אינטגרל כפול:

$$\iint f(x,y)dxdy = \int_D f(x,y)da$$

החלפת משתנים:

$$J = \frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0$$

החלפת משתנים לקואורדינטות קוטביות: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $J = r$; קוטביות מוכללות – אליפסה: $x = ar\cos\varphi$, $y = br\sin\varphi$, $J = abr$

שימושים:

1. שטח - $D = \iint_D f(x,y)dxdy$
2. נפח – אם $z = f(x,y)$ זו פונקציית המשטח ו-D הוא היטל התחום.
3. מסה של גוף עם התפלגות מישורית: $\rho(x,y)$ זו פונקציית צפיפות מישורית - $m = \iint_D \rho(x,y)dxdy$
4. מומנט סטטי – לפי רכיבים: $M_x = \iint_D y\cdot\rho(x,y)dxdy$, $M_y = \iint_D x\cdot\rho(x,y)dxdy$
5. מרכז כובד של גוף: $x_0 = \frac{M_y}{m}$, $y_0 = \frac{M_x}{m}$

אינטגרל משולש:

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \int_V f(x,y,z)dv$$

החלפת משתנים:

$$J = \frac{D(x,y,z)}{D(u,t,w)} = \begin{vmatrix} x_u & x_t & x_w \\ y_u & y_t & y_w \\ z_u & z_t & z_w \end{vmatrix} \neq 0$$

החלפת משתנים לקואורדינטות גליליות: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = z$; $J = r$, $0 \le \varphi \le 2\pi$

החלפת משתנים לקואורדינטות כדוריות: $x = r\cos\varphi\sin\theta$, $y = r\sin\varphi\sin\theta$, $z = r\cos\varphi$; $J = r^2\sin\theta$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, $0 \le \theta \le \pi$

שימושים:

1. נפח גוף - $v = \iiint_V dxdydz$
2. מסת גוף עם התפלגות נפחית: $\rho(x,y,z)$ זו פונקציית צפיפות נפחית - $m = \iiint_V \rho(x,y,z)dxdydz$

3. מומנט סטטי – לפי רכיבים:

$$M_{xy} = \iiint_V z \cdot \rho(x,y,z)dxdydz$$

$$M_{yz} = \iiint_V x \cdot \rho(x,y,z)dxdydz$$

$$M_{xz} = \iiint_V y \cdot \rho(x,y,z)dxdydz$$

4. מרכז כובד של גוף:

$$x_0 = \frac{M_{yz}}{m}$$

$$y_0 = \frac{M_{xz}}{m}$$

$$z_0 = \frac{M_{xy}}{m}$$

<u>תכונות של פונקציות וקטוריות:</u>

נגזרת של פונקציה וקטורית: $v'(t) = x'(t)\hat{i} + y'(t)\hat{j} + z'(t)\hat{k}$

אורך של קשת: $l = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\,dt$

אם העקום במישור ונתון בצורה מפורשת $y = f(x)$: $l = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx$

אם העקום נתון בקואורדינטות קוטביות: $l = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{(r(\varphi))^2 + (r'(\varphi))^2}\,d\varphi$

נתון שדה וקטורי $\vec{F} = P(x,y,z)\hat{i} + Q(x,y,z)\hat{j} + R(x,y,z)\hat{k}$

דיברגנט של שדה וקטורי - נתון $\vec{F}(x,y,z)$ שדה וקטורי מעל גוף V. $\vec{F}$ פונקציה רציפה וגזירה חלקית ב-V:

$$div\vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x}(x,y,z) + \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y,z) + \frac{\partial R}{\partial z}(x,y,z)$$

$$div\vec{F} = \nabla \cdot \vec{F}$$

רוטור של שדה וקטורי:

$$rot\vec{F} = curl\vec{F} = \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

<u>אינטגרל קווי סוג ראשון</u>

חישוב מסה אם ידועה פונקצית צפיפות ρ.

חישוב אורך קשת: $l = \int_l dl$

אופן החישוב: $\int_l f(x,y,z)dl = \int_a^b f(x(t),y(t),z(t)) \cdot |r'(t)|dt$

כאשר $|r'(t)| = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}$

אם העקום מישורי ונתון בקואורדינטות קוטביות: $\int\limits_l f(x,y)dl = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\sqrt{r^2+r'^2}\,d\varphi$

<u>אינטגרל קווי סוג שני</u>

חישוב עבודה של שדה וקטורי.

הגדרה – הכיוון החייובי של l זהו כיוון עליית הפרמטר t.

$$\int\limits_l \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int\limits_l P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$$

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k}$$

$$\vec{r}'(t) = x'(t)\hat{i} + y'(t)\hat{j} + z'(t)\hat{k}$$

אופן החישוב:

$$\int\limits_l \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int\limits_a^b [P(x(t),y(t),z(t))\cdot x'(t) + Q(x(t),y(t),z(t))\cdot y'(t) + R(x(t),y(t),z(t))\cdot z'(t)]dt$$

ובצורה וקטורית: $\int\limits_l \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int\limits_a^b \vec{F}\cdot\vec{r}'(t)dt$

אם שדה וקטורי $\vec{F}$ הוא מישורי $\vec{F} = P(x,y)\hat{i} + Q(x,y)\hat{j}$ ועקום l נתון בצורה מפורשת $y = f(x)$:

$$\int\limits_l \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int\limits_a^b [P(x,y,z) + Q(x,y,z)\cdot y'(x)]dx$$

<u>משפט גרין:</u>

יהי D תחום קשיר ופתוח בעל שפה l בכיוון החיובי. יהי שדה וקטורי מישורי $\vec{F}(x,y) = P(x,y)\hat{i} + Q(x,y)\hat{j}$ שייך למחלקה C^1 ב-D אז מתקיים:

$$\int\limits_l P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

<u>משפט לאי תלות במסלול אינטגרציה:</u>

יהי $\vec{F}(x,y) = P(x,y)\hat{i} + Q(x,y)\hat{j}$ שדה וקטורי רציף מעל תחום מישורי D אז שלוש הטענות הבאות שקולות:

1. לכל קו סגור l ב-D מתקיים $\int\limits_l \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0$
2. האינטגרל $\int\limits_{AB} \vec{F}\cdot d\vec{r}$ אינו תלוי במסלול המחבר את הנקודות A ו-B, שכולו נמצא בתחום D.
3. קיימת פונקציה סקלרית רציפה $U(x,y)$ כך ש $\nabla U = \vec{F}(x,y)$, ז"א $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ הוא דיפרנציאל שלם ומתקיים: $\int\limits_{AB} Pdx + Qdy = U(B) - U(A)$

אם בנוסף לכך השדה $\vec{F}$ מוגדר מעל תחום פשוט קשר D ושייך ל- C^1 אזי $\vec{F}$ הוא שדה משמר אם ורק אם $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$

אינטגרל משטחי

משטח חלק – שייך למחלקה C^1

הצגת משטח בצורה וקטורית: $\vec{r}(u,v) = x(u,v)\hat{i} + y(u,v)\hat{j} + z(u,v)\hat{k}$

נורמל – וקטור נורמל למשטח S הנתון בצורה וקטורית:

$$\vec{N} = \vec{r}_u' \times \vec{r}_v' = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x_u' & y_u' & z_u' \\ x_v' & y_v' & z_v' \end{vmatrix}$$

ובצורה מפורשת: $\vec{r}_u' \times \vec{r}_v' = -f_x'\hat{i} - f_y'\hat{j} + \hat{k}$

וקטור נורמל יחידה: $\hat{n} = \frac{\vec{N}}{|\vec{N}|} = \frac{\vec{r}_u' \times \vec{r}_v'}{|\vec{r}_u' \times \vec{r}_v'|}$

אם משטח S נתון בצורה $\phi(x,y,z) = 0$ אז הנורמל הוא $\vec{N} = \nabla\phi = \phi_x'(-\hat{i}) + \phi_y'(-\hat{j}) + \phi_z'\hat{k}$

הכיוון החיובי של המשטח הוא כיוון הנורמל $\vec{N} = \vec{r}_u' \times \vec{r}_v'$, ז"א אם S משטח סגור אז הכיוון החיובי הוא כלפי חוץ, ואם S משטח פתוח אזי הוא בכיוון החיובי של ציר Z.

חישוב שטח פנים:

S משטח דו צדדי הנתון בצורה וקטורית $\vec{r}(u,v) = x(u,v)\hat{i} + y(u,v)\hat{j} + z(u,v)\hat{k}$:

$$S = \iint_D |\vec{r}_u' \times \vec{r}_v'| dudv$$

אם המשטח מוגדר בצורה מפורשת $z = f(x,y)$:

$$S = \iint_D \sqrt{1 + f_x'^2(x,y) + f_y'^2(x,y)}dxdy$$

אינטגרל משטחי סוג ראשון:

מסת משטח, כאשר ρ היא פונקצית צפיפות המסה:

$$\iint_S \rho(x,y,z)ds = \iint_S \rho(x(u,v), y(u,v), z(u,v))|\vec{r}_u' \times \vec{r}_v'| dudv$$

אינטגרל משטחי סוג שני:

נתון $\vec{F} = P(x,y,z)\hat{i} + Q(x,y,z)\hat{k} + R(x,y,z)\hat{j}$ שדה וקטורי:

$$I = \iint_S Pdydz + Qdxdz + Rdxdy = \iint_S \vec{F} \cdot \hat{n}ds$$

ניתן לרשום $\hat{n}ds = dS$

$$I = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{r}_u' \times \vec{r}_v' dudv =$$

נוסחאות שימושיות לחישוב:

$$= \iint_S \begin{vmatrix} P & Q & R \\ x_u' & y_u' & z_u' \\ x_v' & y_v' & z_v' \end{vmatrix} dudv$$

אם המשטח S נתון בצורה מפורשת $z = f(x,y)$:

$$I = \iint_D (P\hat{i} + Q\hat{j} + R\hat{k}) \cdot (-f_x'\hat{i} - f_y'\hat{j} + \hat{k})dxdy$$

משפט גאוס:

יהי S משטח חלק וסגור בעל נורמל חיצוני $\hat{n}$. אם נתון שדה וקטורי $\vec{F} = P\hat{i} + Q\hat{j} + R\hat{k}$ השייך למחלקה C^1 בגוף V ששפתו S אז מתקיים:

$$\iint_S \vec{F}\cdot\hat{n}ds = \iiint_V div\vec{F}\cdot dv$$

או: $$\iint_S P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz$$

<u>משפט סטוקס:</u>

אם באיזו סביבה של המשטח S השדה הוקטורי $\vec{F}=P\hat{i}+Q\hat{j}+R\hat{k}$ שייך למחלקה C^1 אזי מתקיים:

$$\iint_S rot\vec{F}\cdot\hat{n}ds = \int_l \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

או: $$\iint_S \nabla\times\vec{F}\hat{n}ds = \int_l \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

כאשר l היא השפה של המשטח S בכיוון החיובי.

<u>שדה משמר:</u>

יהי $\vec{F}=P\hat{i}+Q\hat{j}+R\hat{k}$ שדה וקטורי השייך למחלקה C^1 מעל גוף פשוט קשר משטחי (לכל קו סגור l קיים משטח דו צדדי שהקו l הוא שפתו) אז ארבע הטענות הבאות שקולות:

1. לכל קו סגור $\int_l \vec{F}\cdot d\vec{r}=0$
2. האינטגרל $\int_{AB}\vec{F}\cdot d\vec{r}$ אינו תלוי במסלול המחבר את הנקודות A ו-B שכולו נמצא בגוף V.
3. קיים שדה סקלרי $U(x,y,z)$ כך ש- $\nabla U=\vec{F}(x,y,z)$, ז"א הביטוי $dU=Pdx+Qdy+Rdz$ הוא דיפרנציאל שלם ומתקיים:

$$\int_{AB}\vec{F}\cdot d\vec{r}=U(B)-U(A)$$

4. $\nabla\times\vec{F}=rot\vec{F}=0$

<u>מציאת פונקצית הפוטנציאל:</u>

$$U(x,y,z)=\int_{x_0}^{x}P(t,y,z)dt+\int_{y_0}^{y}Q(x_0,v,z)dv+\int_{z_0}^{z}R(x_0,y_0,w)dw+c$$

באופן דומה ניתן להתחיל את האינטגרציה לפי y או לפי z.