}{4}\varepsilon_0\omega^2K_0^2\left(\max^2\left\{\mu_2,\mu_1\right\}\right)\ell^2 << \frac{1}{4}\varepsilon_0\omega^2K_0^2\left(\max^2\left\{\mu_2,\mu_1\right\}\right)\frac{c^2}{\omega^2} \approx \frac{1}{4}\mu_1K_0^2 = \left\langle w_m\right\rangle$$

וכנ"ל עבור $0<x<\ell$:

$$\left\langle w_e\right\rangle = \frac{1}{4}\varepsilon_0\omega^2K_0^2\mu_2^2\left(x-\ell\right)^2 < \frac{1}{4}\varepsilon_0\omega^2K_0^2\mu_2^2\ell^2 << \frac{1}{4}\varepsilon_0\omega^2K_0^2\mu_2^2\frac{c^2}{\omega^2} = \frac{1}{4}K_0^2 = \frac{1}{4}\mu_2K_0^2 = \left\langle w_m\right\rangle$$

כלומר, אכן יש הפרשים של סדרי גודל בין האנרגיות, כאשר מניחים $\ell << \dfrac{c}{\omega}$.

<u>סעיף ד</u>

משפט פוינטינג:

$$\vec{\nabla}\cdot\underline{\vec{S}}+2j\omega\left(\frac{1}{4}\underline{\vec{D}}\cdot\underline{\vec{E}}-\frac{1}{4}\underline{\vec{B}}\cdot\underline{\vec{H}}\right)=-\frac{1}{2}\underline{\vec{J}}^*\cdot\underline{\vec{E}}$$

ומכיוון שאין זרם בהתקן

$$\vec{\nabla}\cdot\underline{\vec{S}}+2j\omega\left(\frac{1}{4}\underline{\vec{D}}\cdot\underline{\vec{E}}-\frac{1}{4}\underline{\vec{B}}\cdot\underline{\vec{H}}\right)=0$$

נחשב עבור $-\ell<x<0$:

$$\vec{\nabla}\cdot\underline{\vec{S}}+2j\omega\left(\frac{1}{4}\underline{\vec{D}}\cdot\underline{\vec{E}}-\frac{1}{4}\underline{\vec{B}}\cdot\underline{\vec{H}}\right)=\vec{\nabla}\cdot\left(\frac{1}{2}\underline{\vec{E}}\times\underline{\vec{H}}^*\right)+2j\omega\left(-\frac{1}{4}\mu_1K_0^2\right)=$$

$$=\vec{\nabla}\cdot\left(-\frac{1}{2}j\omega K_0^2\left(\mu_1x-\mu_2\ell\right)\vec{1}_x\right)+2j\omega\left(-\frac{1}{4}\mu_1K_0^2\right)$$

$$=-\frac{1}{2}j\omega\mu_1K_0^2+2j\omega\left(-\frac{1}{4}\mu_1K_0^2\right)=0$$

נחשב עבור $0<x<\ell$:

$$\vec{\nabla}\cdot\underline{\vec{S}}+2j\omega\left(\frac{1}{4}\underline{\vec{D}}\cdot\underline{\vec{E}}-\frac{1}{4}\underline{\vec{B}}\cdot\underline{\vec{H}}\right)=\vec{\nabla}\cdot\left(\frac{1}{2}\underline{\vec{E}}\times\underline{\vec{H}}^*\right)+2j\omega\left(-\frac{1}{4}\mu_2K_0^2\right)=$$

$$=\vec{\nabla}\cdot\left(-\frac{1}{2}j\omega K_0^2\mu_2\left(x-\ell\right)\vec{1}_x\right)+2j\omega\left(-\frac{1}{4}\mu_2K_0^2\right)$$

$$=-\frac{1}{2}j\omega\mu_2K_0^2+2j\omega\left(-\frac{1}{4}\mu_2K_0^2\right)=0$$

קוואזי-סטאטיקה - פתרון לתרגיל 9

<u>סעיף א</u>

מכיוון שאין מסלול סגור לזרימה, אנו במשטר קוואזי-אלקטרו-סטאטיקה.

<u>סעיף ב</u>

ראשית, $\frac{\partial}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial\varphi}=0$, בגלל שההתקן סימטרי אזימוטאלית וצר בכיוון z.

ידוע שהשדה המגנטי הניצב והשדה החשמלי המשיק עוברים ברציפות את השפה, ולכן

$$\underline{\vec{E}}=E(r)\vec{1}_z$$

מחוק פרדיי:

$$\vec{\nabla}\times\underline{\vec{E}}=0$$

$$\frac{1}{r}\begin{vmatrix}\vec{1}_r & r\vec{1}_\varphi & \vec{1}_z\\ \frac{\partial}{\partial r} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \underline{E}_z\end{vmatrix}=-\vec{1}_\varphi\frac{\partial}{\partial r}\underline{E}_z=0\ \Rightarrow\ \underline{E}_z=\underline{E}_0\vec{1}_z$$

מחוק אמפר:

$$\vec{\nabla}\times\underline{\vec{H}}=j\omega\varepsilon_0\underline{\vec{E}}+\underline{\vec{J}}$$

$$\Rightarrow\ \frac{1}{r}\begin{vmatrix}\vec{1}_r & r\vec{1}_\varphi & \vec{1}_z\\ \frac{\partial}{\partial r} & 0 & 0\\ \underline{H}_r & r\underline{H}_\varphi & 0\end{vmatrix}=\frac{1}{r}\vec{1}_z\frac{\partial}{\partial r}\left(r\underline{H}_\varphi\right)=j\omega\varepsilon_0\underline{E}_z\vec{1}_z\ \Rightarrow\ \frac{\partial}{\partial r}\left(r\underline{H}_\varphi\right)=j\omega\varepsilon_0r\underline{E}_z$$

ולכן $\underline{\vec{H}}=\underline{H}_\varphi\vec{1}_\varphi$.

עבור $r=b$, בגלל שיש שם חומר עבורו $\mu_r\to\infty$, אזי $\underline{\vec{H}}(r=b)=0$.

עבור $r=a$, בגלל אילוץ הזרם המשטחי, $\underline{\vec{H}}(r=b)=\underline{J}_0\vec{1}_\varphi$.

<u>סעיף ג</u>

קיבלנו ש

$$\underline{H}_\varphi(r)=\frac{1}{2}j\omega\varepsilon_0 r\underline{E}_z+\frac{C}{r}$$

ויחד עם שני תנאי השפה, נקבל

$$\begin{cases}\underline{H}_\varphi(r=b)=\frac{1}{2}j\omega\varepsilon_0 b\underline{E}_z+\frac{C}{b}=0\\ \underline{H}_\varphi(r=a)=\frac{1}{2}j\omega\varepsilon_0 a\underline{E}_z+\frac{C}{a}=\underline{J}_0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}C=-\frac{1}{2}j\omega\varepsilon_0 b^2\underline{E}_z\\ \frac{1}{2}j\omega\varepsilon_0 a\underline{E}_z-\frac{j\omega\varepsilon_0 b^2\underline{E}_z}{2a}=\underline{J}_0\end{cases}$$

ולכן

$$\vec{\underline{E}}=\frac{2a\underline{J}_0}{j\omega\varepsilon_0\left(a^2-b^2\right)}\vec{1}_z$$

$$\vec{\underline{H}}=\frac{a\underline{J}_0}{r}\frac{r^2-b^2}{a^2-b^2}\vec{1}_\varphi$$

סעיף ד

מתנאי השפה על השדה המגנטי, על הלוח העליון :

$$\vec{1}_n\times\left(\vec{\underline{H}}_{out}-\vec{\underline{H}}_{in}\right)=\vec{\underline{J}}_s\ \Rightarrow\ \vec{1}_z\times\left(-\frac{a\underline{J}_0}{r}\frac{r^2-b^2}{a^2-b^2}\vec{1}_\varphi\right)=\vec{\underline{J}}_s\ \Rightarrow\ \vec{\underline{J}}_s=\frac{a\underline{J}_0}{r}\frac{r^2-b^2}{a^2-b^2}\vec{1}_r$$

על הלוח התחתון נקבל

$$\vec{\underline{J}}_s=-\frac{a\underline{J}_0}{r}\frac{r^2-b^2}{a^2-b^2}\vec{1}_r$$

ומתנאי השפה עבור השדה החשמלי :

$$\vec{1}_n\cdot\left(\vec{\underline{E}}_{out}-\vec{\underline{E}}_{in}\right)=\frac{\rho_s}{\varepsilon_0}\ \Rightarrow\ \vec{1}_z\cdot\left(-\frac{2a\underline{J}_0}{j\omega\varepsilon_0\left(a^2-b^2\right)}\vec{1}_z\right)=\frac{\rho_s}{\varepsilon_0}\ \Rightarrow\ \rho_s=-\frac{2a\underline{J}_0}{j\omega\left(a^2-b^2\right)}$$

ועל הלוח התחתון מתקיים

$$\rho_s=\frac{2a\underline{J}_0}{j\omega\left(a^2-b^2\right)}$$

<u>סעיף ה</u>

$$\langle w_e\rangle=\frac{1}{4}\vec{\underline{D}}\cdot\vec{\underline{E}}=\frac{1}{4}\varepsilon_0\left|\frac{2a\underline{J}_0}{j\omega\varepsilon_0\left(a^2-b^2\right)}\right|^2=\frac{a^2\underline{J}_0^2}{\omega^2\varepsilon_0\left(a^2-b^2\right)^2}$$

$$\langle w_m\rangle=\frac{1}{4}\vec{\underline{B}}\cdot\vec{\underline{H}}=\frac{1}{4}\mu_0\left|\frac{a\underline{J}_0}{r}\frac{r^2-b^2}{a^2-b^2}\right|^2=\mu_0\frac{a^2\underline{J}_0^2}{4r^2}\frac{\left(r^2-b^2\right)^2}{\left(a^2-b^2\right)^2}$$

<u>סעיף ו</u>

נרצה שייתקיים

$$\frac{\langle w_e\rangle}{\langle w_m\rangle}>>1$$

כלומר, הדרישה היא

$$\frac{\langle w_e\rangle}{\langle w_m\rangle}=\frac{\dfrac{2a^2\underline{J}_0^2}{\omega^2\varepsilon_0\left(a^2-b^2\right)^2}}{\mu_0\dfrac{a^2\underline{J}_0^2}{2r^2}\dfrac{\left(r^2-b^2\right)^2}{\left(a^2-b^2\right)^2}}=\frac{4r^2}{\omega^2\mu_0\varepsilon_0\left(r^2-b^2\right)^2}\le\frac{4b^2}{\omega^2\mu_0\varepsilon_0\left(b^2-a^2\right)^2}=\frac{c^2}{\omega^2}\frac{4b^2}{\left(b^2-a^2\right)^2}>>1$$

או

$$\frac{2b}{a^2-b^2}>>\frac{\omega}{c}$$

<u>סעיף ז</u>

משפט פוינטינג בצורתו הדיפרנציאלית, עבור הקירוב בו אנו נמצאים, אומר כי

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{\underline{S}}=j2\omega\langle w_e\rangle$$

חישוב וקטור פוינטינג:

$$\underline{\vec{S}} = \frac{1}{2}\underline{\vec{E}}\times\underline{\vec{H}}^* = -\frac{1}{2}\frac{2a\underline{J}_0}{j\omega\varepsilon_0\left(a^2-b^2\right)}\frac{a\underline{J}_0}{r}\frac{r^2-b^2}{a^2-b^2}\vec{1}_r = -\frac{a^2\underline{J}_0^2}{j\omega\varepsilon_0\left(b^2-a^2\right)^2}\frac{r^2-b^2}{r}\vec{1}_r$$

ולכן

$$\vec{\nabla}\cdot\underline{\vec{S}} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(-\frac{a^2\underline{J}_0^2}{j\omega\varepsilon_0\left(b^2-a^2\right)^2}\left(r^2-b^2\right)\right) = -\frac{2a^2\underline{J}_0^2}{j\omega\varepsilon_0\left(b^2-a^2\right)^2} = 2j\frac{a^2\underline{J}_0^2}{\omega\varepsilon_0\left(b^2-a^2\right)^2}$$

ומצד שני

$$\left\langle w_e\right\rangle = \frac{a^2\underline{J}_0^2}{\omega^2\varepsilon_0\left(a^2-b^2\right)^2}$$

מ.ש.ל.

קוואזי-סטאטיקה - פתרון לתרגיל 10

סעיף א

ההתקן הוא בעל אופי קיבולי – אין זרימה, ולכן אנו במשטר אלקטרו-קוואזי-סטאטי.
תדר נמוך יהיה כזה שיקיים:

$$\lambda_c >> R \;\Rightarrow\; \frac{2\pi c}{\omega} >> R \;\Rightarrow\; \omega << \frac{c}{R}$$

סעיף ב

נפתור עבור פאזור מתח כללי $\underline{V}$, ונשתמש במשפט הסופרפוזיציה עבור שני מקורות כניסה. כדי להציג את הפתרון המלא בתחום הזמן, יש לקחת $\mathrm{Re}\left\{\underline{A}e^{j\omega t}\right\}$, עם אמפליטודה $\left|\underline{V}\right| = V_1$ לכל פתרון בצורה פאזורית $\underline{A}$, ולהוסיף פתרון עם מקור DC, כלומר בתדר $\omega = 0$ ובאמפליטודה V_0.

מהנתונים נסיק כי $\frac{\partial}{\partial\varphi} = \frac{\partial}{\partial z} = 0$.

לכן,

$$\underline{\vec{E}} = \underline{E}_z\vec{1}_z, \qquad \underline{H}_z = 0$$

ואם נכתוב את חוק אמפר וחוק פרדיי, נקבל:

$$\vec{\nabla}\times\underline{\vec{H}} = j\omega\varepsilon_r\underline{\vec{E}} + \underline{\vec{J}} = j\omega\varepsilon_r\underline{\vec{E}}$$

$$\vec{\nabla}\times\underline{\vec{E}} = 0$$

$$\frac{1}{r}\begin{vmatrix}\vec{1}_r & r\vec{1}_\varphi & \vec{1}_z\\ \frac{\partial}{\partial r} & 0 & 0\\ \underline{H}_r & r\underline{H}_\varphi & 0\end{vmatrix} = \frac{1}{r}\vec{1}_z\frac{\partial}{\partial r}\left(r\underline{H}_\varphi\right) = j\omega\varepsilon_r\underline{E}_z\vec{1}_z$$

$$\frac{1}{r}\begin{vmatrix}\vec{1}_r & r\vec{1}_\varphi & \vec{1}_z\\ \frac{\partial}{\partial r} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \underline{E}_z\end{vmatrix} = -\vec{1}_\varphi\left(\frac{\partial}{\partial r}\underline{E}_z\right) = 0 \;\Rightarrow\; \underline{\vec{E}} = \underline{E}_0\vec{1}_z$$

לכן, השדה החשמלי הוא:

$$\underline{E}_z = \begin{cases}\underline{E}_1, & 0 < z < \Delta_1\\ \underline{E}_2, & \Delta_1 < z < \Delta_1 + \Delta_2\end{cases}$$

נאלץ את תנאי השפה על השדה החשמלי:

$$V\left(z = \Delta_1 + \Delta_2\right) - V\left(z = 0\right) = -\int_0^{\Delta_1+\Delta_2}\underline{E}_z\left(r = R\right)dz \;\Rightarrow\; \underline{E}_1\Delta_1 + \underline{E}_2\Delta_2 = -\underline{V}$$

ובנוסף, נדרוש אינדוקציה חשמלית רציפה באיזור החיבור של שני החומרים השונים:

$$\underline{\vec{D}}_1\left(z = \Delta_1^-\right) = \varepsilon_1\underline{E}_1 = \varepsilon_2\underline{E}_2 = \underline{\vec{D}}_2\left(z = \Delta_1^+\right)$$

ומשתי המשוואות הנ"ל, נקבל

$$\begin{cases}\varepsilon_1\underline{E}_1=\varepsilon_2\underline{E}_2\\ \underline{E}_1\Delta_1+\underline{E}_2\Delta_2=-\underline{V}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\underline{E}_1=\dfrac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\underline{E}_2\\ \dfrac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\underline{E}_2\Delta_1+\underline{E}_2\Delta_2=\underline{V}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\underline{E}_1=-\dfrac{\underline{V}\varepsilon_2}{\Delta_2\varepsilon_1+\Delta_1\varepsilon_2}\\ \underline{E}_2=-\dfrac{\underline{V}\varepsilon_1}{\Delta_2\varepsilon_1+\Delta_1\varepsilon_2}\end{cases}$$

לכן, השדה המגנטי הוא:

$$\underline{H}_\varphi=\begin{cases}-\dfrac{1}{2}\dfrac{j\omega\varepsilon_1\varepsilon_2\underline{V}}{\Delta_2\varepsilon_1+\Delta_1\varepsilon_2}r, & 0<z<\Delta_1\\ -\dfrac{1}{2}\dfrac{j\omega\varepsilon_1\varepsilon_2\underline{V}}{\Delta_2\varepsilon_1+\Delta_1\varepsilon_2}r, & \Delta_1<z<\Delta_1+\Delta_2\end{cases}$$

(קבועי האינטגרציה הם 0 כדי למנוע התבדרות לא פיסיקאלית של השדה)

<u>סעיף ג</u>

חישוב וקטור פוינטינג:

$$\underline{\vec{S}}=\frac{1}{2}\underline{\vec{E}}\times\underline{\vec{H}}^*=\begin{cases}\dfrac{1}{4}\dfrac{\underline{V}\varepsilon_2}{\Delta_2\varepsilon_1+\Delta_1\varepsilon_2}\dfrac{j\omega\varepsilon_1\varepsilon_2\underline{V}}{\Delta_2\varepsilon_1+\Delta_1\varepsilon_2}r, & 0<z<\Delta_1\\ \dfrac{1}{4}\dfrac{\underline{V}\varepsilon_1}{\Delta_2\varepsilon_1+\Delta_1\varepsilon_2}\dfrac{j\omega\varepsilon_1\varepsilon_2\underline{V}}{\Delta_2\varepsilon_1+\Delta_1\varepsilon_2}r, & \Delta_1<z<\Delta_1+\Delta_2\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{1}{4}\dfrac{j\omega\varepsilon_1\varepsilon_2^2\underline{V}^2}{\left(\Delta_2\varepsilon_1+\Delta_1\varepsilon_2\right)^2}r, & 0<z<\Delta_1\\ \dfrac{1}{4}\dfrac{j\omega\varepsilon_1^2\varepsilon_2\underline{V}^2}{\left(\Delta_2\varepsilon_1+\Delta_1\varepsilon_2\right)^2}r, & \Delta_1<z<\Delta_1+\Delta_2\end{cases}$$

ואז

$$\vec{\nabla}\cdot\underline{\vec{S}}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\begin{cases}\dfrac{1}{4}\dfrac{j\omega\varepsilon_1\varepsilon_2^2\underline{V}^2}{\left(\Delta_2\varepsilon_1+\Delta_1\varepsilon_2\right)^2}r^2, & 0<z<\Delta_1\\ \dfrac{1}{4}\dfrac{j\omega\varepsilon_1^2\varepsilon_2\underline{V}^2}{\left(\Delta_2\varepsilon_1+\Delta_1\varepsilon_2\right)^2}r^2, & \Delta_1<z<\Delta_1+\Delta_2\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\dfrac{j\omega\varepsilon_1\varepsilon_2^2\underline{V}^2}{\left(\Delta_2\varepsilon_1+\Delta_1\varepsilon_2\right)^2}, & 0<z<\Delta_1\\ \dfrac{1}{2}\dfrac{j\omega\varepsilon_1^2\varepsilon_2\underline{V}^2}{\left(\Delta_2\varepsilon_1+\Delta_1\varepsilon_2\right)^2}, & \Delta_1<z<\Delta_1+\Delta_2\end{cases}$$

$$2j\omega\langle w_e\rangle=j\omega\frac{1}{2}\underline{\vec{D}}\cdot\underline{\vec{E}}=j\omega\frac{1}{2}\begin{cases}\varepsilon_1\left|\underline{E}_1\right|^2, 0<z<\Delta_1\\ \varepsilon_2\left|\underline{E}_2\right|^2, & \Delta_1<z<\Delta_1+\Delta_2\end{cases}$$

$$=j\omega\frac{1}{2}\begin{cases}\varepsilon_1\left|\dfrac{\underline{V}\varepsilon_2}{\Delta_2\varepsilon_1+\Delta_1\varepsilon_2}\right|^2, & 0<z<\Delta_1\\ \varepsilon_2\left|\dfrac{\underline{V}\varepsilon_1}{\Delta_2\varepsilon_1+\Delta_1\varepsilon_2}\right|^2, & \Delta_1<z<\Delta_1+\Delta_2\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\dfrac{j\omega\varepsilon_1\varepsilon_2^2\underline{V}^2}{\left(\Delta_2\varepsilon_1+\Delta_1\varepsilon_2\right)^2}, & 0<z<\Delta_1\\ \dfrac{1}{2}\dfrac{j\omega\varepsilon_1^2\varepsilon_2\underline{V}^2}{\left(\Delta_2\varepsilon_1+\Delta_1\varepsilon_2\right)^2}, & \Delta_1<z<\Delta_1+\Delta_2\end{cases}$$

ואכן משפט פוינטינג מתקיים:

$$\vec{\nabla}\cdot\underline{\vec{S}}=2j\omega\langle w_e\rangle$$

<u>סעיף ד</u>

עבור $V_1>>V_0$, המקור ההרמוני בזמן הוא הדומיננטי, ולכן משטר העבודה הוא אלקטרו-קוואזי-סטאטי, כפי שתיארנו בסעיף א.

עבור $V_0>>V_1$, המקור הקבוע הוא הדומיננטי, כלומר ההתקן מקבל מתח קבוע, עם תנודות קטנות מאוד סביבו. במקרה זה האנרגיה המגנטית אפסית, ואנחנו במשטר אלקטרו-סטטאי, כאשר ההתקן מתנהג כקבל פשוט.

קוואזי-סטאטיקה - פתרון לתרגיל 11

<u>סעיף א</u>

מידת האורך הגדולה ביותר להתקן היא ℓ, ולכן אם נרצה לנתח את ההתקן במשטר הקוואזי-סטאטי, נרצה שיתקיים $\ell<<\lambda=\dfrac{2\pi c}{\omega}$, ולכן תדר נמוך שיאפשר ניתוח כזה, יצטרך לקיים $\omega<<\dfrac{c}{\ell}$.

<u>סעיף ב</u>

מכיוון שלא תיתכן זרימת מטענים בהתקן, מכיוון שאין מסלול זרימה סגור, אנו נמצאים במשטר עבודה אלקטרו-קוואזי-סטאטי. לכן, משוואות מקסוול הרלוונטיות הן המשוואות המקוריות בהצבת $\mu_0 = 0$. כלומר:

$$\vec{\nabla} \times \underline{\vec{E}} = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot \varepsilon \underline{\vec{E}} = \rho = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \underline{\vec{H}} = j\omega\varepsilon \underline{\vec{E}}$$

<u>סעיף ג</u>

אילוץ המתח על ההתקן, במישור $z = -\ell$:

$$\underline{V}_0 = -\int_{r=a}^{b} \underline{E}_r\left(z=0\right) dr$$

ובגלל הקיר המגנטי,

$$\underline{\vec{H}}\left(z=0\right) = 0$$

<u>סעיף ד</u>

$$\vec{\nabla} \cdot \varepsilon \underline{\vec{E}} = \varepsilon \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r\underline{E}_r = 0 \;\;\Rightarrow\;\; \underline{E}_r = \frac{Const}{r}$$

ומתנאי השפה:

$$\underline{V}_0 = -\int_{r=a}^{b} \underline{E}_r\left(z=0\right) dr = -\int_{r=a}^{b} \frac{Const}{r} dr = -Const \ln\frac{b}{a} \;\;\Rightarrow\;\; Const = -\frac{\underline{V}_0}{\ln\frac{b}{a}}$$

ולכן

$$\underline{\vec{E}} = -\frac{\underline{V}_0}{\ln\frac{b}{a} r}\vec{1}_r$$

והשדה המגנטי מקיים:

$$\vec{\nabla} \times \underline{\vec{H}} = \frac{1}{r}\begin{vmatrix} \vec{1}_r & r\vec{1}_\varphi & \vec{1}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & r\underline{H}_\varphi & 0 \end{vmatrix} = -\frac{\partial}{\partial z}\underline{H}_\varphi \vec{1}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r\underline{H}_\varphi \vec{1}_z = -j\omega\varepsilon\frac{\underline{V}_0}{\ln\frac{b}{a} r}\vec{1}_r$$

ולכן

$$\frac{\partial}{\partial z}\underline{H}_\varphi = j\omega\varepsilon\frac{\underline{V}_0}{\ln\frac{b}{a} r} \;\;\Rightarrow\;\; \underline{H}_\varphi = j\omega\varepsilon\frac{\underline{V}_0}{\ln\frac{b}{a} r} z + Const$$

ומתנאי השפה:

$$\underline{\vec{H}} = j\omega\varepsilon\frac{\underline{V}_0}{\ln\frac{b}{a} r} z\vec{1}_\varphi$$

<u>סעיף ה</u>

נחשב את כיסוי הזרם המשטחי ע"ג המעטפת החיצונית:

$$\vec{1}_n \times \left(\cancel{\underline{\vec{H}}_{out}} - \underline{\vec{H}}_{in}\right)\Big|_{r=b} = \underline{\vec{J}}_s \;\;\Rightarrow\;\; \underline{\vec{J}}_s = -j\omega\varepsilon\frac{\underline{V}_0}{b\ln\frac{b}{a}} z\vec{1}_z$$

ולכן זרם הכניסה הוא

$$\underline{I}_{in} = 2\pi b\left|\underline{\vec{J}}_s\left(z=-\ell\right)\right| = j2\pi\omega\varepsilon\frac{\underline{V}_0}{\ln\frac{b}{a}}\ell$$

ולכן אימפדנס הכניסה הוא

$$\underline{Z}_{in}=\frac{\underline{V}_0}{\underline{I}_{in}}=\frac{\underline{V}_0}{j2\pi\omega\varepsilon\frac{\underline{V}_0}{\ln\frac{b}{a}}\ell}=\frac{\ln\frac{b}{a}}{j\omega2\pi\varepsilon\ell}$$

וכמו שציפינו, ההתקן יוחלף במעגל מקובץ שבו מקור מתח הרמוני $\underline{V}_0$ וקבל שקיבולו $C=\varepsilon\frac{2\pi\ell}{\ln\frac{b}{a}}$

<u>סעיף ו</u>

חישובי האנרגיות הממוצעות:

$$\langle w_e\rangle=\frac{1}{4}\underline{\vec{D}}\cdot\underline{\vec{E}}=\frac{1}{4}\varepsilon\left|\underline{\vec{E}}\right|^2=\frac{1}{4}\varepsilon\frac{V_0^2}{\ln^2\frac{b}{a}r}$$

$$\langle w_m\rangle=\frac{1}{4}\underline{\vec{B}}\cdot\underline{\vec{H}}=\frac{1}{4}\mu\left|\underline{\vec{H}}\right|^2=\frac{1}{4}\mu\omega^2\varepsilon^2\frac{V_0^2}{\ln^2\frac{b}{a}r}z^2$$

ואכן

$$\frac{\langle w_e\rangle}{\langle w_m\rangle}=\frac{\frac{1}{4}\varepsilon\frac{V_0^2}{\ln^2\frac{b}{a}r}}{\frac{1}{4}\mu\omega^2\varepsilon^2\frac{V_0^2}{\ln^2\frac{b}{a}r}z^2}=\frac{1}{\mu\varepsilon\omega^2z^2}\le\frac{1}{\mu_0\mu_r\varepsilon_0\varepsilon_r\omega^2\ell^2}=\frac{c^2}{\mu_r\varepsilon_r\omega^2\ell^2}>>1$$

מתקיים כאשר הנחת הקוואזי-סטאטיקה מתקיימת.

<u>סעיף ז</u>

נחשב את התיקון לשדה החשמלי מחוק פרדי המלא:

$$\vec{\nabla}\times\underline{\vec{E}}^{(1)}=-j\omega\underline{\vec{B}}=-j\omega\mu\underline{\vec{H}}^{(1)}=\omega^2\mu\varepsilon\frac{\underline{V}_0}{\ln\frac{b}{a}r}z\vec{1}_\varphi$$

$$\Rightarrow\ \frac{1}{r}\begin{vmatrix}\vec{1}_r & r\vec{1}_\varphi & \vec{1}_z\\ \frac{\partial}{\partial r} & 0 & \frac{\partial}{\partial z}\\ \underline{E}_r^{(1)} & 0 & 0\end{vmatrix}=\frac{\partial}{\partial z}\underline{E}_r^{(1)}\vec{1}_\varphi=\omega^2\mu\varepsilon\frac{\underline{V}_0}{\ln\frac{b}{a}r}z\vec{1}_\varphi$$

$$\Rightarrow\ \underline{\vec{E}}^{(1)}=\left(\omega^2\mu\varepsilon\frac{\underline{V}_0}{2\ln\frac{b}{a}r}z^2+Const\right)\vec{1}_\varphi$$

ומתנאי השפה עבור השדה במישור $z=-\ell$, נקבל

$$\underline{V}_0=\int_{r=a}^{b}\underline{\vec{E}}^{(1)}(z=-\ell)\cdot d\vec{r}=\int_{r=a}^{b}\left(\omega^2\mu\varepsilon\frac{\underline{V}_0}{2\ln\frac{b}{a}r}\ell^2+Const\right)dr=\omega^2\mu\varepsilon\frac{\underline{V}_0}{2}\ell^2+(b-a)Const$$

$$\Rightarrow\ Const=\frac{\underline{V}_0-\omega^2\mu\varepsilon\frac{\underline{V}_0}{2}\ell^2}{b-a}$$

כלומר, התיקון לשדה החשמלי הוא

$$\underline{\vec{E}}^{(1)} = \left(\omega^2 \mu\varepsilon \frac{\underline{V}_0}{2\ln\frac{b}{a} r} z^2 + \frac{2\underline{V}_0 - \omega^2 \mu\varepsilon \underline{V}_0 \ell^2}{2(b-a)} \right) \vec{1}_\varphi$$

קוואזי-סטאטיקה - פתרון לתרגיל 14

סעיף א

מחוק אוהם:

$$\vec{J} = \sigma\vec{E} \;\Rightarrow\; \frac{I}{\pi a^2}\vec{1}_z = \sigma E \vec{1}_z \;\Rightarrow\; E = \frac{I}{\pi a^2(\sigma_0 + \sigma_1 z)}\vec{1}_z$$

מחוק אמפר, בהנחת סימטריה אזימוטאלית, עבור $r < a$:

$$\oint_C \vec{H}\cdot d\vec{\ell} = \iint_A \vec{J}\cdot d\vec{a} \;\Rightarrow\; 2\pi r H = I\frac{\pi r^2}{\pi a^2} \;\Rightarrow\; H = \frac{I}{2\pi a^2} r\vec{1}_\varphi$$

מחוק אמפר, בהנחת סימטריה אזימוטאלית, עבור $r > a$:

$$\oint_C \vec{H}\cdot d\vec{\ell} = \iint_A \vec{J}\cdot d\vec{a} \;\Rightarrow\; 2\pi a H = I \;\Rightarrow\; H = \frac{I}{2\pi a}\vec{1}_\varphi$$

סעיף ב

$$R = \int_{z=0}^{\ell} \frac{1}{\sigma(z)}\frac{dz}{\pi a^2} = \int_{z=0}^{\ell} \frac{1}{\sigma_0 + \sigma_1 z}\frac{dz}{\pi a^2} = \int_{z=0}^{\ell} \frac{1}{\sigma_0 + \sigma_1 z}\frac{dz}{\pi a^2} = \frac{1}{\pi a^2 \sigma_1}\left[\ln(\sigma_0 + \sigma_1 z)\right]_0^{\ell} = \frac{1}{\pi a^2 \sigma_1}\ln\frac{\sigma_0 + \sigma_1 \ell}{\sigma_0}$$

סעיף ג

בתוך הנגד, $\rho = \vec{\nabla}\cdot\vec{D}$:

$$\rho = \varepsilon_0 \vec{\nabla}\cdot\left(\frac{I}{\pi a^2(\sigma_0 + \sigma_1 z)}\right) = \varepsilon_0 \frac{I}{\pi a^2}\frac{d}{dz}\frac{1}{\sigma_0 + \sigma_1 z} = -\frac{I\sigma_1\varepsilon_0}{\pi a^2(\sigma_0 + \sigma_1 z)^2}$$

על קצה המוליך המושלם ב $z = 0$:

$$\vec{1}_n \cdot \left(\vec{D}_{out} - \vec{D}_{in}\right)\Big|_{z=0} = \rho_s \;\Rightarrow\; -\vec{1}_z \cdot \left(-\varepsilon_0 \frac{I}{\pi a^2 \sigma_0}\vec{1}_z\right) = \rho_s \;\Rightarrow\; \rho_s = \frac{I\varepsilon_0}{\pi a^2 \sigma_0}$$

על קצה המוליך המושלם ב $z = \ell$:

$$\vec{1}_n \cdot \left(\vec{D}_{out} - \vec{D}_{in}\right)\Big|_{z=\ell} = \rho_s \;\Rightarrow\; \vec{1}_z \cdot \left(-\varepsilon_0 \frac{I}{\pi a^2(\sigma_0 + \sigma_1 \ell)}\vec{1}_z\right) = \rho_s \;\Rightarrow\; \rho_s = -\frac{I\varepsilon_0}{\pi a^2(\sigma_0 + \sigma_1 \ell)}$$

סעיף ד

לא היה ניתן לאגור במערכת מטען לפני העברת הזרם בה, ולכן סה״כ לא יהיה מטען במערכת:

$$Q = -\int_{z=0}^{\ell} \pi a^2 \frac{I\sigma_1\varepsilon_0}{\pi a^2(\sigma_0 + \sigma_1 z)^2} dz + \pi a^2 \frac{I\varepsilon_0}{\pi a^2 \sigma_0} - \pi a^2 \frac{I\varepsilon_0}{\pi a^2(\sigma_0 + \sigma_1 \ell)}$$

$$= \left[\frac{I\sigma_1\varepsilon_0}{\sigma_0 + \sigma_1 z}\right]_0^{\ell} + \frac{I\varepsilon_0}{\sigma_0} - \frac{I\varepsilon_0}{(\sigma_0 + \sigma_1 \ell)} = 0$$

סעיף ה

תנאי השפה לגבי חוק שימור המטען:

$$\vec{1}_n \cdot \left(\vec{J}_{out} - \vec{J}_{in}\right) + \vec{\nabla}_\perp \vec{J}_S = -\frac{\partial \rho_s}{\partial t}$$

ועל הפאה הימנית, $z = \ell$

$$\vec{1}_z \cdot \left(-\frac{I}{\pi a^2}\vec{1}_z\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rJ_{sr}) = 0 \;\Rightarrow\; \frac{\partial}{\partial r}(rJ_s) = \frac{I}{\pi a^2} r$$

$$\Rightarrow\; J_s = \left(\frac{I}{2\pi a^2} r + \frac{C}{r}\right)\vec{1}_r$$

נדרוש קיום תנאי שפה

$$J_s\left(r=a\right)=0 \;\Rightarrow\; \frac{I}{2\pi a}+\frac{C}{a}=0 \;\Rightarrow\; C=-\frac{I}{2\pi}$$

לכן נקבל

$$J_s=\frac{I}{2\pi}\left(\frac{r}{a^2}-\frac{1}{r}\right)\vec{1}_r$$

באותו אופן, עבור הפאה השמאלית, $z=0$:

$$J_s=-\frac{I}{2\pi}\left(\frac{r}{a^2}-\frac{1}{r}\right)\vec{1}_r$$

אפקט הקרום

אפקט הקרום - פתרון לתרגיל 5

סעיף א

נרשום את משוואות מקסוול עבור $0<x<a$:

$$\vec{\nabla}\times\underline{\vec{E}}=-j\omega\underline{\vec{B}}$$
$$\vec{\nabla}\times\underline{\vec{H}}=j\omega\varepsilon_0\underline{\vec{E}}$$

מהנחה שמחוץ להתקן השדות מתאפסים נסיק שלשדה החשמלי יש רק רכיב בכיוון z , כלומר $\underline{\vec{E}}=E(x)\vec{1}_z$.
נראה שהשדה המגנטי הוא בכיוון ציר y :

$$\begin{cases}\vec{\nabla}\times\underline{\vec{E}}=\begin{vmatrix}\vec{1}_x & \vec{1}_y & \vec{1}_z\\ \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0\\ 0 & 0 & E_z\end{vmatrix}=-\frac{\partial}{\partial x}E_z\vec{1}_y=-j\omega\underline{\vec{B}}\\ \vec{\nabla}\times\underline{\vec{H}}=\begin{vmatrix}\vec{1}_x & \vec{1}_y & \vec{1}_z\\ \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0\\ H_x & H_y & H_z\end{vmatrix}=-\frac{\partial}{\partial x}H_z\vec{1}_y+\frac{\partial}{\partial x}H_y\vec{1}_z=j\omega\varepsilon_0E_z\vec{1}_z\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\frac{\partial E_z}{\partial x}=j\omega\mu_0H_y\\ \frac{\partial H_y}{\partial x}=j\omega\varepsilon_0E_z\end{cases}\Rightarrow\frac{\partial^2H_y}{\partial x^2}=j\omega\varepsilon_0\left(j\omega\mu_0H_y\right)=-\omega^2\varepsilon_0\mu_0H_y$$

$$\Rightarrow\frac{\partial^2H_y}{\partial x^2}+\frac{\omega^2}{c^2}H_y=0\;\Rightarrow\;H_y=Ae^{-j\beta x}+Be^{j\beta x},\qquad\beta\triangleq\frac{\omega}{c}$$

$$\Rightarrow E_z=j\omega\varepsilon_0\frac{1}{j\beta}\left(-Ae^{-j\beta x}+Be^{j\beta x}\right)=\eta_0\left(Be^{j\beta x}-Ae^{-j\beta x}\right),\qquad\eta_0\triangleq\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}$$

כלומר, עבור $0<x<a$ קיבלנו

$$\begin{cases}E_z=\eta_0\left(Be^{j\beta x}-Ae^{-j\beta x}\right)\\ H_y=Ae^{-j\beta x}+Be^{j\beta x}\end{cases},\beta\triangleq\frac{\omega}{c},\qquad\eta_0\triangleq\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}$$

עבור $x>a$ מתקיים :

$$\vec{\nabla}\times\underline{\vec{E}}=-j\omega\underline{\vec{B}}$$
$$\vec{\nabla}\times\underline{\vec{H}}=j\omega\underline{\vec{D}}+\underline{\vec{J}}=j\omega\varepsilon_0\underline{\vec{E}}+\sigma\underline{\vec{E}}\underset{\sigma>>\omega\varepsilon_0}{\approx}\sigma\underline{\vec{E}}$$

ואז, ממשוואות מקסוול:

$$\begin{cases}\vec{\nabla}\times\underline{\vec{E}}=\begin{vmatrix}\vec{1}_x & \vec{1}_y & \vec{1}_z\\ \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0\\ 0 & 0 & E_z\end{vmatrix}=-\frac{\partial E_z}{\partial x}\vec{1}_y=-j\omega\underline{\vec{B}}\\ \vec{\nabla}\times\underline{\vec{H}}=\begin{vmatrix}\vec{1}_x & \vec{1}_y & \vec{1}_z\\ \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0\\ 0 & H_y & 0\end{vmatrix}=\frac{\partial H_y}{\partial x}\vec{1}_z=\sigma E_z\vec{1}_z\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{\partial E_z}{\partial x}=j\omega\mu_0 H_y\\ \frac{\partial H_y}{\partial x}=\sigma E_z\end{cases}\Rightarrow\frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2}=j\omega\mu_0\sigma H_y$$

$$\Rightarrow\frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2}-j\omega\mu_0\sigma H_y=0$$

$$\Rightarrow\ H_y=Ce^{-\gamma x}+De^{\gamma x},\qquad \gamma\triangleq\sqrt{j\omega\mu_0\sigma}=\sqrt{\frac{\omega\mu_0\sigma}{2}}(1+j)\ \Rightarrow\ \delta\triangleq\sqrt{\frac{2}{\omega\mu_0\sigma}}=\frac{(1+j)}{\gamma}$$

$$\Rightarrow E_z=\frac{1}{\sigma}\frac{\partial H_y}{\partial x}=\frac{1}{\sigma}\left(-\gamma Ce^{-\gamma x}+\gamma De^{\gamma x}\right)=\frac{1+j}{\sigma\delta}\left(De^{\gamma x}-Ce^{-(1+j)\frac{x}{\delta}}\right)$$

כלומר, עבור $x>a$ קיבלנו

$$\begin{cases}E_z=\frac{1+j}{\sigma\delta}\left(De^{\gamma x}-Ce^{-(1+j)\frac{x}{\delta}}\right),\\ H_y=Ce^{-\gamma x}+De^{\gamma x}\end{cases}\qquad \delta=\sqrt{\frac{2}{\omega\mu_0\sigma}},\quad \gamma=\frac{1+j}{\delta}$$

<u>סעיף ב</u>

תנאי השפה עקב אילוץ מקור המתח בכניסה להתקן:

$$\underline{\vec{E}}(x=0)=-\frac{V}{d}\vec{1}_z$$

על השדות להיות רציפים במעבר במישור $x=a$:

$$\underline{\vec{E}}\left(x=a^-\right)=\underline{\vec{E}}\left(x=a^+\right)$$

$$\underline{\vec{H}}\left(x=a^-\right)=\underline{\vec{H}}\left(x=a^+\right)$$

בנוסף, אסור לשדות להתבדר באופן לא-פיסיקאלי.

<u>סעיף ג</u>

אילוץ המתח יגרור:

$$E_z(x=0)=\eta_0(B-A)=-\frac{V}{d}\ \Rightarrow\ B=A-\frac{V}{\eta_0 d}$$

כדי למנוע התבדרות של השדות עבור $x\to\infty$, נקבל שעבור $x>a$ השדות הינם ($D=0$):

$$\begin{cases}E_z=-\frac{1+j}{\sigma\delta}Ce^{-(1+j)\frac{x}{\delta}}\\ H_y=Ce^{-(1+j)\frac{x}{\delta}}\end{cases}$$

מדרישת רציפות השדות במעבר במישור $x=a$, נקבל:

$$\begin{cases} Be^{j\beta a} - Ae^{-j\beta a} = -\dfrac{1+j}{\eta_0\sigma\delta} Ce^{-(1+j)\frac{a}{\delta}} \\ Ce^{-(1+j)\frac{a}{\delta}} = Ae^{-j\beta a} + Be^{j\beta a} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(A - \dfrac{V}{\eta_0 d}\right)e^{j\beta a} - Ae^{-j\beta a} = -\dfrac{1+j}{\eta_0\sigma\delta} Ce^{-(1+j)\frac{a}{\delta}} \\ Ce^{-(1+j)\frac{a}{\delta}} = Ae^{-j\beta a} + \left(A - \dfrac{V}{\eta_0 d}\right)e^{j\beta a} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\dfrac{1+j}{\eta_0\sigma\delta} Ce^{-(1+j)\frac{a}{\delta}} = Ae^{j\beta a} - \dfrac{V}{\eta_0 d}e^{j\beta a} - Ae^{-j\beta a} = 2jA\sin\beta a - \dfrac{V}{\eta_0 d}e^{j\beta a} \\ Ce^{-(1+j)\frac{a}{\delta}} = Ae^{-j\beta a} + Ae^{j\beta a} - \dfrac{V}{\eta_0 d}e^{j\beta a} = 2A\cos\beta a - \dfrac{V}{\eta_0 d}e^{j\beta a} \end{cases}$$

$$-\frac{1+j}{\eta_0\sigma\delta}\left(2A\cos\beta a - \frac{V}{\eta_0 d}e^{j\beta a}\right) = 2jA\sin\beta a - \frac{V}{\eta_0 d}e^{j\beta a}$$

$$\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1+j}{\eta_0\sigma\delta}2A\cos\beta a + 2jA\sin\beta a = \frac{V}{\eta_0 d}e^{j\beta a} + \frac{1+j}{\eta_0\sigma\delta}\frac{V}{\eta_0 d}e^{j\beta a}$$

$$\Rightarrow A = \frac{\dfrac{V}{\eta_0 d}e^{j\beta a} + \dfrac{1+j}{\eta_0\sigma\delta}\dfrac{V}{\eta_0 d}e^{j\beta a}}{\dfrac{1+j}{\eta_0\sigma\delta}2\cos\beta a + 2j\sin\beta a} = \frac{V}{2\eta_0 d}e^{j\beta a}\frac{\eta_0\sigma\delta + (1+j)}{(1+j)\cos\beta a + j\eta_0\sigma\delta\sin\beta a}$$

וחישוב הקבוע B :

$$B = A - \frac{V}{\eta_0 d} = \frac{V}{2\eta_0 d}\left(\frac{(\cos\beta a + j\sin\beta a)\eta_0\sigma\delta + (\cos\beta a + j\sin\beta a)(1+j)}{(1+j)\cos\beta a + j\eta_0\sigma\delta\sin\beta a} - 2\right)$$

$$= \frac{V}{2\eta_0 d}\left(\frac{(\cos\beta a + j\sin\beta a)\eta_0\sigma\delta + (\cos\beta a + j\sin\beta a)(1+j) - 2(1+j)\cos\beta a - 2j\eta_0\sigma\delta\sin\beta a}{(1+j)\cos\beta a + j\eta_0\sigma\delta\sin\beta a}\right)$$

$$= \frac{V}{2\eta_0 d}\left(\frac{\cos\beta a(\eta_0\sigma\delta - (1+j)) - j(\eta_0\sigma\delta - (1+j))\sin\beta a}{(1+j)\cos\beta a + j\eta_0\sigma\delta\sin\beta a}\right) = \frac{V}{2\eta_0 d}e^{-j\beta a}\frac{\eta_0\sigma\delta - (1+j)}{(1+j)\cos\beta a + j\eta_0\sigma\delta\sin\beta a}$$

וחישוב הקבוע C :

$$C = \frac{2A\cos\beta a - \dfrac{V}{\eta_0 d}e^{j\beta a}}{e^{-(1+j)\frac{a}{\delta}}} = e^{(1+j)\frac{a}{\delta}}\left[2\left(\frac{V}{2\eta_0 d}e^{j\beta a}\frac{\eta_0\sigma\delta + (1+j)}{(1+j)\cos\beta a + j\eta_0\sigma\delta\sin\beta a}\right)\cos\beta a - \frac{V}{\eta_0 d}e^{j\beta a}\right]$$

$$= e^{(1+j)\frac{a}{\delta}}\frac{V}{\eta_0 d}e^{j\beta a}\left(\frac{\eta_0\sigma\delta + (1+j)}{(1+j)\cos\beta a + j\eta_0\sigma\delta\sin\beta a}\cos\beta a - 1\right)$$

$$= e^{(1+j)\frac{a}{\delta}}\frac{V}{\eta_0 d}e^{j\beta a}\frac{\eta_0\sigma\delta\cos\beta a - j\eta_0\sigma\delta\sin\beta a}{(1+j)\cos\beta a + j\eta_0\sigma\delta\sin\beta a} = e^{(1+j)\frac{a}{\delta}}\frac{V}{\eta_0 d}\frac{\eta_0\sigma\delta}{(1+j)\cos\beta a + j\eta_0\sigma\delta\sin\beta a}$$

ולסיכום, קיבלנו

$$\underline{\vec{E}} = \begin{cases} \dfrac{\underline{V}}{d}\dfrac{j\eta_0\sigma\delta\sin(\beta(x-a)) - j(1+j)\cos(\beta(x-a))}{(1+j)\cos\beta a + j\eta_0\sigma\delta\sin\beta a}\vec{1}_z, & 0 < x < a \\ -(1+j)\dfrac{\underline{V}}{d}e^{(1+j)\frac{a-x}{\delta}}\dfrac{1}{(1+j)\cos\beta a + j\eta_0\sigma\delta\sin\beta a}\vec{1}_z, & x > a \end{cases}$$

$$\underline{\vec{H}} = \begin{cases} \dfrac{\underline{V}}{\eta_0 d}\dfrac{\eta_0\sigma\delta\cos(\beta(x-a)) - j(1+j)\sin(\beta(x-a))}{(1+j)\cos\beta a + j\eta_0\sigma\delta\sin\beta a}\vec{1}_y, & 0 < x < a \\ e^{(1+j)\frac{a-x}{\delta}}\dfrac{\underline{V}}{d}\dfrac{\sigma\delta}{(1+j)\cos\beta a + j\eta_0\sigma\delta\sin\beta a}\vec{1}_y, & x > a \end{cases}$$

<u>סעיף ד</u>
אימפדנס הכניסה של המעגל:
ע"פ ההגדרה:

$$\underline{Z}_{in} = \left|\frac{\underline{V}_{in}}{\underline{I}_{in}}\right|$$

כלומר, עלינו לחשב את הזרם בכניסת המעגל.
מתנאי השפה על השדה המגנטי המשיקי, עבור הלוח העליון, נקבל

$$\vec{1}_n \times \left(\underline{\vec{H}}_{out} - \underline{\vec{H}}_{in}\right)\Big|_{z=d} = \underline{\vec{J}}_s \quad \Rightarrow \quad -\vec{1}_z \times \vec{1}_y \left(-Ae^{-j\beta x} - Be^{j\beta x}\right) = \underline{\vec{J}}_s$$

ועבור כניסת המערכת, כלומר $x=0$, נקבל

$$\underline{\vec{J}}_s = -\left(A+B\right)\vec{1}_x$$

ולכן

$$\underline{Z}_{in} = \frac{\underline{V}}{W\left(\frac{\underline{V}}{2\eta_0 d}e^{-j\beta a}\frac{\eta_0\sigma\delta-(1+j)}{(1+j)\cos\beta a + j\eta_0\sigma\delta\sin\beta a} + \frac{\underline{V}}{2\eta_0 d}e^{j\beta a}\frac{\eta_0\sigma\delta+(1+j)}{(1+j)\cos\beta a + j\eta_0\sigma\delta\sin\beta a}\right)}$$

$$= \frac{2d\eta_0}{W}\frac{(1+j)\cos\beta a + j\eta_0\sigma\delta\sin\beta a}{e^{-j\beta a}\left(\eta_0\sigma\delta-(1+j)\right)+e^{j\beta a}\left(\eta_0\sigma\delta+(1+j)\right)}$$

$$= \frac{2d\eta_0}{W}\frac{(1+j)\cos\beta a + j\eta_0\sigma\delta\sin\beta a}{\left(\cos\beta a - j\sin\beta a\right)\left(\eta_0\sigma\delta-(1+j)\right)+\left(\cos\beta a + j\sin\beta a\right)\left(\eta_0\sigma\delta+(1+j)\right)}$$

$$= \frac{d\eta_0}{W}\frac{(1+j)\cos\beta a + j\eta_0\sigma\delta\sin\beta a}{\eta_0\sigma\delta\cos\beta a + j(1+j)\sin\beta a}$$

<u>סעיף ה</u>

הקירוב $\frac{\omega a}{c} << 1$ מכתיב כי

$$\beta a << 1 \ \Rightarrow\ \sin\beta a \approx \beta a, \qquad \cos\beta a \approx 1$$

ולכן הביטוי לאימפדנס מקבל את הצורה

$$\underline{Z}_{in} \approx \frac{d\eta_0}{W}\frac{(1+j)+j\eta_0\sigma\delta\beta a}{\eta_0\sigma\delta + j(1+j)\beta a} \approx \frac{d\eta_0}{W}\frac{(1+j)+j\eta_0\sigma\delta\beta a}{\eta_0\sigma\delta} = \frac{d\eta_0}{W}\left[\frac{(1+j)}{\eta_0\sigma\delta}+j\beta a\right]$$

$$= \frac{1}{\sigma}\frac{d}{W\delta} + j\frac{d\eta_0}{W}\left(\frac{1}{\eta_0\sigma\delta}+\beta a\right)$$

אימפדנס זה מתאים לחיבור של נגד וסליל בטור.
לכן, תחת הנחת הקירוב, משטר העבודה בחלק הראשון, $0 < x < a$, הוא מגנטו-קוואזי-סטאטי (איבר האנרגיה המגנטית דומיננטי) ומשטר זרימה סטציונרי (אברי האנרגיות וההפסדים הם מאותו סדר גודל) בחלק השני, $x > a$.

שיטת השיקופים

שיטת השיקופים - פתרון לתרגיל 2

נביט בבעיה שקולה שבה יש מטען q' באזור $r<a$, כלומר בתוך הכדור, כדי לי צור פוטנציאל 0 על שפת הכדור $r=a$; בנוסף בבעיה זו נשקף את שני המטענים q_0 ו q' יחסית לציר $z=0$, כדי ליצור מישור עם פוטנציאל 0.

ראשית נחשב היכן למקם את המטען q':

נניח שהמטען מונח ב $(x,y,z)=(0,0,z_0)$ ונחשב את הפוטנציאל הכולל של המטען האמיתי q_0 והמשוקף q':

$$u(x,y,z)=\frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-b)^2}}+\frac{q'}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-z_0)^2}}$$

ונדרוש התאפסות הפוטנציאל עבור כדור שרדיוסו a:

$$u(x,y,z)=\frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-b)^2}}+\frac{q'}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-z_0)^2}}=0$$

$$\Rightarrow\ \frac{q_0^2}{x^2+y^2+(z-b)^2}=\frac{q'^2}{x^2+y^2+(z-z_0)^2}$$

$$\Rightarrow\ q_0^2\left(x^2+y^2+z^2-2zz_0+z_0^2\right)=q'^2\left(x^2+y^2+\left(z^2-2zb+b^2\right)\right)$$

$$\Rightarrow\ x^2\left(q_0^2-q'^2\right)+y^2\left(q_0^2-q'^2\right)+\left(z^2-2zz_0+z_0^2\right)q_0^2=q'^2\left(z^2-2zb+b^2\right)$$

$$\Rightarrow\ x^2\left(q_0^2-q'^2\right)+y^2\left(q_0^2-q'^2\right)+z^2\left(q_0^2-q'^2\right)-2z\left(z_0q_0^2-bq'^2\right)=q'^2b^2-z_0^2q_0^2$$

$$\Rightarrow\ x^2+y^2+z^2-2z\frac{z_0q_0^2-bq'^2}{q_0^2-q'^2}=\frac{q'^2b^2-z_0^2q_0^2}{q_0^2-q'^2}$$

נבצע השלמה לריבוע:

$$x^2+y^2+\left(z-\frac{z_0q_0^2-bq'^2}{q_0^2-q'^2}\right)^2=\frac{q'^2b^2-z_0^2q_0^2}{q_0^2-q'^2}+\frac{\left(z_0q_0^2-bq'^2\right)^2}{\left(q_0^2-q'^2\right)^2}$$

כעת, נדרוש שרדיוס הכדור הוא a ומרכזו ב $(x,y,z)=(0,0,0)$:

$$\begin{cases}\dfrac{z_0q_0^2-bq'^2}{q_0^2-q'^2}=0\\[2ex] a^2=\dfrac{q'^2b^2-z_0^2q_0^2}{q_0^2-q'^2}+\dfrac{\left(z_0q_0^2-bq'^2\right)^2}{\left(q_0^2-q'^2\right)^2}\end{cases}\ \Rightarrow\ \begin{cases}z_0=b\dfrac{q'^2}{q_0^2}\\[2ex] a^2=\dfrac{q'^2b^2-b^2\dfrac{q'^4}{q_0^4}q_0^2}{q_0^2-q'^2}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\ a^2q_0^4-a^2q'^2q_0^2=q'^2b^2q_0^2-b^2q'^4\ \Rightarrow\ b^2q'^4-\left(a^2+b^2\right)q'^2q_0^2+a^2q_0^4=0$$

$$\Rightarrow\ q_{1,2}'^2=\frac{\left(a^2+b^2\right)q_0^2\pm\sqrt{a^4q_0^4+2a^2b^2q_0^4+b^4q_0^4-4b^2a^2q_0^4}}{2b^2}=q_0^2\frac{a^2+b^2\pm\left(a^2-b^2\right)}{2b^2}$$

$$\Rightarrow\ q'=-q_0\frac{a}{b}\ \Rightarrow\ z_0=\frac{a^2}{b}$$

כעת נשקף את שני המטענים q_0 ו q' ביחס ל $z=0$, ועבור האזור שמימין למשטח, נקבל את הפוטנציאל:

$$u=\frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-b)^2}}+\frac{q'}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-z_0)^2}}$$
$$+\frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z+b)^2}}+\frac{q'}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z+z_0)^2}}$$
$$=\frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-b)^2}}-\frac{a}{b}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+\left(z-\frac{a^2}{b}\right)^2}}+\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z+b)^2}}-\frac{a}{b}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+\left(z+\frac{a^2}{b}\right)^2}}\right)$$

ועבור האזור שמשמאל למשטח, ברור ש $u=0$.

שיטת השיקופים - פתרון לתרגיל 3

כדי למצוא את פונקצית גרין במרחב, יש להציב מטען יחידה q_0 במיקום $\vec{r}_s$ (עירור של פונקצית $\delta(\vec{r}-\vec{r}_s)$), אז לחשב את פונקצית הפוטנציאל במרחב, וממנה לחלץ את $G(\vec{r}\,|\,\vec{r}_s)$.

למרות שהשאלה דורשת לחשב את פונקצית גרין רק עבור מטען בוחן ב $x_s>0$, נפתור גם עבור $x_s<0$.

כאמור, נבחין בין שני מקרים: $G_I(x,y,z\,|\,x_s,y_s,z_s>0)$ ו $G_{II}(x,y,z\,|\,x_s,y_s,z_s<0)$.

נחשב ראשית את $G_I(x,y,z\,|\,x_s,y_s,z_s>0)$. נציב מטען יחידה q_0 במיקום $\vec{r}_s=(x_s,y_s,z_s>0)$. נחלק את הבעיה לשניים:

1. נביט בחצי המישור $z>0$. נשקף מטען q' ביחס ל $z=0$, כאשר שני מטענים אלו נמצאים במרחב חופשי ($\varepsilon_r=1$) עבור $0<x<d$. את שני המטענים הללו נשקף אינסוף פעמים כדי ליצור פוטנציאל אפס על הלוחות $x=d$ ו $x=0$.
נקבל, אם כך, את הפוטנציאל:

$$u_I(x,y,z>0)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n q_0}{\sqrt{(x-f(x_s,n,d))^2+(y-y_s)^2+(z-z_s)^2}}+\frac{(-1)^n q'}{\sqrt{(x-f(x_s,n,d))^2+(y-y_s)^2+(z+z_s)^2}}$$

2. נביט בחצי המישור $z<0$. נחליף את q_0 במטען q'', ונמלא את החלל $0<x<d$ במקדם דיאלקטרי ε_r. את המטען הזה נשקף אינסוף פעמים כדי ליצור פוטנציאל אפס על הלוחות $x=d$ ו $x=0$.
נקבל, אם כך, את הפוטנציאל:

$$u_I(x,y,z<0)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n q''}{\sqrt{(x-f(x_s,n,d))^2+(y-y_s)^2+(z-z_s)^2}}$$

כעת, נדרוש את רציפות הפוטנציאל ב $z=0$ (שקול לדרישת רציפות השדה החשמלי המשיקי):

$$u_I(x,y,z>0)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n q_0}{\sqrt{(x-f(x_s,n,d))^2+(y-y_s)^2+z_s^2}}+\frac{(-1)^n q'}{\sqrt{(x-f(x_s,n,d))^2+(y-y_s)^2+z_s^2}}\right)$$
$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n q''}{\sqrt{(x-f(x_s,n,d))^2+(y-y_s)^2+z_s^2}}=u_I(x,y,z<0)$$
$$\Rightarrow\quad q_0+q'=\frac{q''}{\varepsilon_r}$$

כעת, נדרוש את רציפות האינדוקציה החשמלית הניצבת, מכיוון שלא תיתכן הצטברות מטען בדיאלקטרון:

$$-\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial z} u_I\left(x,y,z>0\right)\Big|_{z=0} = -\frac{1}{4\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\begin{array}{l}\left(-\frac{1}{2}\right)\dfrac{\left(-1\right)^n q_0\left(-2z_s\right)}{\sqrt{\left(x-f\left(x_s,n,d\right)\right)^2+\left(y-y_s\right)^2+z_s^2}} \\ -\left(-\frac{1}{2}\right)\dfrac{\left(-1\right)^n q'\left(2z_s\right)}{\sqrt{\left(x-f\left(x_s,n,d\right)\right)^2+\left(y-y_s\right)^2+z_s^2}}\end{array}\right)$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(-\tfrac{1}{2}\right)\frac{\left(-1\right)^n q''\left(-2z_s\right)}{\sqrt{\left(x-f\left(x_s,n,d\right)\right)^2+\left(y-y_s\right)^2+z_s^2}} = -\varepsilon_0\varepsilon_r \frac{\partial}{\partial z} u_I\left(x,y,z<0\right)\Big|_{z=0}$$

$$\Rightarrow\ -q_0+q'=-q''$$

כלומר, קיבלנו את שתי המשוואות:

$$\begin{cases} q_0+q'=\dfrac{q''}{\varepsilon_r} \\ -q_0+q'=-q'' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q'=\dfrac{q''}{\varepsilon_r}-q_0 \\ -q_0+\dfrac{q''}{\varepsilon_r}-q_0=-q'' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q'=\dfrac{q_0\dfrac{2\varepsilon_r}{\varepsilon_r+1}}{\varepsilon_r}-q_0=q_0\dfrac{1-\varepsilon_r}{\varepsilon_r+1} \\ q''=\dfrac{-2q_0}{-\left(1+\dfrac{1}{\varepsilon_r}\right)}=q_0\dfrac{2\varepsilon_r}{\varepsilon_r+1} \end{cases}$$

כלומר, הפוטנציאל שלנו, בהינתן q_0 ממוקם ב $z_s>0$, הוא

$$u_I\left(x,y,z\right)=\frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0}\begin{cases}\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\begin{array}{l}\dfrac{\left(-1\right)^n}{\sqrt{\left(x-f\left(x_s,n,d\right)\right)^2+\left(y-y_s\right)^2+\left(z-z_s\right)^2}} \\ -\dfrac{\varepsilon_r-1}{\varepsilon_r+1}\dfrac{\left(-1\right)^n}{\sqrt{\left(x-f\left(x_s,n,d\right)\right)^2+\left(y-y_s\right)^2+\left(z+z_s\right)^2}}\end{array}\right), & z>0 \\ \dfrac{2}{\varepsilon_r+1}\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty}\dfrac{\left(-1\right)^n}{\sqrt{\left(x-f\left(x_s,n,d\right)\right)^2+\left(y-y_s\right)^2+\left(z-z_s\right)^2}}, & z<0\end{cases}$$

ולכן

$$G_I\left(x,y,z\,|\,x_s,y_s,z_s>0\right)=\frac{1}{4\pi}\begin{cases}\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\begin{array}{l}\dfrac{\left(-1\right)^n}{\sqrt{\left(x-f\left(x_s,n,d\right)\right)^2+\left(y-y_s\right)^2+\left(z-z_s\right)^2}} \\ -\dfrac{\varepsilon_r-1}{\varepsilon_r+1}\dfrac{\left(-1\right)^n}{\sqrt{\left(x-f\left(x_s,n,d\right)\right)^2+\left(y-y_s\right)^2+\left(z+z_s\right)^2}}\end{array}\right), & z>0 \\ \dfrac{2}{\varepsilon_r+1}\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty}\dfrac{\left(-1\right)^n}{\sqrt{\left(x-f\left(x_s,n,d\right)\right)^2+\left(y-y_s\right)^2+\left(z-z_s\right)^2}}, & z<0\end{cases}$$

נחשב כעת את $G_I\left(x,y,z\,|\,x_s,y_s,z_s<0\right)$. נציב מטען יחידה q_0 במיקום $\vec{r}_s=\left(x_s,y_s,z_s<0\right)$. נחלק את הבעיה לשניים:

1. נביט בחצי המישור $z>0$. נחליף את q_0 במטען q'', כאשר החלל $0<x<d$ יהיה מרחב חופשי. את המטען הזה נשקף אינסוף פעמים כדי ליצור פוטנציאל אפס על הלוחות $x=d$ ו $x=0$. נקבל, אם כך, את הפוטנציאל:

$$u_{II}\left(x,y,z>0\right)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^n q''}{\sqrt{\left(x-f\left(x_s,n,d\right)\right)^2+\left(y-y_s\right)^2+\left(z+z_s\right)^2}}$$

2. נביט בחצי המישור $z<0$. נשקף מטען q' ביחס ל $z=0$, כאשר שני מטענים אלו בחומר דיאלקטרי ε_r בכל האזור $0<x<d$. את שני המטענים הללו נשקף אינסוף פעמים כדי ליצור פוטנציאל אפס על הלוחות $x=d$ ו $x=0$. נקבל, אם כך, את הפוטנציאל:

$$u_{II}\left(x,y,z<0\right)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^n q_0}{\sqrt{\left(x-f\left(x_s,n,d\right)\right)^2+\left(y-y_s\right)^2+\left(z+z_s\right)^2}}+\frac{\left(-1\right)^n q'}{\sqrt{\left(x-f\left(x_s,n,d\right)\right)^2+\left(y-y_s\right)^2+\left(z-z_s\right)^2}}$$

כעת, נדרוש את רציפות הפוטנציאל ב $z=0$ (שקול לדרישת רציפות השדה החשמלי המשיקי):

$$u_{II}\left(x,y,z>0\right)\Big|_{z=0}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^n q''}{\sqrt{\left(x-f\left(x_s,n,d\right)\right)^2+\left(y-y_s\right)^2+z_s^2}}$$

$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\begin{array}{l}\dfrac{\left(-1\right)^n q_0}{\sqrt{\left(x-f\left(x_s,n,d\right)\right)^2+\left(y-y_s\right)^2+z_s^2}}\\ +\dfrac{\left(-1\right)^n q'}{\sqrt{\left(x-f\left(x_s,n,d\right)\right)^2+\left(y-y_s\right)^2+z_s^2}}\end{array}\right)=u_{II}\left(x,y,z<0\right)\Big|_{z=0}$$

$$\Rightarrow\quad q''\varepsilon_r=q_0+q'$$

כעת, נדרוש את רציפות האינדוקציה החשמלית הניצבת, מכיוון שלא תיתכן הצטברות מטען בדיאלקטרון:

$$-\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial z}u_{II}\left(x,y,z>0\right)\Big|_{z=0}=-\frac{1}{4\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(-\tfrac{1}{2}\right)\frac{\left(-1\right)^n q''\left(2z_s\right)}{\sqrt{\left(x-f\left(x_s,n,d\right)\right)^2+\left(y-y_s\right)^2+\left(z+z_s\right)^2}^{\,3}}$$

$$=-\frac{1}{4\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\begin{array}{l}\dfrac{\left(-1\right)^n q_0\left(2z_s\right)}{\sqrt{\left(x-f\left(x_s,n,d\right)\right)^2+\left(y-y_s\right)^2+\left(z+z_s\right)^2}^{\,3}}\\ +\dfrac{\left(-1\right)^n q'\left(-2z_s\right)}{\sqrt{\left(x-f\left(x_s,n,d\right)\right)^2+\left(y-y_s\right)^2+\left(z-z_s\right)^2}^{\,3}}\end{array}\right)$$

$$=-\varepsilon_0\varepsilon_r\frac{\partial}{\partial z}u_{II}\left(x,y,z<0\right)\Big|_{z=0}$$

$$\Rightarrow\quad q''=q_0-q'$$

כלומר, קיבלנו את שתי המשוואות:

$$\begin{cases}q''\varepsilon_r=q_0+q'\\ q''=q_0-q'\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}q_0\varepsilon_r-q'\varepsilon_r=q_0+q'\\ q''=q_0-q'\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}q'=q_0\dfrac{\varepsilon_r-1}{\varepsilon_r+1}\\ q''=q_0\dfrac{2}{\varepsilon_r+1}\end{cases}$$

כלומר, הפוטנציאל שלנו, בהינתן q_0 ממוקם ב $z_s<0$, הוא

$$u_{II}\left(x,y,z\right)=\frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0}\begin{cases}\dfrac{2}{\varepsilon_r+1}\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^n}{\sqrt{\left(x-f\left(x_s,n,d\right)\right)^2+\left(y-y_s\right)^2+\left(z+z_s\right)^2}}, & z>0\\ \dfrac{1}{\varepsilon_r}\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\begin{array}{l}\dfrac{\left(-1\right)^n}{\sqrt{\left(x-f\left(x_s,n,d\right)\right)^2+\left(y-y_s\right)^2+\left(z+z_s\right)^2}}\\ +\dfrac{\varepsilon_r-1}{\varepsilon_r+1}\dfrac{\left(-1\right)^n}{\sqrt{\left(x-f\left(x_s,n,d\right)\right)^2+\left(y-y_s\right)^2+\left(z-z_s\right)^2}}\end{array}\right), & z<0\end{cases}$$

ולכן

$$G_{II}\left(x,y,z\,|\,x_s,y_s,z_s<0\right)=\frac{1}{4\pi}\begin{cases}\dfrac{2}{\varepsilon_r+1}\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{\left(x-f\left(x_s,n,d\right)\right)^2+\left(y-y_s\right)^2+\left(z+z_s\right)^2}}, & z>0\\ \dfrac{1}{\varepsilon_r}\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{\left(x-f\left(x_s,n,d\right)\right)^2+\left(y-y_s\right)^2+\left(z+z_s\right)^2}}+\dfrac{\varepsilon_r-1}{\varepsilon_r+1}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{\left(x-f\left(x_s,n,d\right)\right)^2+\left(y-y_s\right)^2+\left(z-z_s\right)^2}}\right), & z<0\end{cases}$$

שיטת השיקופים - פתרון לתרגיל 9

סעיף א

נוסיף שני מטעני שיקוף בתוך הכדור. נסמן את מרכז הכדור ב $(0,0,0)$, ולכן המטענים שנוסיף הם:

$$(x,y,z)=\left(0,0,\frac{R^2}{d}\right),\qquad q'=-q\frac{R}{d}$$

$$(x,y,z)=\left(0,0,-\frac{R^2}{d}\right),\qquad q'=-q\frac{R}{d}$$

ולכן, הפוטנציאל שנקבל הוא, עבור $r>R$:

$$u(r,\varphi,z)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{r^2+(z-d)^2}}+\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{r^2+(z+d)^2}}+\frac{q'}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{r^2+\left(z-\frac{R^2}{d}\right)^2}}+\frac{q'}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{r^2+\left(z+\frac{R^2}{d}\right)^2}}$$

$$=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{r^2+(z-d)^2}}+\frac{1}{\sqrt{r^2+(z+d)^2}}-\frac{R}{d\sqrt{r^2+\left(z-\frac{R^2}{d}\right)^2}}-\frac{R}{d\sqrt{r^2+\left(z+\frac{R^2}{d}\right)^2}}\right)$$

וכמובן $u=0$ עבור $0<r<R$.

סעיף ב

נחשב את הכוח על המטען הימני, ומסימטריה, הכוח על המטען השני שווה בגודלו והפוך בסימנו.
הכוח החשמלי הוא השדה החשמלי בנקודה, מוכפל במטען בנקודה, כאשר השפעת המטען עליו מסכלים לא קיימת.
השדה החשמלי, אם כן, ייגזר מפוטנציאל שבו רק שלושת המטענים האחרים נוכחים:

$$\vec{E}=-\vec{\nabla}u=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\begin{pmatrix}\dfrac{r}{\left(r^2+(z+d)^2\right)^{\frac{3}{2}}}-\dfrac{Rr}{d\left(r^2+\left(z-\frac{R^2}{d}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}-\dfrac{Rr}{d\left(r^2+\left(z+\frac{R^2}{d}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}},\\ 0,\\ \dfrac{z+d}{\left(r^2+(z+d)^2\right)^{\frac{3}{2}}}-\dfrac{R\left(z-\frac{R^2}{d}\right)}{d\left(r^2+\left(z-\frac{R^2}{d}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}-\dfrac{R\left(z+\frac{R^2}{d}\right)}{d\left(r^2+\left(z+\frac{R^2}{d}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}\end{pmatrix}$$

ולכן

$$\vec{F}_q = q\,\vec{E}\Big|_{(0,0,d)} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\left(0,0,\frac{2d}{(2d)^3} - \frac{R\left(z-\frac{R^2}{d}\right)}{d\left(d-\frac{R^2}{d}\right)^3} - \frac{R\left(d+\frac{R^2}{d}\right)}{d\left(d+\frac{R^2}{d}\right)^3}\right)$$

$$= \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{(2d)^2} - \frac{Rd}{\left(d^2-R^2\right)^2} - \frac{Rd}{\left(d^2+R^2\right)^2}\right)\vec{1}_z$$

<u>סעיף ג</u>

ניתן לחשב את סה״כ המטען ע״י שימוש במשפט גאוס עבור קליפה כדורית מסביב לכדור, ברדיוס $R+\varepsilon$. סה״כ השטף שנקבל יהיה זהה לבעיה שבה שני מטעני השיקוף, ולכן סה״כ המטען על הכדור הוא סכום המטענים המשוקפים שנמצאים בתוכו, כלומר

$$Q = 2q' = -2q\frac{R}{d}$$

<u>סעיף ד</u>

נרצה ש:

$$\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{(2d)^2} - \frac{Rd}{\left(d^2-R^2\right)^2} - \frac{Rd}{\left(d^2+R^2\right)^2}\right) = 0$$

$$\frac{1}{4d^2} = \frac{R}{d^3\left(1-\left(\frac{R}{d}\right)^2\right)^2} + \frac{R}{d^3\left(1+\left(\frac{R}{d}\right)^2\right)^2} \approx \frac{R}{d^3} + \frac{R}{d^3} = \frac{2R}{d^3} \quad\Rightarrow\quad R = \frac{d}{8}$$

<u>סעיף ה</u>

המטען שיוצר פוטנציאל בשיעור V_0 ברדיוס R סביבו הוא:

$$V_0 = \frac{q^*}{4\pi\varepsilon_0 R} \quad\Rightarrow\quad q^* = 4\pi\varepsilon_0 R V_0$$

לכן, בנוסף למטענים ששיקפנו בתחילה, נוסיף מטען q^* בראשית הצירים, ונקבל את הפוטנציאל:

$$u(r,\varphi,z) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{r^2+(z-d)^2}} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{r^2+(z+d)^2}} + \frac{q'}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{r^2+\left(z-\frac{R^2}{d}\right)^2}} + \frac{q'}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{r^2+z^2}}$$

$$+\frac{q^*}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{r^2+z^2}}$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{r^2+(z-d)^2}} + \frac{1}{\sqrt{r^2+(z+d)^2}} - \frac{R}{d\sqrt{r^2+\left(z-\frac{R^2}{d}\right)^2}} - \frac{R}{d\sqrt{r^2+\left(z+\frac{R^2}{d}\right)^2}}\right) + \frac{RV_0}{\sqrt{r^2+z^2}}$$

ועבור $0<r<R$, הפוטנציאל קבוע V_0.

<u>סעיף ו</u>

בדומה לסעיף ב, נתחשב בכל המטענים מלבד הימני, ונקבל:

$$\vec{F}_q = q\,\vec{E}\Big|_{(0,0,d)} = \left(0,0,\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{2d}{(2d)^3} - \frac{R\left(z-\frac{R^2}{d}\right)}{d\left(d-\frac{R^2}{d}\right)^3} - \frac{R\left(d+\frac{R^2}{d}\right)}{d\left(d+\frac{R^2}{d}\right)^3}\right) + \frac{dRV_0}{\left(r^2+d^3\right)^{\frac{3}{2}}}\right)$$

$$= \left(\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{(2d)^2} - \frac{Rd}{\left(d^2-R^2\right)^2} - \frac{Rd}{\left(d^2+R^2\right)^2}\right) + \frac{RV_0}{d^2}\right)\vec{1}_z$$

שדות חשמליים בחומר

שדות חשמליים בחומר - פתרון לתרגיל 2

<u>סעיף א</u>

מחוק גאוס:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{D}=\vec{\nabla}\cdot\left(\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P}\right)=\frac{3}{2}\varepsilon_0\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=\rho_f=0$$

כלומר עדיין תתקיים משוואת לפלס בין הלוחות. נשים לב ש:

$$\vec{D}=\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P}=\varepsilon_0\vec{E}+\frac{1}{2}\varepsilon_0\vec{E}=\frac{3}{2}\varepsilon_0\vec{E}$$

ולכן החומר הדיאלקטרי הוא בעל מקדם $\varepsilon_r=\dfrac{3}{2}$.

מכיוון שבקבל סטאטי עסקינן, הרי ש

$$\vec{E}=E_z\vec{1}_z=\begin{cases}E_1\vec{1}_z, & 0<z<d\\ E_2\vec{1}_z, & d<z<2d\\ E_3\vec{1}_z, & 2d<z<3d\end{cases}$$

נדרוש את רציפות האינדוקציה החשמלית הניצבת, מכיוון שאין הצטברות מטען ע"ג חומר דיאלקטרי:

$$\begin{cases}E_z\left(z=d^-\right)=E_z\left(z=d^+\right) \Rightarrow \varepsilon_0E_1=\varepsilon_0\varepsilon_rE_2\\ E_z\left(z=2d^-\right)=E_z\left(z=2d^+\right) \Rightarrow \varepsilon_0\varepsilon_rE_2=\varepsilon_0E_3\end{cases} \Rightarrow E_1=E_3$$

ומאילוץ מקור המתח המעורר את הקבל:

$$-V_0=-E_1d-E_2d-E_3d \Rightarrow \frac{V_0}{d}=2E_1+E_2$$

ואז נקבל

$$\begin{cases}\dfrac{V_0}{d}=2E_1+E_2\\ E_1=\varepsilon_rE_2\end{cases} \Rightarrow \frac{V_0}{d}=2\varepsilon_rE_2+E_2 \Rightarrow \begin{cases}E_1=\dfrac{3V_0}{8d}\\ E_2=\dfrac{V_0}{\left(2\varepsilon_r+1\right)d}=\dfrac{V_0}{4d}\end{cases}$$

ולכן השדה בקבל הוא

$$\vec{E}=\begin{cases}\dfrac{3V_0}{8d}\vec{1}_z, & 0<z<d\\ \dfrac{V_0}{4d}\vec{1}_z, & d<z<2d\\ \dfrac{3V_0}{8d}\vec{1}_z, & 2d<z<3d\end{cases}$$

<u>סעיף ב</u>

$$\vec{D}=\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P}=\begin{cases}\varepsilon_0\dfrac{3V_0}{8d}\vec{1}_z, & 0<z<d\\ \varepsilon_0\dfrac{V_0}{4d}\vec{1}_z+\dfrac{1}{2}\varepsilon_0\dfrac{V_0}{4d}\vec{1}_z, & d<z<2d\\ \varepsilon_0\dfrac{3V_0}{8d}\vec{1}_z, & 2d<z<3d\end{cases}$$

$$=\varepsilon_0\frac{3V_0}{8d}\vec{1}_z, \qquad 0<z<d$$

אכן גודל רציף בקבל.

<u>סעיף ג</u>

מטען הקיטוב המשטחי על הלוח העליון:

$$\rho_{sp} = -\vec{1}_n \cdot \left(\vec{P}_{out} - \vec{P}_{in}\right) = -\vec{1}_z \cdot (0-0) = 0$$

מטען הקיטוב המשטחי על הלוח התחתון:

$$\rho_{sp} = -\vec{1}_n \cdot \left(\vec{P}_{out} - \vec{P}_{in}\right) = -\vec{1}_z \cdot (0-0) = 0$$

מטען הקיטוב המשטחי במשטח $z = d$:

$$\rho_{sp} = -\vec{1}_n \cdot \left(\vec{P}_{out} - \vec{P}_{in}\right) = -\vec{1}_z \cdot \left(\frac{1}{2}\varepsilon_0 \frac{V_0}{4d}\vec{1}_z - 0\right) = -\varepsilon_0 \frac{V_0}{8d}$$

מטען הקיטוב המשטחי במשטח $z = 2d$:

$$\rho_{sp} = -\vec{1}_n \cdot \left(\vec{P}_{out} - \vec{P}_{in}\right) = -\vec{1}_z \cdot \left(0 - \frac{1}{2}\varepsilon_0 \frac{V_0}{4d}\vec{1}_z\right) = \varepsilon_0 \frac{V_0}{8d}$$

<u>סעיף ד</u>

מטען חופשי יצטבר רק על לוחות הקבל. על הלוח העליון:

$$\rho_s = \vec{1}_n \cdot \left(\vec{D}_{out} - \vec{D}_{in}\right) = \vec{1}_z \cdot \left(0 - \varepsilon_0 \frac{3V_0}{8d}\vec{1}_z\right) = -\varepsilon_0 \frac{3V_0}{8d}$$

ועל הלוח התחתון,

$$\rho_s = \vec{1}_n \cdot \left(\vec{D}_{out} - \vec{D}_{in}\right) = \vec{1}_z \cdot \left(\varepsilon_0 \frac{3V_0}{8d}\vec{1}_z - 0\right) = \varepsilon_0 \frac{3V_0}{8d}$$

<u>סעיף ה</u>

קיבול הקבל:

$$C \triangleq \frac{Q}{V} = \frac{Q}{V} = \frac{\varepsilon_0 \frac{3V_0}{8d} \cdot \pi R^2}{V_0} = \varepsilon_0 \frac{9}{8}\frac{\pi R^2}{3d}$$

קיבול שדומה לקבל כמו שלנו, שכולו ממולא אפקטיבית בחומר דיאלקטרי בעל מקדם $\varepsilon_{eff} = \frac{9}{8}$.

<u>סעיף ו</u>

ללא נוכחות חומר דיאלקטרי בקבל, נקבל

$$C = \varepsilon_0 \frac{\pi R^2}{3d}$$

קיבול שקטן לעומת הקיבול ללא דיאלקטרן, שזו תופעה ידועה.

<u>סעיף ז</u>

אנו נמצאים במשטר אלקטרו-קוואזי-סטאטי. השדה החשמלי בהתקן הוא

$$\vec{E}(t) = \begin{cases} \frac{3V_0}{8d}\cos\omega t\,\vec{1}_z, & 0 < z < d \\ \frac{V_0}{4d}\cos\omega t\,\vec{1}_z, & d < z < 2d \\ \frac{3V_0}{8d}\cos\omega t\,\vec{1}_z, & 2d < z < 3d \end{cases}$$

ולכן צפיפות זרם הקיטוב היא

$$\vec{J}_p = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\varepsilon_0 \vec{E}(t)\right) = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\frac{V_0}{4d}\cos\omega t\,\vec{1}_z = -\frac{\varepsilon_0 \omega V_0}{8d}\sin\omega t\,\vec{1}_z, \quad d < z < 2d$$

<u>סעיף ח</u>

מהסימטריה, השדה המגנטי יהיה בכיוון $\vec{1}_\varphi$. חוק אמפר למעגל ברדיוס r:

$$\oint_C \vec{H} d\vec{\ell} = \frac{\partial}{\partial t}\iint_S \vec{D} \cdot d\vec{a} + \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{a} = \frac{\partial}{\partial t}\iint_S \vec{D} \cdot d\vec{a}$$

$$2\pi r H = \pi r^2 \left(-\frac{3\varepsilon_0 \omega V_0}{8d}\sin\omega t\right)$$

$$\Rightarrow \quad \vec{H} = -\frac{3\varepsilon_0 \omega V_0}{16d} r \sin\omega t\,\vec{1}_\varphi$$

שדות חשמליים בחומר - פתרון לתרגיל 4

סעיף א

חוק גאוס:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{D}=0$$

$$\vec{\nabla}\cdot\left(\varepsilon\vec{E}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\varepsilon\vec{E}\right)=0 \;\Rightarrow\; \vec{E}=\frac{C}{\varepsilon(x)}\vec{1}_x$$

תנאי השפה מאילוץ המתח:

$$V_0=\int_0^d\frac{C}{\varepsilon(x)}dx=C\int_0^d\frac{x+d}{2d}dx=\frac{C}{4d}\left[(x+d)^2\right]_0^d=\frac{C}{4d}\left(4d^2-d^2\right)=\frac{3}{4}Cd$$

$$\Rightarrow\; C=\frac{4}{3}\frac{V_0}{d}$$

ולכן

$$\vec{E}=\frac{\frac{4}{3}\frac{V_0}{d}}{\frac{2d}{x+d}}=\frac{2V_0}{3}\frac{x+d}{d^2}\vec{1}_x$$

ולכן

$$u(x)=$$

סעיף ב

זהו חומר טכני פשוט, ולכן

$$\vec{D}=\varepsilon\vec{E}=\varepsilon_0\vec{E}+\varepsilon_0(\varepsilon_r-1)\vec{E} \;\Rightarrow\; \vec{P}=\varepsilon_0(\varepsilon_r-1)\vec{E}=\varepsilon_0\left(\frac{2d}{x+d}-1\right)\frac{2V_0}{3}\frac{x+d}{d^2}\vec{1}_x=\frac{2\varepsilon_0V_0}{3}\frac{d-x}{d^2}\vec{1}_x$$

סעיף ג

עבור $x=0$ נקבל:

$$\rho_{sp}=-\vec{1}_n\cdot\left(\vec{P}_{out}-\vec{P}_{in}\right)=-\vec{1}_x\cdot\left(\frac{2\varepsilon_0V_0}{3}\frac{1}{d}\vec{1}_x-0\right)=-\frac{2}{3}\frac{\varepsilon_0V_0}{d}$$

עבור $x=d$ וקטור הקיטוב מתאפס, ולכן אין במשטח זה מטען קיטוב.

שדות חשמליים בחומר - פתרון לתרגיל 6

סעיף א

נחשב את השדה החשמלי שיוצר תיל טעון בצפיפות אחידה λ_0 במרחב חופשי ללא קיטוב, מחוק גאוס:

$$\oiint_S\vec{D}\cdot d\vec{a}=\iiint_V\rho dv$$

$$\varepsilon_0E\cdot 2\pi rh=h\lambda_0 \;\Rightarrow\; \vec{E}=\frac{\lambda_0}{2\pi\varepsilon_0 r}\vec{1}_r$$

השדה במרחב יכול להשתנות רק כתוצאה מהמצאות וקטור קיטוב, כלומר נוכל רק להשפיע על השדה באזורים בהם יש וקטור קיטוב. לכן, נוכל לגרום להתאפסות השדה החשמלי רק באזור $a<r<b$, ע״י הכנסת $\vec{P}$ מתאים לאותו אזור.

סעיף ב

נחפש $\vec{P}$ כזה:

$$\oiint_S\vec{D}\cdot d\vec{a}=\iiint_V\rho dv$$

$$\oiint_S\left(\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P}\right)\cdot d\vec{a}=\iiint_V\rho dv$$

$$\left(\cancel{\varepsilon_0E}+P\right)\cdot 2\pi rh=h\lambda_0 \;\Rightarrow\; \vec{P}=\frac{\lambda_0}{2\pi r}\vec{1}_r$$

סעיף ג

בהתחשב בסימטריה האזימוטלית, נציע פתרון:

$$u(r,\varphi,z)=A+B\ln r+\sum_{n=1}^{\infty}C_nr^n+D_nr^{-n}$$

סעיף ד

תנאי השפה הנתונים:

$$u(r=a)=u(r=b)=0$$

אילוץ המתח הנתון:

$$V_0=-\int_{r=a}^{b}E(r)\,dr$$

רציפות האינדוקציה החשמלית הניצבת במעבר בין החומר הדיאלקטרי למרחב החופשי:

$$\vec{1}_n\cdot\left(\vec{D}_{out}-\vec{D}_{in}\right)\Big|_{r=c}=\vec{1}_n\cdot\left(\vec{D}_{out}-\vec{D}_{in}\right)\Big|_{r=d}=0$$

גלים מישוריים

גלים מישוריים - פתרון לתרגיל 1

סעיף א

קיטוב הגל הוא כיוון השדה החשמלי של הגל, כלומר במקרה שלנו הקיטוב הוא בכיוון

$$\vec{1}_p = \frac{4\vec{1}_y + 3\vec{1}_z}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{4}{5}\vec{1}_y + \frac{3}{5}\vec{1}_z$$

סעיף ב

כיוון ההתפשטות של הגל

$$\vec{E} = \left(4\vec{1}_y + 3\vec{1}_z\right)e^{j(6y-8z)} = \left(4\vec{1}_y + 3\vec{1}_z\right)e^{-j\left(8\vec{1}_z - 6\vec{1}_y\right)\left(y\vec{1}_y + z\vec{1}_z\right)}$$

ולכן

$$\vec{k} = 8\vec{1}_z - 6\vec{1}_y$$

ולכן כיוון ההתפשטות הוא

$$\vec{1}_k = \frac{\vec{k}}{\left|\vec{k}\right|} = \frac{8\vec{1}_z - 6\vec{1}_y}{\sqrt{6^2+8^2}} = \frac{4}{5}\vec{1}_z - \frac{3}{5}\vec{1}_y$$

סעיף ג

תדירות הגל:

$$f = \frac{c}{\lambda} = 3\cdot 10^8\frac{k}{2\pi} = 3\cdot 10^8\frac{10}{2\pi} \approx 477M\left[Hz\right]$$

סעיף ג

השדה המגנטי שנלווה לשדה החשמלי:

$$\vec{H} = \frac{1}{\eta_0}\vec{1}_k \times \vec{E} = \frac{1}{\eta_0}\frac{1}{\sqrt{6^2+8^2}}\begin{vmatrix} \vec{1}_x & \vec{1}_y & \vec{1}_z \\ 0 & -6 & 8 \\ 0 & 4 & 3 \end{vmatrix} e^{-j(6y-8z)} = -\frac{1}{10\eta_0}\left(50\vec{1}_x\right)e^{-j(6y-8z)}$$

$$\approx -0.013e^{-j(6y-8z)}\vec{1}_x$$

סעיף ד

נמצא את וקטור פוינטינג הממוצע בזמן:

$$\left\langle \vec{S} \right\rangle = \frac{1}{2}\frac{\left|\vec{E}_0\right|^2}{\eta_0}\vec{1}_k = \frac{1}{2}\frac{\left|4\vec{1}_y + 3\vec{1}_z\right|^2}{\eta_0}\vec{1}_k = \frac{4^2+3^2}{2\eta_0}\vec{1}_k \approx 0.033\vec{1}_k\left[\frac{W}{m^2}\right]$$

זהו הספק ליחידת שטח (צפיפות הספק, למטר רבוע).

גלים מישוריים - פתרון לתרגיל 2

סעיף א

ידוע כי

$$\left\langle \vec{S} \right\rangle = \frac{1}{2}\frac{\left|\vec{E}_0\right|^2}{\eta_0} = \frac{1}{2}\eta_0\left|\vec{H}_0\right|^2$$

ולכן

$$\left|\vec{E}_0\right| = \sqrt{2\eta_0\left\langle \vec{S} \right\rangle} = \sqrt{2\times 377\times 10} = 86.83\left[\frac{V}{m}\right]$$

סעיף ב

בהינתן תדירות הגל, $f = 10M\left[Hz\right]$, נקבל

$$k = \left|\vec{k}\right| = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi\times 10\times 10^6}{3\times 10^8} = 0.21\left[\frac{1}{m}\right]$$

סעיף ג

אורך הגל:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = 30\left[m\right]$$

סעיף ד

לא ניתן לקבוע באופן חד-משמעי את כיווני השדות האלקטרומגנטיים. ידוע לנו שכיוונם יהיה במישור שניצב ל $\vec{1}_k$, אך כיוונם בתוך מישור זה לא ידוע.

<u>סעיף ה</u>

הגל מקוטב בכיוון $\vec{1}_z$, כלומר השדה החשמלי הכיוון $\vec{1}_z$, ע"פ הגדרת הקיטוב.

נכתוב את וקטור הגל :

$$\vec{k} = k\vec{1}_k \underset{k=0.21}{=} 0.21\cdot\vec{1}_k = 0.21\left(\cos\alpha\vec{1}_x + \sin\alpha\vec{1}_y\right) \underset{\alpha=30^\circ}{=} 0.21\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\vec{1}_x + \frac{1}{2}\vec{1}_y\right)$$

ולכן

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}} = \left|\vec{E}_0\right|\vec{1}_z e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}} = 86.83\cdot e^{-0.21j\left(\frac{\sqrt{2}}{3}x+\frac{1}{2}y\right)}\vec{1}_z$$

והשדה המגנטי הוא

$$\vec{H} = \frac{1}{\eta_0}\vec{1}_k\times\vec{E} = \frac{1}{\eta_0}\frac{1}{0.21}\begin{vmatrix}\vec{1}_x & \vec{1}_y & \vec{1}_z\\ k_x & k_y & 0\\ 0 & 0 & E_z\end{vmatrix} = \frac{1}{377}\frac{1}{0.21}\left(k_yE_z\vec{1}_x - k_xE_z\vec{1}_y\right) =$$

$$= \frac{1}{377}\left(\frac{1}{2}\vec{1}_x - \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{1}_y\right)86.83\cdot e^{-0.21j\left(\frac{\sqrt{2}}{3}x+\frac{1}{2}y\right)} = 0.23\left(\frac{1}{2}\vec{1}_x - \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{1}_y\right)e^{-0.21j\left(\frac{\sqrt{2}}{3}x+\frac{1}{2}y\right)}$$

גלים מישוריים - פתרון לתרגיל 5

<u>סעיף א</u>

כיוון ההתפשטות של הגל

$$\vec{E} = \left(4\vec{1}_y + 3\vec{1}_z\right)e^{-j(6y-8z)} = \left(4\vec{1}_y + 3\vec{1}_z\right)e^{-j\left(6\vec{1}_y - 8\vec{1}_z\right)\left(y\vec{1}_y + z\vec{1}_z\right)}$$

ולכן

$$\vec{k} = 6\vec{1}_y - 8\vec{1}_z$$

ולכן כיוון ההתפשטות הוא

$$\vec{1}_k = \frac{\vec{k}}{\left|\vec{k}\right|} = \frac{6\vec{1}_y - 8\vec{1}_z}{\sqrt{6^2+8^2}} = \frac{3}{5}\vec{1}_y - \frac{4}{5}\vec{1}_z$$

<u>סעיף ב</u>

אורך הגל :

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{\sqrt{6^2+8^2}} = \frac{\pi}{5} \approx 0.63[m]$$

תדר הגל :

$$f = \frac{c}{\lambda} = \frac{5}{\pi}3\cdot10^8 \approx 477M\,[Hz]$$

<u>סעיף ג</u>

השדה המגנטי שנלווה לשדה החשמלי :

$$\vec{H} = \frac{1}{\eta_0}\vec{1}_k\times\vec{E} = \frac{1}{\eta_0}\frac{1}{\sqrt{6^2+8^2}}\begin{vmatrix}\vec{1}_x & \vec{1}_y & \vec{1}_z\\ 0 & 6 & -8\\ 0 & 4 & 3\end{vmatrix}e^{-j(6y-8z)} = \frac{1}{10\eta_0}\left(50\vec{1}_x\right)e^{-j(6y-8z)}$$

$$\approx 0.013e^{-j(6y-8z)}\vec{1}_x$$

<u>סעיף ד</u>

נמצא את וקטור פוינטינג הממוצע בזמן :

$$\left\langle\vec{S}\right\rangle = \frac{1}{2}\frac{\left|\vec{E}_0\right|^2}{\eta_0}\vec{1}_k = \frac{1}{2}\frac{\left|4\vec{1}_y + 3\vec{1}_z\right|^2}{\eta_0}\vec{1}_k = \frac{4^2+3^2}{2\eta_0}\vec{1}_k \approx 0.033\vec{1}_k\left[\frac{W}{m^2}\right]$$

זהו הספק ליחידת שטח (צפיפות הספק, למטר רבוע). כדי לקבל את ההספק על הריבוע המדובר, נבצע אינטגרציה על שטחו :

$$P=\iint\limits_{A\times A}\vec{S}\cdot d\vec{a}=0.033\iint\limits_{A\times A}\vec{1}_k\cdot\vec{1}_y\,dxdz=0.033\iint\limits_{A\times A}\left(\frac{3}{5}\vec{1}_y-\frac{4}{5}\vec{1}_z\right)\cdot\vec{1}_y\,dxdz=0.033\frac{3}{5}\iint\limits_{A\times A}dxdz=0.02A^2$$

<u>סעיף ה</u>

חישוב השדות במישור הזמן :

$$\vec{E}(x,y,z,t)=\mathrm{Re}\left\{\left(4\vec{1}_y+3\vec{1}_z\right)e^{-j(6y-8z)}e^{j\omega t}\right\}=\left(4\vec{1}_y+3\vec{1}_z\right)\cos\left(-6y+8z+\omega t\right)$$

$$\vec{H}(x,y,z,t)=\mathrm{Re}\left\{0.013e^{-j(6y-8z)}\vec{1}_x\right\}=0.013\cos\left(-6y+8z+\omega t\right)\vec{1}_x$$