# קומבינטוריקה למדעי המחשב
# התאמה חח"ע

נושא התרגול: הגדרות לא פורמליות ודוגמאות לפונקציות. במהלך הקורס נדרש להבנת המושג "התאמה חח"ע" בכל פעם שנדבר על בעיות ספירה "שקולות" במובן כלשהו.

קבוצה היא אוסף של אלמנטים, ללא חשיבות לסדר שלהם. קבוצות יסומנו בד"כ באותיות לטיניות גדולות.

לדוגמא:

$$X_1 = \{A, B, C, \ldots Z\}$$

$$Y_1 = \{1, 2, 3, \ldots 26\}$$

גודל קבוצה $X$ (מספר האלמנטים בה) יסומן באופן הבא: $|X|$. סוגריים מסולסלים מציינים שאין חשיבות לסדר האלמנטים בתוך הקבוצה. לא להתבלבל עם סוגריים רגילים, שמציינים כי יש חשיבות לסדר האלמנטים, והם מסמנים וקטורים ולא קבוצות. כך לדוגמא

$$v = (1, 2, 3, 4), \quad u = (2, 1, 3, 4)$$

$u$ ו- $v$ הם שני וקטורים שונים.

פונקציה מקבוצה $X$ לקבוצה $Y$ היא התאמה של איבר יחיד מ- $Y$ לכל איבר ב- $X$. $X$ נקרא התחום של הפונקציה, ו- $Y$ נקרא הטווח.

לדוגמא, עבור $X_1$ ו- $Y_1$ לעיל: $f_1$ פונקציה מ- $X_1$ ל- $Y_1$ (ונסמן $f_1 : X_1 \to Y_1$) המוגדרת:

$$\begin{array}{ccc} A \mapsto 1 & \text{מסמנים} & f_1(A) = 1 \\ B \mapsto 2 & \text{מסמנים} & f_1(B) = 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ Z \mapsto 26 & \text{מסמנים} & f_1(Z) = 26 \end{array}$$

דוגמא שניה:

$$g : \{A, B, C, \dots, Z, a, b, c \dots z\} \to \{1, 2, \dots, 26\}$$

$$\begin{array}{c} g(A) = 1 \text{ , } g(a) = 1 \\ g(B) = 2 \text{ , } g(b) = 2 \\ \vdots \quad , \quad \vdots \\ g(Z) = 26, g(z) = 26 \end{array}$$

דוגמא נוספת: פונקצית הציון של כל סטודנט בקורס.

$$h : \{\text{סטודנטים בקורס קומבינטוריקה}\} \to \{0, 1, 2, \dots, 100\}$$

## 1 פונקציה חח"ע

פונקציה $f : X \to Y$ תקרא פונקציה חח"ע אם לכל איבר של $X$ יותאם איבר שונה של $Y$.

דוגמאות

- $f_1$ לעיל היא חח"ע: לכל איבר של $X_1$ (אות לטינית גדולה) הותאם איבר שונה של $Y_1$ (מספר בין 1 ל- 26).
- $g$ לעיל אינה חח"ע: גם $B$ וגם $b$, למשל, בתחום של $g$ מותאמים לאותו איבר בטווח של $g$ (המספר 2).
- $h$ לעיל אינה חח"ע, מכיוון שיש רק 101 ציונים, אבל כ-180 סטודנטים. כלומר, שום $h$ לא תצליח לתת לכל סטודנט ציון היחודי רק לו.

## 2 פונקציה על

פונקציה $f : X \to Y$ תקרא על אם לכל איבר ב- $Y$ יש איבר (אחד לפחות) ב- $X$ שמותאם אליו.

- הפונקציה $f_1$ היא על: לכל איבר בטווח (מספר בין 1 ל- 26) יש איבר בתחום (אות $Z$–$A$) שמותאמת אליו.
- הפונקציה $g$ גם-כן על. לכל איבר בטווח יש לפחות איבר אחד בתחום שמותאם אליו (ולמעשה, יש שניים).
- $h$ (כנראה) לא תהיה על: בהנחה שכל הסטודנטים יקבלו ציון בין 90 ל- 100, לציונים רבים (0, למשל), לא "יועבר" שום סטודנט.

שימו לב שהתכונות חח"ע ועל אינן תלויות זו בזו. ייתכנו פונקציות שהן לא על ולא חח"ע, או על ולא חח"ע, או חח"ע ולא על, או על וחח"ע.

<u>שאלה:</u> מה הן הפונקציות הנוספות המוכרות לנו שמשתייכות לכל אחד מארבעת הסוגים הללו?

## 3 התאמה חח"ע

פונקציה $f : X \to Y$ תקרא התאמה חח"ע אם היא פונקציה חח"ע ועל.
אם $X$ ו- $Y$ שתיהן קבוצות סופיות וקיימת התאמה חח"ע ביניהן, אזי בשתי הקבוצות מספר שווה של איברים. כמו כן קיימת פונקציה הפוכה, $f^{-1} : Y \to X$, שגם היא התאמה חח"ע.

- $f_1$ —כן (ואכן ב- $X_1$ וב- $Y_1$ מספר איברים שווה - 26).
- $g$ —לא (אינה חח"ע).
- $h$ —לא (אינה חח"ע ואינה על).

דוגמא נוספת: לצורך הגשת תרגילי הבית (ובהיענות להפצרות המתרגלים) התחלקו הסטודנטים לזוגות.

$$f_2 : \{\text{סטודנטים}\} \to \{\text{סטודנטים}\}$$

$$f_2(\text{סטודנט}) = \text{בן הזוג שלו בהגשה}$$

$f_2$ היא חח"ע (כי לכל סטודנט יש בן-זוג אחר, גם לשניים שמגישים יחד). היא גם על (כי לכל סטודנט יש בן-זוג). במקרה זה ברור כי בתחום ובטווח אותו מספר איברים.

## 4 תרגיל

הוכיחו כי מספר האפשרויות לבחור ועד של $k$ אנשים בכיתה של $n$ סטודנטים שווה למספר המילים הבינאריות באורך $n$ בהן מופיעים $k$ אחדים בדיוק.

<u>הוכחה</u>: נגדיר פונקציה

$$f: \{\text{אוסף המילים הבינאריות באורך } n \text{ עם } k \text{ אחדים}\} \to \{\text{אוסף הוועדים של } k \text{ אנשים שנבחרו מתוך } n \text{ סטודנטים}\}$$

הפונקציה תוגדר באופן הבא: כל סטודנט יקבל מספר סידורי בין $1$ ל $n$. עבור מילה בינארית באורך $n$, אם האות ה- $i$ שווה ל- $1$ - הסטודנט ה- $i$ ייבחר לוועד. אם האות ה- $i$ שווה ל- $0$ - הסטודנט ה- $i$ לא ייבחר לועד.

<u>שימו לב</u>: לכל מילה מתאים ועד אחד ויחיד (וחוקי). לכן, הפונקציה מוגדרת היטב.

<u>חח"ע</u>: נתונות שתי מילים בינאריות שונות, $x \neq y$. בהכרח קיים $i$ כך שבה"כ $x_i = 0$ ו- $y_i = 1$. אזי, לוועד $f(x)$ הסטודנט ה- $i$ לא ייבחר. לעומת זאת, לוועד $f(y)$ הסטודנט הזה כן ייבחר. לכן, הוועדים המתאימים יהיו שונים. מכאן, שפונ-קציה $f$ היא חח"ע.

<u>על</u>: נתון ועד של $k$ סטודנטים. נסמן את מספרים הסידורי של הסטודנטים שנבחרו לוועד זה $s_1, s_2, \ldots, s_k$. נגדיר מילה $x$ באורך $n$, כך שכל האותיות בה יהיו $0$ פרט לאותיות $s_1, s_2, \ldots, s_k$, שיהיו $1$. אזי, $f(x)$ היא בדיוק הוועד שממנו התחלנו ולכן $f$ היא על.

<u>מסקנה</u>: הפונקציה $f$ שהגדרנו היא חח"ע ועל. לכן מספר המילים הבינאריות באורך $n$ עם $k$ אחדים שווה למספר האפשרויות לבחור ועד של $k$ סטודנטים מתוך קבוצה של $n$ סטודנטים.

מהו המספר הזה?

# קומבינטוריקה למדעי המחשב
# תמורות, חליפות, צירופים

## 1 הגדרות

**עקרון החיבור:** אם אפשר לבחור "משהו" אחד שנסמנו ב-$A$ ב-$n_A$ אופנים, ו"משהו" אחר שנסמנו ב-$B$ ב-$n_B$ אופנים, אזי לבחירת אחד מן השניים (או $A$ או $B$), אבל לא שניהם, יש $n_A + n_B$ אופנים.

**עקרון הכפל:** אם אפשר לבחור את האיבר $A$ ב-$n_A$ אופנים, ולאחר כל בחירה כזו אפשר לבחור את האיבר $B$ ב-$n_B$ אופנים, אזי לבחירת שניהם בסדר הנ"ל ($A$ ולאחריו $B$) יש $n_A n_B$ אפשרויות.

**מס' תמורות:** מס' האפשרויות לסדר $n$ עצמים שונים: $P(n) = n!$

**מס' חליפות:** מס' האפשרויות לבחור $k$ עצמים מתוך $n$ עצמים שונים, עם חשיבות לסדר:

$$P(n,k) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

**מס' צירופים:** מס' האפשרויות לבחור $k$ עצמים מתוך $n$ עצמים שונים, ללא חשיבות לסדר:

$$C(n,k) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

## 2 תרגילים

1. במשפחה אב, אם, 4 בנות ו-$k$ בנים.

(א) מה מס' האפשרויות לסדרם סביב שולחן עגול?
יש לנו $k+6$ אנשים שונים לסדרם במעגל: $(k+5)!$

(ב) אם לאב מקום ישיבה קבוע?
נושיב את האב, ונסדר את השאר יחסית אליו: $(k+5)!$

(ג) אם האב והאם יושבים תמיד אחד ליד השני?
נתיחס אליהם כאל איש אחד. עכשיו צריך להושיב $k+5$ אנשים במעגל. מס האפשרויות: $(k+4)!$ אבל האב והאם יכולים לשבת זה ליד זה בשני אופנים. לכן בסה"כ $2\cdot(k+4)!$.

(ד) אם אסור ששני הצעירים ישבו יחד?
נקרא לסידור חוקי מאורע $A$ ולסידור לא-חוקי מאורע $B$. לפי חוק הסכום

$$m+n=(k+5)!$$

כי המאורעות זרים ו"אחד מהם" פירושו סידור כלשהו סביב השולחן. אנחנו יודעים גם ש-$n=2(k+4)!$ (בהקבלה לסעיף ג'). נחלץ את $m$ ונקבל התשובה:

$$(k+5)!-2(k+4)!$$

2. נתונות 10 סוכריות לחלוקה בין משה וחיים.

(א) כמה אפשרויות לחלוקה יש, בהנחה שהסוכריות זהות?
נשים לב שכל מה שמשנה הוא כמה סוכריות כל ילד יקבל:

| | |
|---|---|
| 0 לחיים | 10 למשה |
| 1 לחיים | 9 למשה |
| ⋮ | ⋮ |
| 10 לחיים | 0 למשה |

בסה"כ 11 אפשרויות.

(ב) כמו בסעיף הקודם, אבל הפעם הסוכריות שונות:
שני פתרונות:

i. נסמן ב-$i$ את מספר הסוכריות שמשה מקבל. לפי חוק הסכום:

$$\sum_{i=0}^{10}\binom{10}{i}$$

ii. נסתכל על נקודת המבט של הסוכריה: כל סוכריה יכולה להגיע לפיו של משה או של חיים —שתי אפשרויות. בסה"כ יש כאן 10 מאורעות זרים (עבור 10 סוכריות), ולכ"א מהם 2 תוצאות אפשר-יות. נפעיל את חוק המכפלה ונקבל $2^{10}$.

אנו נעדיף את התשובה $2^{10}$ כי היא דורשת פחות פעולות חישוב .

(ג) הסוכריות שונות, אבל הפעם לא בהכרח כל הסוכריות מחולקות לילדים?
לכל מאורע (חלוקת סוכריה) יש 3 תוצאות אפשריות: למשה, לחיים, או בחזרה לצנצנת. התשובה, לכן, $3^{10}$.

(ד) כעת יש $10$ סוכריות שונות, ורוצים לחלקן ל-$10$ ילדים (תמיד שונים) כך שכל ילד יקבל בדיוק סוכריה אחת?
נושיב את הילדים בסדר מסוים (נניח, ע"פ גובה). כעת מספר אפשרויות החלוקה הוא כמספר האפשרויות לסדר את הסוכריות: $10!$.

3. בקורס בקומבינטוריקה $2n$ סטודנטים. לשם הגשת תרגילי בית עליהם להתחלק לזוגות. מה מס' האפשרויות לעשות זאת?
שני פתרונות (את השני יש להסביר רק במידה ויש זמן, אחרת להמשיך לשאלה הבאה):

(א) נבחר את הזוג הראשון מתוך הסטודנטים (ללא חשיבות לסדר, שכן הסדר בתוך כל זוג איננו משנה). מס' האפשרויות $\binom{2n}{2}$. כעת נבחר את הזוג השני מבין הנותרים, וכך הלאה. ספרנו בסה"כ

$$\binom{2n}{2}\binom{2n-2}{2}\cdots\binom{4}{2}$$

אפשרויות. אבל בצורה זאת הכנסנו סדר בין הזוגות. לכן צריך לחלק במספר האפשרויות לסדר את הזוגות ($n!$). התשובה היא:

$$\frac{\binom{2n}{2}\binom{2n-2}{2}\cdots\binom{4}{2}}{n!}$$

(ב) נסדר את הסטודנטים בשורה ( $(2n)!$ אפשרויות), והזוגות יקבעו לפי הסדר הנתון. בצורה זו יצרנו סדר בין הזוגות וגם סדר בתוך כל זוג. לכן עלינו לחלק במס' האפשרויות לסדר את הזוגות ולסדר כל זוג:

$$\frac{(2n)!}{n!(2!)^n}$$

4. כמה אפשרויות יש להושיב $n$ אנשים על ספסל אם

(א) ראובן רואה את שמעון מימינו (לאו דוקא צמוד)?
שני פתרונות:

i. נבחר שני מקומות עבור ראובן ושמעון, בלי חשיבות לסדר (שכן מהרגע שנבחרו המקומות, הסדר בין ראובן ושמעון יחיד). מס' האפשרויות $\binom{n}{2}$. עכשיו נסדר את שאר האנשים:

$$\binom{n}{2} \cdot (n-2)!$$

ii. משיקולי סימטריה : מכל אפשרות חוקית (ראובן רואה את שמ-עון מימינו) ניתן לקבל אפשרות לא-חוקית (ראובן רואה את שמ-עון משמאלו) ע"י החלפת מקומותיהם של ראובן ושמעון בלבד. לכן, נובע שמספר האפשרויות החוקיות שווה למספר האפשרויות האסורות. סכום שתיהן $n!$ ולכן התשובה היא $n!/2$.

(ב) ראובן רואה את שמעון מימינו ודינה רואה את צילה משמאלה?
שוב, שני פתרונות:

i. נבחר שני מקומות עבור ראובן ושמעון, אח"כ שני מקומות עבור צילה ודינה. לבסוף נסדר את כל הנותרים:

$$\binom{n}{2}\binom{n-2}{2}(n-4)!$$

ii. מטיעונים דומים לאלה של הסעיף הקודם, ניתן לחלק את קבוצת האפשרויות ל-4 קבוצות שוות-גודל, המתיחסות לחוקיות סדר הישיבה של שני הזוגות. לכן התשובה $n!/4$.

(ג) שמעון ראה את ראובן ואת לוי משמאלו?

i. נבחר שלושה מקומות:$\binom{n}{3}$. כעת יש שתי אפשרויות סידור חוקיות (ראובן ולוי, שניהם משמאלו של שמעון). לבסוף נסדר את כל הנותרים:

$$2\binom{n}{3}(n-3)!$$

ii. ושוב משיקולי סימטריה:
נחלק את הסידורים ל-$3!$ מחלקות שקילות, בהתאם לסידור הפ-נימי של ראובן, שמעון ולו. רק שתיים מבין שש המחלקות הללו חוקיות ולכן מספר האפשרויות הכולל הוא: $2\frac{n!}{6} = \frac{n!}{3}$

# קומבינטוריקה למדעי המחשב
# תמורות וצירופים עם חזרות

## 1 סיכום שיטות הספירה

### 1.1 חוק החיבור והכפל

עקרון החיבור: אם אפשר לבחור "משהו" אחד שנסמנו ב-$A$ ב-$n_A$ אופנים, ו"משהו" אחר שנסמנו ב-$B$ ב-$n_B$ אופנים, אזי לבחירת אחד מן השניים (או $A$ או $B$), אבל לא שניהם, יש $n_A + n_B$ אופנים.

עקרון הכפל: אם אפשר לבחור את האיבר $A$ ב-$n_A$ אופנים, ולאחר כל בחירה כזו אפשר לבחור את האיבר $B$ ב-$n_B$ אופנים, אזי לבחירת שניהם בסדר הנ"ל ($A$ ולאחריו $B$) יש $n_A n_B$ אפשרויות.

### 1.2 בחירת $k$ מתוך $n$

| בלי חשיבות לסדר | עם חשיבות לסדר | |
|---|---|---|
| $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$ | $\frac{n!}{(n-k)!}$ | בלי חזרות |
| $\binom{n+k-1}{k}$ | $n^k$ | עם חזרות |

### 1.3 תמורות

סידור $n$ אלמנטים

- בלי חזרות: $n!$.
- עם חזרות כאשר נתונים $q_1$ אלמנטים מסוג 1, $q_2$ אלמנטים מסוג 2, ..., $q_t$ אלמנטים מסוג $t$:

$$\frac{(q_1+q_2+...+q_t)!}{q_1!\,q_2!\,...\,q_t!}$$

### 1.4 צירופים עם חזרות

$$\binom{n+k-1}{k}$$

<u>הבעיות הבאות הן שקולות</u>

- בחירה של $k$ מתוך $n$ סוגים עם חזרות כאשר הסדר לא חשוב.
- חלוקת $k$ כדורים זהים ל $n$ תאים שונים.
- מספר הפתרונות של המשוואה $x_1+x_2+...+x_n=k$ כאשר $x_i$ טבעיים (כולל אפס).

## 2 דוגמאות

1. נתונות האותיות א,א,א,א,ב,ב,ב,ב,ג,ג,ג,ג,ד,ד,ד,ד (כלומר, 4 פעמים מכל אות). כמה מלים בנות 10 אותיות ניתן ליצור מהן, אם כל אות צריכה להופיע לפחות פעמיים?
בכדי להשתמש בנוסחה של תמורות עם חזרות, עלינו לדעת בדיוק כמה אותיות יש מכל סוג. לכן נפריד למקרים זרים:
   (א) אות אחת מופיעה 4 פעמים (ושאר האותיות מופיעות פעמיים).
   במקרה זה ישנן 4 אפשרויות לבחירת האות שמופיעה 4 פעמים, ואז יש לסדר את האותיות:
$$\frac{10!}{4!2!2!2!}$$

(ב) שתי אותיות מופיעות שלוש פעמים, והשתיים הנותרות מופיעות פעמי-
ים.
ישנן $6 = \binom{4}{2}$ אפשרויות לבחור את האותיות שתופענה פעמיים, ומספר הסידורים האפשריים (לכל בחירה) הוא:

$$\frac{10!}{3!3!2!2!}$$

התשובה המלאה:

$$4 \cdot \frac{10!}{4!2!2!2!} + 6 \cdot \frac{10!}{3!3!2!2!}$$

2. יש ערימה של כדורים: אדומים, כחולים וסגולים (כדורים שווי צבע הינם זהים). בכמה דרכים ניתן לבחור מתוכם 10 כדורים כך ש:

(א) צריכים להיות לפחות 5 אדומים?
נבחר תחילה 5 כדורים אדומים. כעת מה שנותר הוא לבחור עוד 5 כדורים מתוך 3 סוגים (שקול לזריקת 5 כדורים זהים ל-3 תאים שונים), כלומר

$$\binom{5+(3-1)}{5} = \binom{7}{5} = 21$$

(ב) צריכים להיות <u>לכל היותר</u> 5 כדורים אדומים?
נשתמש בשיטת המשלים; מספר האפשרויות הכולל (אסורות ומותרות) הוא $\binom{10+(3-1)}{10}$. מהו מספר האפשרויות האסורות? אם לא מתקיים שיש לכל היותר 5 אדומים, אז בהכרח יש <u>לפחות</u> 6 אדומים. בדומה לסעיף הקודם, זה יוצא $\binom{4+(3-1)}{4}$, והפתרון הוא

$$\binom{10+(3-1)}{10} - \binom{4+(3-1)}{4}$$

3. דרך קו תקשורת רוצים להעביר 5 אותיות שונות (כל אות פעם אחת) ו-15 רווחים (זהים) שצריכים להפריד ביניהן. בין כל שתי אותיות חייב להפריד לפחות רווח אחד, וכל הרווחים חייבים להמצא בין האותיות ולא בצדדים. לדוגמא,

$$a \diamond \diamond \diamond \diamond b \diamond \diamond \diamond \diamond \diamond c \diamond d \diamond \diamond \diamond \diamond \diamond e$$

זו הודעה חוקית.. מהו מספר ההודעות החוקיות?
ראשית, נקבע את הסדר של האותיות השונות $5!$. כעת מה שנותר לקבוע

הוא את חלוקת הרווחים למקומות בין האותיות כך שיהיה לפחות רווח אחד בין כל שתי אותיות סמוכות.

$$a \sqcup b \sqcup c \sqcup d \sqcup e$$

יש לנו 4 תאים שונים (מקומות בין האותיות) ו-15 כדורים זהים (הרווחים) שצריך לחלק, כך שבכל תא יהיה לפחות כדור אחד. למעשה, נותרו 11 כדורים לחלוקה. התשובה:

$$5!\binom{11+(4-1)}{11} = 5!\binom{14}{11}$$

4. כמה פתרונות יש למשוואות הבאות?

(א) $x_i \in \{0,1\}$ $\qquad$ $\sum_{i=1}^{100} x_i = 20$

צריך בעצם לבחור 20 $i$ כך ש-$x_i = 1$ (השאר 0):

$$\binom{100}{20}$$

(ב) $x_i \in \{0,1\}$ $\qquad$ $\sum_{i=1}^{100} x_i \leq 100$

בעצם אין הגבלה על הפתרונות. כל $x_i$ יכול להיות 0 או 1 ולכן $2^{100}$.

(ג) $0 \leq x_i \in \mathbb{Z}$ $\qquad$ $\sum_{i=1}^{100} x_i = 200$

יש לחלק 200 כדורים זהים (יחידות שלמות) ל-100 תאים שונים (המשתנים):

$$\binom{200+(100-1)}{200} = \binom{299}{200}$$

(ד) $1 \leq x_i \in \mathbb{Z}$ $\qquad$ $\sum_{i=1}^{100} x_i = 200$

נשים תחילה כדור אחד בכל תא ונחלק את ה-100 הנותרים:

$$\binom{100+(100-1)}{100} = \binom{199}{100}$$

(ה) $0 \leq x_i \in \mathbb{Z}$ $\qquad$ $\sum_{i=1}^{100} x_i \leq 200$

נוסיף עוד משתנה, $x_{101}$, ונמצא את מספר הפתרונות למשוואה $\sum_{i=1}^{101} x_i = 200$:

$$\binom{200+(101-1)}{100} = \binom{300}{100}$$

מספר הפתרונות זהה לזו של המשוואה המקורית, משום שכאשר סכום ה-$x_i$-ים במשוואה המקורית קטן מ-$200$, ההפרש הוא בדיוק הערך שי-קבל המשתנה $x_{101}$ במשוואה החדשה.

5. בבחירות לפרלמנט שבו $2n+1$ מושבים משתתפות 3 מפלגות. כמה חלוקות שונות של המושבים בין המפלגות יגרמו לכך שלכל קואליציה של 2 מפלגות יהיה רוב?

התנאי קובע שכל מפלגה חייבת לקבל לכל היותר $n$ מושבים (אחרת יהיה לה רוב על שתי האחרות). זהו תנאי הכרחי ומספיק. נשתמש שוב בשיטת המשלים:

- מספר האפשרויות הכולל הוא כמספר האפשרויות לחלק $2n+1$ כדור-ים זהים (המושבים) ל-3 תאים שונים (אלו המפלגות):

$$\binom{2n+1+(3-1)}{2n+1} = \binom{2n+3}{2}$$

- מספר האפשרויות האסורות הוא כמספר האפשרויות בהן קיימת מפלגה לה יש $n+1$ מושבים לפחות. נשים לב שיכולה להיות רק אחת כזאת. במקרה זה נותרו לנו $2n+1-(n+1)=n$ כדורים לחלוקה ל-3 תאים. נכפיל במספר האפשרויות לבחור את המפלגה השלטת:

$$\binom{3}{1}\binom{n+(3-1)}{n}$$

בסה"כ הפתרון הוא:

$$\binom{2n+3}{2} - 3\binom{n+2}{n}$$

דרך ב': פתרון הבעייה שקול למציאת מספר הפתרונות במשוואה:

$$x_1+x_2+x_3=2n+1, \qquad 0\le x_i\le n$$

כעת נציב:

$$x_i := n-y_i$$

(התנאי $0\le x_i\le n$ שקול לתנאי $0\le n-y_i\le n$, כלומר: $0\le y_i\le n$)

ונקבל משוואה ששקולה למשוואה המקורית:

$$n-y_1+n-y_2+n-y_3=2n+1, \qquad 0\le y_i\le n$$

או:

$$y_1 + y_2 + y_3 = n - 1, \qquad 0 \le y_i \le n$$

שימו לב שכל פתרון של המשוואה החדשה מתאים (ע"י ההצבה הנ"ל) לפיתרון של המשוואה המקורית.

אבל ההגבלה על $y_i$ היא כעת חסרת משמעות: הרי אם סכום ה-$y_i$-ים שווה ל-$n-1$ אז בוודאי מתקיים $y_i \le n$. לכן מספר הפתרונות של המשוואה זהה למספר הפתרונות של:

$$y_1 + y_2 + y_3 = n - 1, \qquad 0 \le y_i$$

והוא, אנו כבר יודעים, שווה ל-

$$\binom{n-1+(3-1)}{n-1} = \binom{n+1}{n-1}$$

# קומבינטוריקה למדעי המחשב
# הוכחות קומבינטוריות ובינום ניוטון

## 1 אינדוקציה

הוכח באינדוקציה על $t$:

$$\sum_{k=0}^{t}\binom{n+k}{r}=\binom{n+t+1}{r+1}-\binom{n}{r+1}$$

<u>בסיס:</u> $t=0$:

$$\binom{n}{r}=\binom{n+1}{r+1}-\binom{n}{r+1}$$

או:

$$\binom{n}{r}+\binom{n}{r+1}=\binom{n+1}{r+1}$$

וזה שיוויון משולש פסקל.

<u>צעד:</u> נניח נכונות לכל $t$ שמקיים $0\le t\le p$ ונוכיח עבור $t=p+1$:

$$\sum_{k=0}^{p+1}\binom{n+k}{r}=\binom{n+p+1}{r}+\sum_{k=0}^{p}\binom{n+k}{r}\underbrace{=}_{\text{לה"א}}$$

$$=\underbrace{\binom{n+p+1}{r}+\binom{n+p+1}{r+1}}_{\text{זהות משולש פסקל}}-\binom{n}{r+1}=$$

$$=\binom{n+p+2}{r+1}-\binom{n}{r+1}\qquad\blacksquare$$

מקרה פרטי: נציב $n=0$ בזהות שהוכחנו ונקבל:

$$\sum_{k=0}^{t}\binom{k}{r}=\binom{t+1}{r+1}-\binom{0}{r+1}$$

אבל $r$ האיברים הראשונים בסכום שמשמאל מתאפסים, וכן הביטוי $\binom{0}{r+1}$, ולכן:

$$\sum_{k=r}^{t}\binom{k}{r}=\binom{t+1}{r+1}$$

## 2 הוכחות קומבינטוריות

הוכחה קומבינטורית: מציגים בעיה קומבינטורית ומראים איך ניתן לפתור אותה בשתי דרכים שונות כאשר כל דרך מובילה לצד אחר של השיוויון.

### 2.1 תרגיל

הוכח:

$$\binom{2n}{2}=2\binom{n}{2}+n^2$$

בעיה: בכמה אופנים ניתן לבחור ועד של 2 אנשים מתוך קבוצה של $n$ גברים ו- $n$ נשים.

- צד שמאל: טריוויאלי.
- צד ימין: ישנם שלושה מקרים שונים.
  - בחירה של גבר אחד ואישה אחת: $n^2$ אפשרויות.
  - בחירה של 2 נשים: $\binom{n}{2}$ אפשרויות.
  - בחירה של 2 גברים: $\binom{n}{2}$ אפשרויות.

  צד ימין של השיוויון זה הסכום שלהם.

### 2.2 תרגיל

הוכח:

$$\sum_{i=2}^{n}(i-1)2^{n-i}=2^n-n-1$$

<u>בעיה:</u> מהו מספר הוקטורים הבינאריים באורך $n$ בהם לפחות $2$ אחדים?

- צד ימין: מספר וקטורים בינאריים באורך $n$ הוא $2^n$. נחסיר מתוכו מספר וקטורים בינאריים בהם יש אחד יחיד ($n$ אפשרויות) ועוד $1$ עבור וקטור שכולו אפסים. נקבל
$$2^n-n-1$$

- צד שמאל: בוקטור חייבים להופיע לפחות שני אחדים. אז נסמן ע"י $i$ את המקום של ה-"1" השני משמאל. $i$ נע בין $2$ ל-$n$.

אחרי שקבענו את המקום של "1" הזה, משמאלו יש "1" אחד ושאר - אפסים. לכן בישביל לקבוע תוכן של $i-1$ המקומות השמאליים בוקטור יש $i-1$ אפשרויות. מימינו של "1" הזה יכולים להופיע גם "0" וגם "1" ולכן יש $2^{n-i}$ אפשרויות לקבוע את התוכן של החלק של הוקטור שמימינו ל-"1" הזה. סה"כ קיבלנו
$$\sum_{i=2}^{n}(i-1)\ 2^{n-i}$$

## 3 בינום ניוטון

### 3.1 תזכורת

לכל $x$ ו- $y$ ולכל $n$ חיובי שלם מתקיים:

$$(x+y)^n=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^iy^{n-i}$$

מקרה פרטי חשוב:

$$(1+x)^n=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^i$$

## 3.2 תרגיל

למה שווה הסכום:

$$2^2\binom{n}{1}+2^4\binom{n}{2}+2^6\binom{n}{3}+\ldots+2^{2n}\binom{n}{n}$$

פתרון: ננסה "לתקן" קצת את הביטוי הזה כך שניתן יהיה להשתמש בנוסחת הבינום. הביטוי יהיה שווה ל-

$$\sum_{i=1}^{n}2^{2i}\binom{n}{i}=\sum_{i=1}^{n}(2^2)^i\binom{n}{i}=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}(2^2)^i\binom{n}{i}+(2^2)^0\binom{n}{0}-(2^2)^0\binom{n}{0}=\sum_{i=0}^{n}(2^2)^i\binom{n}{i}-(2^2)^0\binom{n}{0}=$$

ע"י שימוש בנוסחת הבינום:

$$=(2^2+1)^n-1=5^n-1.$$

## 3.3 תרגיל

מהו המקדם החופשי של הביטוי

$$(1+x)^n(1+\frac{1}{x})^m$$

נכתוב:

$$(1+x)^n(1+\frac{1}{x})^m=(1+x)^n\frac{(x+1)^m}{x^m}=\frac{(1+x)^{n+m}}{x^m}=\frac{1}{x^m}\sum_{i=0}^{n+m}\binom{m+n}{i}x^i$$

את האיבר החופשי נקבל כאשר $i=m$. כלומר התשובה היא $\binom{n+m}{m}$.

דרך ב': נחשב כל בינום בנפרד:

$$\begin{aligned}(1+x)^n(1+\frac{1}{x})^m &= \left(\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^i\right)\left(\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}x^{-j}\right)\\ &= \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\binom{n}{i}\binom{m}{j}x^{i-j}\end{aligned}$$

המקדם בחופשי מתקבל כאשר $i-j=0$, כלומר כאשר $i=j$, ולכן הוא שווה ל-

$$\sum_{i=0}^{\min n,m} \binom{n}{i}\binom{m}{j}$$

כמסקנה מפתרון התרגיל, קיבלנו את הזהות:

$$\sum_{i=0}^{\min n,m} \binom{n}{i}\binom{m}{j} = \binom{m+n}{m}$$

האם ניתן היה להראות זאת באמצעות הוכחה קומבינטורית?

# קומבינטוריקה למדעי המחשב
# ועקרון ההכלה וההפרדה

## 1 עיקרון הכלה והפרדה - תזכורת

נתונים $n$ אלמנטים. נתונות $t$ תכונות : $p_1, p_2, ..., p_t$. כל אלמנט ביחס לכל תכונה או מקיים אותה או לא מקיים אותה.
נסמן:

- $W(p_i)$ -- מספר אלמנטים שמקיימים תכונה $p_i$.
- $W(p_i, p_j)$ -- מספר אלמנטים שמקיימים תכונות $p_i, p_j$.
- $\cdots$
- $W(p_1, p_2, ..., p_t)$ -- מספר אלמנטים שמקיימים תכונות $p_1, p_2, ..., p_t$.

נגדיר:

- $W(0) = n$ -- מספר האלמנטים סה"כ.
- $W(1) = \sum_{i=1}^{t} W(p_i)$ -- שימו לב: $W(1)$ אינו בהכרח מספר אלמנטים שמקיימים תכונה אחת. בפרט $W(1)$ יכול להיות גדול מ-$n$.
- $W(2) = \sum_{1 \leq i < j \leq t} W(p_i, p_j)$ -- סכום על כל זוגות התכונות.
- $W(r) = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < ... < i_r \leq t} W(p_{i_1}, p_{i_2}, ..., p_{i_r})$ -- סכום על כל $r$-יות של תכונות.
- $W(t) = W(p_1, p_2, ..., p_t)$

אזי מספר אלמנטים שלא מקיימים אף תכונה:

$$E(0) = W(p_1', p_2', \cdots, p_t') = \sum_{r=0}^{t} (-1)^r W(r)$$

## 2 תרגיל

לגברת כהן 8 נכדים.
במקפיא יש לה 6 ארטיקים בטעם וניל, 3 בטעם שוקולד, 6 בטעם תות ו-5 בטעם בננה. בשבת באו כל הילדים לביקור וכל נכד ביקש ארטיק מסויים.

בכמה דרכים יכלו הנכדים לבקש ארטיקים כך שגב' כהן תוכל למלא את כל הבקשות?

נגדיר 4 תכונות:
$P_1$ - יש יותר מ-6 בקשות לארטיקים בטעם וניל.
$P_2$ - יש יותר מ-3 בקשות לארטיקים בטעם שוקולד.
$P_3$ - יש יותר מ-6 בקשות לארטיקים בטעם תות.
$P_4$ - יש יותר מ-5 בקשות לארטיקים בטעם בננה.

במונחי התכונות הללו, אנו מעוניינים לחשב את $W(P_1', P_2', P_3', P_4')$

מספר הבקשות האפשריות ללא הגבלות: $n = 4^8$
$W(P_1) =$ 7 או 8 בקשות לוניל $= \binom{8}{7} \cdot 3 + \binom{8}{8} = 25$
$W(P_2) =$ בין 4 ל-8 בקשות לשוקולד $= \sum_{i=4}^{8} \binom{8}{i} 3^{8-i} = 7459$
$W(P_3) = W(P_1) = 25$
$W(P_4) = \binom{8}{6} 3^2 + \binom{8}{7} 3 + \binom{8}{8} = 277$

כעת נשים לב שלכל שתי תכונות $P_i, P_j$: $W(P_i, P_j) = 0$ (וגם הביטויים עבור שלשות ורביעיות של תכונות מתאפסים, כמובן).

$$\Longrightarrow W(P_1', P_2', P_3', P_4') = n - \sum_{i=1}^{4} W(P_i) = 4^8 - (25 + 7459 + 25 + 277)$$

## 3 תרגיל

בכמה אופנים ניתן לסדר בשורה מספרים 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3 כך שלא יווצרו רצפים של 3 מספרים זהים?
<u>פתרון:</u>

- נגדיר שלוש תכונות $p_i$, כאשר $1 \leq i \leq 3$. $p_i$ - שלוש ספרות $i$ מופיעות ברצף.
- מחפשים את $E(0)$.

כל העולם: כל הסידורים של המספרים הנ"ל. $W(0) = \frac{9!}{(3!)^3}$

$$W(p_1) = W(p_2) = W(p_3) = \frac{7!}{3!\,3!} \;\Rightarrow\; W(1) = \sum_{i=1}^{3} W(p_i) = 3 \cdot \frac{7!}{3!\,3!}$$

$$W(p_1, p_2) = W(p_2, p_3) = W(p_1, p_3) = \frac{5!}{3!} \;\Rightarrow\; W(2) = \sum_{1 \le i < j \le 3} W(p_i, p_j) = 3 \cdot \frac{5!}{3!}$$

$$W(3) = W(p_1, p_2, p_3) = 3!$$

לפיכך הפתרון הוא

$$E(0) = \sum_{r=0}^{3} (-1)^r W(r) = W(0) - W(1) + W(2) - W(3)$$

## 4 תרגיל

סיסמה חוקית למחשב מורכבת מ-8 תווים (ספרות ואותיות באנגלית) וחייבת להכיל לפחות ספרה אחת, לפחות אות אנגלית קטנה אחת, ולפחות שתי אותיות גדולות. כמה סיסמאות חוקיות יש?

פתרון: העולם הוא כל הסיסמאות ללא הגבלות:
$\Leftarrow W(0) = (26 + 26 + 10)^8 = 62^8$

נגדיר תכונות:
$P_1$ - אין ספרות
$P_2$ - אין אותיות קטנות
$P_3$ - אין אותיות גדולות
$P_4$ - יש בדיוק אות גדולה אחת
מחפשים את $E(0)$.

$W(P_1) = (26 + 26)^8 = 52^8$
$W(P_2) = (26 + 10)^8 = 36^8 = W(P_3)$
$W(P_4) = 26 \cdot 8 \cdot (26 + 10)^7$
(כי יש 26 אפשרויות לבחור את האות, ואפשר לשים אותה ב-8 מקומות.)

בכך סיימנו לחשב את $W(1)$.

$W(P_1,P_2)=26^8=W(P_1,P_3)$
$W(P_2,P_3)=10^8$
$W(P_1,P_4)=26\cdot 8\cdot 26^7$
$W(P_2,P_4)=26\cdot 8\cdot 10^7$
$W(P_3,P_4)=0$

ובכך סיימנו לחשב את $W(2)$.
$W(3)=0$ כי אף שלוש תכונות מהתכונות הנ"ל לא יכולות להתקיים במקביל בשביל סיסמה כלשהי (למשל - לא תיתכן סיסמה בלי אותיות גדולות, אותיות קטנות וספרות). מכאן גם ברור ש-$W(4)=0$ (אם כל שלוש תכונות לא מתקיימות במקביל אז בוודאי גם 4 תכונות לא), ובכך חישבנו את כל הנחוץ על מנת לקבל את $E(0)$.

קומבינטוריקה למדעי המחשב
ועקרון ההכלה וההפרדה

## 1 עיקרון הכלה והפרדה - תזכורת

נתונים $n$ אלמנטים. נתונות $t$ תכונות : $p_1, p_2, ..., p_t$. כל אלמנט ביחס לכל תכונה או מקיים אותה או לא מקיים אותה.

נסמן:

- $W(p_{i_1}, p_{i_2}, ..., p_{i_k})$ -- מספר אלמנטים שמקיימים תכונות $p_{i_1}, p_{i_2}, ..., p_{i_k}$.
- $W(0) = n$ -- מספר האלמנטים סה"כ.
- $$W(r) = \sum_{1 \le i_1 < i_2 < ... < i_r \le t} W(p_{i_1}, p_{i_2}, ..., p_{i_r})$$

  -- סכום על כל $r$-יות של תכונות.

  אזי מספר אלמנטים שלא מקיימים אף תכונה:

$$E(0) = W(p_1', p_2', \cdots, p_t') = \sum_{r=0}^{t} (-1)^r W(r)$$

ומספר אלמנטים שמקיימים בדיוק $m$ תכונות:

$$E(m) = \sum_{r=m}^{t} (-1)^{r-m} \binom{r}{m} W(r)$$

## 2 תרגיל

בתור לרבנות עומדים $n$ זוגות, מתוכם $k$ רוצים להתגרש ו-$(n-k)$ המבקשים להתחתן. מה מספר האפשרויות לסדרם בשני תורים (תור גברים ותור נשים), כך ששני בני זוג הרוצים להתגרש לא יועמדו זה בצד זו?

פתרון:

- נגדיר $k$ תכונות (רלוונטיות רק לגבי בני הזוג המתגרשים):

  $p_i$ -- בני הזוג ה-$i$ (מתוך הרוצים להתגרש) עומדים זה בצד זו.

- נחפש את $E(0)$.

כל העולם: כל הסידורים של $n$ נשים ושל $n$ גברים בשני תורים. $W(0)=(n!)^2$.
$W(p_i)$: נסדר גברים בתור ב-$n!$ אפשרויות. ליד הגבר ה-$i$ תעמוד אשתו ואת שאר נשים תסודרנה באופן שרירותי ב-$(n-1)!$ אופנים. לכן

$$W(p_i)=n!(n-1)! \Rightarrow\ W(1)=\sum_{i=1}^{k}W(p_i)=\binom{k}{1}n!(n-1)!$$

$W(p_i,p_j)$: באופן דומה

$$W(p_i,p_j)=n!(n-2)!$$

ולכן

$$\Rightarrow\ W(2)=\sum_{1\le i<j\le k}W(p_i,p_j)=\binom{k}{2}n!(n-2)!$$

באופן כללי נקבל:

$$W(r)=\binom{k}{r}n!(n-r)!$$

לבסוף נקבל:

$$E(0)=\sum_{r=0}^{k}(-1)^rW(r)=\sum_{r=0}^{k}(-1)^r\binom{k}{r}n!(n-r)!$$

## 3 תרגיל

כמה פתרנות שלמים, אי-שליליים, שונים יש למשוואה:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 20$$

כאשר $x_i \leq 8$?

<u>פתרון:</u>

- הפריטים בעולם הם אוסף הפתרונות בלי הגבלה, כלומר מספר אפשרויות לזרוק 20 כדורים זהים לשישה תאים שונים. $W(0) = \binom{20+6-1}{20} = \binom{25}{20}$
- נגדיר 6 תכונות. תכונה $p_i$ -- בפתרון המשתנה $x_i$ מקבל ערך גדול מ 8.
- נחפש את $E(0)$.

$W(p_i)$: מספר הפתרונות למשוואה הנ"ל בהם $x_i \geq 9$. ראשית, נשים 9 כדורים בתא ה-$i$ ואחר-כך נפזר את שאר 11 הכדורים באופן חופשי.

$$W(p_i) = \binom{11+6-1}{11} = \binom{16}{11} \Rightarrow W(1) = \sum_{i=1}^{6} W(p_i) = \binom{6}{1}\binom{11+6-1}{11}$$

$W(p_i, p_j)$ - כעת נשים 9 כדורים בתא ה-$i$ ו 9 כדורים בתא ה-$j$, ונפזר רק את שני הכדורים שנשארו.

$$W(p_i, p_j) = \binom{2+6-1}{2} = \binom{7}{2} \Rightarrow W(2) = \sum_{1 \leq i < j \leq 6} W(p_i, p_j) = \binom{6}{2}\binom{7}{2}$$

נשים לב שלא ייתכן שיותר משתי תכונות מתקיימות בו זמנית. לכן

$$W(3) = W(4) = W(5) = W(6) = 0$$

לכן התשובה הסופית היא

$$\begin{aligned} E(0) &= \sum_{r=0}^{6} (-1)^r W(r) = W(0) - W(1) + W(2) \\ &= \binom{25}{20} - \binom{6}{1}\binom{11+6-1}{11} + \binom{6}{2}\binom{7}{2} \end{aligned}$$

## 4 תרגיל

נתונות שתי קוביות זהות. מטילים אותן $n$ פעמים ובכל סדרה של $n$ הטלות סופרים כמה דאבלים שונים יצאו. הדאבלים הם $\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\}$.

<u>דוגמא:</u> $\{(1,1),(3,2),(1,1),(6,4),(2,2)\}$
יצאו שני דאבלים שונים: $(1,1),(2,2)$

סדרת הטלות תיקרא מוצלחת אם ייצאו בה בדיוק 2 דאבלים שונים. כמה סדרות מוצלחות ישנן, כאשר סדר ההטלות בסדרה חשוב?

<u>פתרון:</u> נחשב תחילה את מספר הסדרות השונות. לכל הטלה של שתי קוביות זהות יש $\binom{2+6-1}{2} = 21$ תוצאות אפשריות ולכן יש $W(0) = 21^n$ סדרות אפשריות.
נגדיר 6 תכונות: $p_i$ $(1 \le i \le 6)$ - הדאבל $(i,i)$ לא הופיע בסדרת ההטלות.
הפתרון המבוקש הוא $E(4)$ כי אם בדיוק 4 דאבלים לא הופיעו, נובע שבדיוק 2 דאבלים כן הופיעו.
$W(p_i)$: אסור שיצא זוג $(i,i)$ ולכן נותרו רק 20 אפשרויות חוקיות לכל מקום בסדרה.

$$W(p_i) = (21-1)^n \;\Rightarrow\; W(1) = \sum_{i=1}^{6} W(p_i) = \binom{6}{1}(21-1)^n$$

באפן דומה עבור שתי תכונות:

$$W(p_i,p_j) = (21-2)^n \;\Rightarrow\; W(2) = \binom{6}{2}(21-2)^n$$

באופן כללי:

$$W(r) = \binom{6}{r}(21-r)^n$$

התשובה הסופית:

$$E(4) = \sum_{r=4}^{6} (-1)^{r-4}\binom{r}{4} W(r)$$
$$= \binom{4}{4}\binom{6}{4}17^n - \binom{5}{4}\binom{6}{5}16^n + \binom{6}{4}\binom{6}{6}15^n$$

<u>הערה</u> יכולנו לבחור את התכונות היותר טבעיות: $q_i$ - הדאבל $(i,i)$ מופיע (לפחות פעם אחת) בסדרת ההטלות. היינו צריכים לחשב את $E(2)$. אבל (תוודאו בבית) במקרה זה קשה הרבה יותר לחשב את $W(r)$.

## 5 תרגיל

הוכח משיקולים קומבינטוריים:

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}(n-i)^n = n!$$

<u>אינטואיציה:</u> עלינו למצוא בעיה קומבינטורית ששני האגפים פותרים אותה. נשים לב שביטוי בצד שמאל מזכיר בצורתו את $E(0)$. לכן "נתפור" בעית הכלה והפרדה שפתרונה $E(0)$.

לפי השוואת הביטויים:

$$\sum_{r=0}^{n}(-1)^r W(r) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}(n-i)^n$$

מכאן

- ישנן $n$ תכונות
- $W(r) = \binom{n}{r}(n-r)^n$
- בפרט $W(0) = n^n$

נתבונן בעולם של וקטורים באורך $n$ בהם מופיעים מספרים $1...n$ ללא הגבלה. אזי

$$W(1) = \sum_{r=1}^{n} W(p_r) = \binom{n}{1}(n-1)^n \;\Rightarrow\; W(p_j) = (n-1)^n$$

כלומר מספר פריטים בעלי התכונה ה-$r$ הוא כמספר וקטורים המורכבים מ-$n-1$ מספרים שונים. אלה הם הוקטורים באורך $n$ בהם המספר $r$ אינו מופיע. אזי

$p_i$ -- הוקטור אינו מכיל את המספר $i$ ($1 \le i \le n$).

נבדוק שאכן

$$W(r) = \binom{n}{r}(n-r)^n$$

הגודל $E(0)$ מבטא מספר וקטורים באורך $n$ בהם כל אחד מהמספרים $1...n$ מופיע. מספר וקטורים הנ"ל הוא בדיוק מספר התמורות של $n$ מספרים, שזה $n!$. וזה שווה לאגף ימין.

■

# קומבינטוריקה למדעי המחשב
# רקורסיה

מצא נוסחה רקורסיבית למספר וקטורים בינאריים באורך $n$, אשר לא מכילים את הרצף "001". פתרון: נסמן את המספר המבוקש ע"י $F(n)$. וקטור בינארי חוקי הינו בעל אחת מהצורות הבאות:

א. וקטור המתחיל ב-1:

$$1\ \underbrace{x\ x \cdots x}_{n-1}$$

אז מספר וקטורים כאלה הינו $F(n-1)$ (כי בין $n-1$ $x$-ים אסור שיופיע "001").

ב. וקטור המתחיל ב-01:

$$0\ 1\ \underbrace{x\ x \cdots x}_{n-2}$$

אז מספר וקטורים כאלה הינו $F(n-2)$.

ג. וקטור המתחיל ב-00:

$$0\ 0\ \underbrace{x\ x \cdots x}_{n-2}$$

אז הספרה השלישית היא 0 וגם הספרה הרביעית היא 0 וכולי... כל הספרות חייבות להיות 0. יש רק אפשרות אחת -- וקטור שכולו אפסים.

סה"כ מספר האפשרויות:

$$F(n) = F(n-1) + F(n-2) + 1, \quad (n \geq 2)$$

עם תנאיי ההתחלה :

$$F(0) = 1, \quad F(1) = 2$$

מטילים קוביה $n$ פעמים. סדרת תוצאות של $n$ הטלות נקראת משחק. תוצאת הטלה תיקרא "דאבל" אם היא זהה לתוצאת ההטלה הקודמת. יהיה $F(n,k)$ מספר המשחקים השונים בהם יש בדיוק $k$ "דאבלים". מצא נוסחת נסיגה ותנאי

התחלה לחישוב $F(n,k)$ עבור $1 \le n$, $0 \le k$.

דוגמא: עבור משחק עם 7 הטלות הבאות:

$$6, 2, 3, 3, 3, 2, 2, 1$$

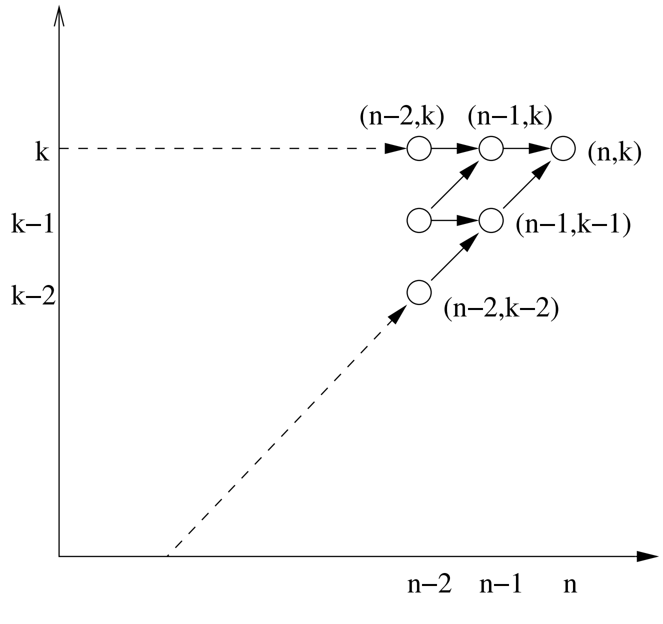
מספר הדאבלים הוא 3.
פתרון: נסתכל על תוצאה של ההטלה ה-$n$ ונשווה אותה לתוצאה של ההטלה ה-$n-1$.

- אם תוצאת ההטלה ה-$n$ שווה לזו של ההטלה ה-$n-1$ אז בין $n-1$ ההטלות הראשונות היו $k-1$ דאבלים ולכן מספר אפשרויות לכך שווה ל-$F(n-1,k-1)$.
- אם תוצאת ההטלה ה-$n$ שונה מתוצאת ההטלה ה-$n-1$ אז בין $n-1$ ההטלות הראשונות היו $k$ דאבלים ולכן מספר אפשרויות לכך שווה ל-$5 \cdot F(n-1,k)$, כאשר הכפלה ב-5 נובעת ממספר אפשרויות להטלה ה-$n$.

סה"כ קיבלנו

$$F(n,k) = F(n-1,k-1) + 5F(n-1,k), \quad (n \ge 2, k \ge 1)$$

תנאי התחלה: מתוך נוסחת נסיגה ראים כי $F(n,k)$ תלוי ב-$F(n-1,k)$ וב-$F(n-1,k-1)$.



בגלל ש-$F(n,k)$ מתקבל מתוך $F(n-1,k)$ נצטרך את $F(1,k)$. בגלל ש $F(n,k)$ מתקבל מתוך $F(n-1,k-1)$, נצטרך גם את $F(n,0)$. אזי:

$$F(n,0) = 6 \cdot 5^{n-1}$$
$$F(1,k) = 0, \quad k \geq 1$$

הם תנאי התחלה מספיקים.

במסיבת הריקודים משתתפים $n$ רקדנים. כמה אפשרויות יש לסידור שלהם במ-עגלים (אין סדר בין המעגלים אך יש סדר בתוך מעגל)?

פתרון: נסמן את התשובה באמצעות $F(n)$. נמספר את הרקדנים באמצעות מספר-ים מ-1 עד $n$. נתבונן במעגל שבו נמצא רקדן מספר 1. נסמן ב-$k$ את מספר הרק-דנים שבמעגל זה. מספר האפשרויות לבחירת הרקדנים למעגל הזה (פרט לרקדן מס' 1):

$$\binom{n-1}{k-1}$$

סידורם במעגל:

$$(k-1)!$$

סידור של יתר $n-k$ הרקדנים במעגלים:

$$F(n-k)$$

מקבלים:

$$F(n) = \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1}(k-1)!F(n-k)$$

תנאי התחלה:

$$F(0) = 1$$

כי עבור $0$ רקדנים יש רק את הסידור הריק. אפשר להסתפק בתנאי זה כי לכל $n$ נדרש ב-$F(n)$ לחשב את כל הקודמים לו, ולכן אפשר לחשב אותם אחד-אחד, החל מ-$F(0)$.

א. מצא תנאי נסיגה לחישוב מספר הוקטורים הטרינארים באורך $n$ שיש בהם מספר זוגי של 1-ים.

<u>פתרון</u>: כדי לקבל וקטור באורך $n$ עם מספר אחדות זוגי, נסתכל על הספרה האחרונה בוקטור:

- אם הספרה האחרונה היא 0, אז ב-$n-1$ המקומות הראשונים כבר יש מספר זוגי של אחדות ($F(n-1)$ אפשרויות).
- אם הספרה האחרונה היא 2, שוב נקבל $F(n-1)$ אפשרויות.
- אם הספרה האחרונה היא 1, אז ב-$n-1$ המקומות הראשונים מספר אי-זוגי של אחדות ($3^{n-1}-F(n-1)$ אפשרויות).

נוסחת הנסיגה:

$$F(n) = 2 \cdot F(n-1) + 3^{n-1} - F(n-1)$$

$$F(n) = F(n-1) + 3^{n-1}$$

תנאי התחלה:

$$F(0) = 1$$

ב. הוכח שמספר הוקטורים שמקיימים את הדרישה ב-א' הוא $\frac{3^n+1}{2}$.

<u>פתרון</u>: נוכיח זאת באינדוקציה:
<u>בסיס</u> ($n=1$) מקיים את הדרישה.

<u>צעד</u>:

$$F(n) = F(n-1) + 3^{n-1} \underbrace{=}_{\text{להנ"א}} \frac{3^{n-1}+1}{2} + 3^{n-1} = \frac{3^n+1}{2}$$

■

# קומבינטוריקה למדעי המחשב
# פתרון נוסחאות נסיגה

## 1 פתרון נוסחאות נסיגה

נתונה סדרה $a_0 = 0, a_n = 2a_{n-1} + 1$ . נמצא נוסחה מפורשת ל-$a_n$.

### 1.1 שיטת הניחוש

מתוך הקשר $a_n = 2a_{n-1} + 1$ "מנחשים" כי הערך של $a_n$ גדל אקספוננציאלות. אזי "מהמרים" על פתרון מהצורה

$$a_n = A\gamma^n + B$$

- מתוך תנאי ההתחלה נובע

$$\begin{aligned} 0 = a_0 &= A + B \\ A &= -B \end{aligned}$$

- נשתמש בנוסחת נסיגה. מציבים לתוך $a_n = 2a_{n-1} + 1$ ומקבלים לכל $n$:

$$A\gamma^n + B = 2 \cdot (A\gamma^{n-1} + B) + 1$$

נעביר מחוברים שלא תלויים ב-$n$ לאגף ימין ומחוברים שתלויים ב-$n$ לאגף שמאל:

$$\begin{aligned} A\gamma^n - 2A\gamma^{n-1} &= B + 1 \\ A\gamma^{n-1}(\gamma - 2) &= B + 1 \end{aligned}$$

אגף ימין אינו תלוי ב-$n$ ולכן גם אגף שמאל כולו אינו תלוי ב-$n$. מאחר ו-$\gamma \neq 0$ ו-$\gamma \neq 1$ ו-$A \neq 0$ (אחרת יש לנו פתרון טריויאלי שלא מתאים לסדרה הנתונה) על-מנת שאגף שמאל לא יהיה תלוי ב-$n$ נובע ש-$\gamma = 2$. אזי

$$B+1=0 \Leftarrow B=-1 \Leftarrow A=1$$

הפתרון נותן לנו את הנוסחה המפורשת

$$a_n = A\gamma^n + B = 2^n - 1$$

שאלה: האם ייתכן שלמערכת משוואות כנ"ל לא יהיה פתרון? יהיה אינסוף פתרונות? מה המשמעויות לכך?

### 1.2 שיטת הצבות חוזרות

נפתח ביטוי ל-$a_n$:

$$\begin{aligned}
a_n &= 2a_{n-1}+1 = 2(2a_{n-2}+1)+1 = 4a_{n-2}+2+1 \\
&= 4(2a_{n-3}+1)+2+1 = 8a_{n-3}+(4+2+1) = \cdots \\
&= 2^n a_0 + (2^{n-1}+2^{n-2}+\cdots+2+1)
\end{aligned}$$

הגורם הראשון בסכום הינו 0 כי $a_0 = 0$. הגורם השני בסכום זהו טור גאומטרי ולכן

$$a_n = \frac{2^n-1}{2-1} = 2^n - 1$$

בדיקה ע"י הצבה לתוך נוסחת נסיגה:

$$\begin{aligned}
a_0 &= 2^0 - 1 = 0 \\
2a_{n-1}+1 &= 2(2^{n-1}-1)+1 = 2^n - 1 = a_n
\end{aligned}$$

וזה אכן נכון.

### 1.3 החלפת משתנה הרקורסיה

נתונה $f(n) = 2f(\frac{n}{2}) + 1 \quad , f(1) = 0$, ונניח ש-$n$ היא חזקה טבעית של 2 (כלומר $n = 2^k$). אז ניתן לכתוב את $f(n)$ באופן הבא:

$$f(2^k) = 2f(2^{k-1}) + 1 \ , \quad f(1) = 0$$

ואם נסמן $g(k) \triangleq f(2^k)$ נקבל:

$$g(k) = 2g(k-1) + 1 \ , \quad g(0) = 0$$

את הנוסחה הזו אנו כבר יודעים לפתור: $g(k) = 2^k - 1$. ואחרי ההצבות המתאימות:

$$f(n) = n - 1$$

### 1.4 שיטת משוואה אופיינית

עבור נוסחת נסיגה

$$S_n = aS_{n-1} + bS_{n-2}$$

<u>נגדיר</u> את המשוואה האופיינית להיות:

$$x^2 - ax - b = 0, \qquad b \neq 0$$

#### 1.4.1 משפט

א. אם למשוואה האופיינית שני שורשים שונים $r_1, r_2$, אזי הפתרון של נוסחת הנסיגה הנ"ל הוא

$$S_n = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n$$

כאשר $c_1, c_2$ קבועים הנקבעים ע"י $S_0, S_1$.

ב. אם למשוואה אופיינית שורש אחד $r$ אזי

$$S_n = c_1 r^n + c_2 n r^n$$

כאשר $c_1, c_2$ קבועים הנקבעים ע"י $S_0, S_1$.

<u>פתרון:</u> נשים לב שבהגדרת המשוואה האופיינית דרשנו $b \neq 0$, ולכן כל פתרון שלה שונה מאפס. לפני שניגש להוכיח את המשפט, נוכיח מספר טענות עזר:

<u>טענה 1:</u> אם $r$ שורש של המשוואה האופיינית, אז $S_n := r^n$ הוא פתרון המקיים את נוסחת הנסיגה.
<u>הוכחה:</u> אנחנו בעצם רוצים להראות ש:

$$r^n = ar^{n-1} + br^{n-2}$$

וזה נכון כי אם נחלק ב-$r^{n-2}$ (כזכור $r \neq 0$) נקבל בדיוק את המשוואה האופיינית ש-$r$ הוא שורש שלה:

$$r^2 = ar + b$$

<u>טענה 2:</u> אם $\alpha_n$ מקיים את נוסחת הנסיגה, אז גם $S_n := \lambda\alpha_n$.
<u>הוכחה:</u>

$$S_n = \lambda\alpha_n = \lambda(a\alpha_{n-1} + b\alpha_{n-2}) = a(\lambda\alpha_{n-1}) + b(\lambda\alpha_{n-2}) = aS_{n-1} + bS_{n-2}$$

<u>טענה 3:</u> אם $\alpha_n$ ו-$\beta_n$ מקיימים את נוסחת הנסיגה, אז גם $S_n := \alpha_n + \beta_n$.
<u>הוכחה:</u>

$$\begin{aligned} S_n = \alpha_n + \beta_n &= (a\alpha_{n-1} + b\alpha_{n-2}) + (a\beta_{n-1} + b\beta_{n-2}) \\ &= a(\alpha_{n-1} + \beta_{n-1}) + b(\alpha_{n-2} + \beta_{n-2}) \\ &= aS_{n-1} + bS_{n-2} \end{aligned}$$

<u>מסקנה:</u> קבוצת הפתרונות של נוסחת הנסיגה היא מרחב לינארי.

א. מהמסקנה האחרונה נובע שאם $r_1$ ו-$r_2$ הם שורשים שונים של המשוואה האופיינית, אז $S_n := c_1r_1^n + c_2r_2^n$ הוא פתרון של משוואת הנסיגה לכל $c_1, c_2$. כעת נותר למצוא $c_1, c_2$ שמקיימים את תנאי ההתחלה ($S_0$ ו-$S_1$). נדרוש:

$$\begin{cases} S_0 = c_1 + c_2 \\ S_1 = c_1r_1 + c_2r_2 \end{cases}$$

השורשים שונים $(r_1 \neq r_2)$ ולכן המשוואות במשתנים $c_1, c_2$ הן בלתי תלויות לינארית ולכן קיים פתרון $(c_1, c_2)$.

$\blacksquare$

ב. לצורך פתרון סעיף זה יש להוכיח עוד טענה:
<u>טענה 4:</u> אם $r$ שורש כפול של המשוואה האופיינית, אז גם $S_n := nr^n$ הוא פתרון המקיים את נוסחת הנסיגה.
<u>הוכחה:</u> מכיוון ש $(x-r)^2 = 0$ נקבל כי המשוואה האופיינית היא

$$x^2 - 2rx + r^2 = 0$$

ולכן $a = 2r$, $b = -r^2$, ותנאי הנסיגה הוא:

$$S_n = 2rS_{n-1} - r^2S_{n-2}.$$

אנחנו רוצים להראות ש-:

$$nr^n = 2r \cdot (n-1)r^{n-1} - r^2(n-2)r^{n-2}$$

וזה נכון כי אם נחלק ב-$r^n$ נקבל:

$$n = 2(n-1) - (n-2) = n$$

לכן באותו אופן כמו קודם, קיבלנו ש- $S_n := c_1 r^n + c_2 r^n$ הוא פתרון של משוואת הנסיגה לכל $c_1, c_2$. כעת נותר למצוא $c_1, c_2$ שמקיימים את תנאי ההתחלה ($S_0$ ו-$S_1$). נדרוש:

$$\begin{cases} S_0 = c_1 \\ S_1 = c_1 r + c_2 r \end{cases}$$

השורש $r \neq 0$ (אחרת זה מקרה מנוון) ולכן קיים פתרון $(c_1, c_2)$.

■

### 1.4.2 דוגמא

נתונה נוסחת נסיגה הבאה:

$$F(n) = F(n-1) + F(n-2), \qquad F(0) = F(1) = 1$$

מצא ביטוי מפורש ל-$F(n)$.

פתרון. נרשום משוואה אופיינית:

$$x^2 - x - 1 = 0$$

פתרונות שלה:

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2}$$

נציב לתוך משוואת הרקורסיה:

$$F(n) = c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

מתוך תנאיי ההתחלה:

$$\begin{cases} F(0) = 1 = c_1 + c_2 \\ F(1) = 1 = c_1 \frac{1+\sqrt{5}}{2} + c_2 \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

פותרים את המערכת הזאת ומקבלים כי

$$\begin{cases} c_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \\ c_2 = -\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \end{cases}$$

לסיכום

$$F(n) = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

□

# קומבינטוריקה למדעי המחשב
# פונקציות יוצרות

## 1 פונקציות יוצרות

### 1.1 תזכורת

לסדרה של מספרים (סופית או אינסופית) $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ נתאים <u>פונקציה יוצרת</u> שלה המוגדרת ע"י

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots$$

בהרצאה ראיתם מספר דוגמאות לסדרות ולפונקציות יוצרות שלהן.

<u>דוגמא:</u> לסדרה

$$\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \cdots, \binom{n}{n}$$

מתאימה פונקציה יוצרת

$$f(x) = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \cdots + \binom{n}{n}x^n = (1+x)^n$$

<u>דוגמא:</u> לסדרה

$$1, 1, 1, \cdots$$

מתאימה פונקציה יוצרת

$$f(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = \frac{1}{1-x}$$

נגזור לפי $x$:

$$f'(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots + nx^{n-1} + \cdots = \frac{1}{(1-x)^2}$$

וזוהי פונקציה יוצרת של סדרה

$$1, 2, 3, 4, \cdots, n, \cdots$$

### 1.2 מספר פתרונות של משוואה

איזו סדרה מתאימה לפונקציה היוצרת:

$$f(x) = (1 + x + x^2 + \cdots)^n = \frac{1}{(1-x)^n}$$

אפשר לרשום את $f(x)$ באופן הבא:

$$f(x) = (1 + x + x^2 + \cdots) \underbrace{\cdots}_{n \text{ פעמים}} (1 + x + x^2 + \cdots) = \frac{1}{(1-x)^n}$$

המקדם של $x^k$ הוא בדיוק מספר הפתרונות (בשלמים) של המשוואה:

$$t_1 + t_2 + \cdots + t_n = k$$

כאשר $t_i \geq 0$. ערך זה, אנו כבר יודעים, הוא בדיוק:

$$\binom{n+k-1}{k}$$

לכן אפשר לכתוב את $f(x)$ גם באופן הבא:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} x^k = \frac{1}{(1-x)^n}$$

אם נציב $x^m$ במקום $x$ בנוסחה האחרונה, נקבל

$$\frac{1}{(1-x^m)^n} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} x^{m \cdot k}$$

## 1.3 תרגיל

כמה פתרונות טבעיים יש למשוואה

$$t_1 + t_2 + t_3 = 30$$

כאשר $t_3, t_1$ אי-זוגיים, $t_2$ זוגי, ובנוסף $t_1 \geq 1, t_2 \geq 4, t_3 \geq 7$.
פתרון:

$$\begin{aligned} f(x) &= (x + x^3 + x^5 + \cdots)(x^4 + x^6 + x^8 + \cdots)(x^7 + x^9 + x^{11} + \cdots) \\ &= x \cdot x^4 \cdot x^7 (1 + x^2 + x^4 + \cdots)^3 = x^{12} \cdot \frac{1}{(1 - x^2)^3} \end{aligned}$$

ע"י שימוש בנוסחה מקודם

$$= x^{12} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+2}{k} x^{2k}$$

גורם $x^{30}$ מתקבל כאשר $k = 9$ והמקדם הוא $\binom{11}{9}$. וזאת גם התשובה.

## 1.4 תרגיל

נתונה סדרה $a_0 = 0, a_n = 2a_{n-1} + 1$ . נמצא נוסחה מפורשת ל-$a_n$.

<u>פתרון:</u> נסמן

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

מתוך הנתון $a_n = 2a_{n-1} + 1$. נכפיל ב-$x^n$:

$$a_n x^n = 2a_{n-1} x^n + x^n$$

נסכם על-פני הערכים של $n$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} (2a_{n-1} x^n + x^n)$$

צד שמאל (כאשר $a_0 = 0$):

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = f(x)$$

צד ימין:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(2a_{n-1}x^n + x^n) = \sum_{n=1}^{\infty} 2a_{n-1}x^n + \sum_{n=1}^{\infty} x^n$$
$$= 2x\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + x\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 2xf(x) + \frac{x}{1-x}$$

קיבלנו כי

$$f(x) = 2xf(x) + \frac{x}{1-x}$$
$$f(x) = \frac{x}{(1-x)(1-2x)}$$

נפרק את $\frac{1}{(1-x)(1-2x)}$ לשברים חלקיים:

$$\frac{1}{(1-x)(1-2x)} = \frac{A}{1-2x} + \frac{B}{1-x}$$
$$= \frac{A(1-x)+B(1-2x)}{(1-x)(1-2x)} = \frac{(A+B)+x(-A-2B)}{(1-x)(1-2x)}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} A+B=1 \\ -A-2B=0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A=2 \\ B=-1 \end{cases}$$

נחזור לנוסחא

$$f(x) = \frac{x}{(1-x)(1-2x)} = x(\frac{2}{1-2x} - \frac{1}{1-x})$$
$$= x[2\sum_{n=0}^{\infty}(2x)^n - \sum_{n=0}^{\infty} x^n] = \sum_{n=0}^{\infty}(2\cdot 2^n - 1)x^n \cdot x$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}(2^{n+1}-1)x^{n+1} = \sum_{m=1}^{\infty}(2^m-1)x^m$$

המקדם של $x^m$ הינו $2^m - 1$ ולכן $a_m = 2^m - 1$.

## 1.5 תרגיל

הפונקציה $f(x)$ מוגדרת:

$$f(x) = (1-x)(1-x^5)(1-x^{10})(1-x^{25})(1-x^{50})$$

א. נסח במדויק שאלה הקשורה ב-$f(x)$ שתשובתה זהה לתשובה לשאלה הבאה: "בכמה אופנים ניתן לפרוט שטר של חמישה דולר, למטבעות של $1, 5, 10, 25$ ו-$50$ סנט?"

<u>פתרון:</u> נתבונן בפונקציה -

$$\begin{aligned}\frac{1}{f(x)} &= \frac{1}{(1-x)(1-x^5)(1-x^{10})(1-x^{25})(1-x^{50})} \\ &= (1+x+x^2+\cdots)\cdot(1+x^5+x^{10}+\cdots)\cdot(1+x^{10}+x^{20}+\cdots)\cdot \\ &\quad (1+x^{25}+x^{50}+\cdots)\cdot(1+x^{50}+x^{100}+\cdots)\end{aligned}$$

המקדם של $x^{500}$ יהיה שווה למספר האופנים להציג את $500$ כסכום של חמישה מספרים כאשר הראשון מתחלק ב-1, השני ב-5, השלישי ב-$10$ וכו'. לכן <u>השאלה</u>: מהו המקדם של $x^{500}$ בפיתוח של $\frac{1}{f(x)}$?

ב. השלם ניסוח שאלה נוספת השקולה לבעיית המטבעות (מסעיף א').
"כמה פתרונות שלמים ואי-שליליים יש למשוואה הבאה:"
תשובה:

$$x_1 + 5x_2 + 10x_3 + 25x_4 + 50x_5 = 500$$

## 1.6 מציאת פתרון לסדרת פיבונאצ'י בעזרת פנקציות יוצרות

נתונה סדרה $a_0 = 1, a_1 = 1, a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ . נמצא נוסחה מפורשת ל-$a_n$.
<u>פתרון:</u> נסמן

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

מתוך הנתון $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$. נכפיל ב-$x^n$:

$$a_n x^n = a_{n-1}x^n + a_{n-2}x^n$$

נסכם על-פני הערכים של $n$ החל מ-2

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=2}^{\infty} (a_{n-1}x^n + a_{n-2}x^n)$$

צד שמאל:

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - a_0 - a_1 x = f(x) - x - 1$$

צד ימין:

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{\infty}(a_{n-1}x^n + a_{n-2}x^n) &= x\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1}x^{n-1}x^2 + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2}x^{n-2} \\ = x\sum_{m=1}^{\infty} a_m x^m + x^2\sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m &= x\left(\sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m - a_0\right) + x^2\sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m \\ &= x(f(x) - a_0) + x^2 f(x) = xf(x) + x^2 f(x) - x\end{aligned}$$

קיבלנו כי

$$\begin{aligned}f(x) - x - 1 &= xf(x) + x^2 f(x) - x \\ f(x)\left(-x^2 - x + 1\right) &= 1 \\ f(x) &= -\frac{1}{x^2 + x - 1}\end{aligned}$$

פותרים משוואה ריבועית ממכנה של השבר ומקבלים:

$$f(x) = -\frac{1}{\left(x + \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x + \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)}$$

נפרק את $\frac{1}{\left(x+\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x+\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)}$ לשברים חלקיים:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\left(x + \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x + \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)} &= \frac{A}{x + \frac{1+\sqrt{5}}{2}} + \frac{B}{x + \frac{1-\sqrt{5}}{2}} \\ &= \frac{Ax + A\frac{1-\sqrt{5}}{2} + Bx + B\frac{1+\sqrt{5}}{2}}{\left(x + \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x + \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)} \\ &= \frac{\left(A\frac{1-\sqrt{5}}{2} + B\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + (A+B)x}{\left(x + \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x + \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)}\end{aligned}$$

מקבלים:

$$\Rightarrow \begin{cases} A\frac{1-\sqrt{5}}{2} + B\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1 \\ A + B = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} A\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = 1 \\ B = -A \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} A = -1/\sqrt{5} \\ B = 1/\sqrt{5} \end{cases}$$

נחזור לנוסחא

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{5}\left(x + \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)} - \frac{1}{\sqrt{5}\left(x + \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)} = \frac{1}{\frac{\sqrt{5}+5}{2}\left(1 + \frac{2}{1+\sqrt{5}}x\right)} - \frac{1}{\frac{\sqrt{5}-5}{2}\left(1 + \frac{2}{1-\sqrt{5}}x\right)}$$
$$= \frac{2}{\sqrt{5}+5}\frac{1}{\left(1 - (-\frac{2}{1+\sqrt{5}}x)\right)} - \frac{2}{\sqrt{5}-5}\frac{1}{\left(1 - (-\frac{2}{1-\sqrt{5}}x)\right)}$$

נשתמש במשוואה (??):

$$f(x) = \frac{2}{\sqrt{5}+5}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{2}{1+\sqrt{5}}x\right)^n - \frac{2}{\sqrt{5}-5}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{2}{1-\sqrt{5}}x\right)^n$$

נפשט את הביטוי הזה:

$$f(x) = \frac{2(1-\sqrt{5})}{\sqrt{5}(1+\sqrt{5})(1-\sqrt{5})}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{2(1-\sqrt{5})}{(1+\sqrt{5})(1-\sqrt{5})}x\right)^n -$$
$$-\frac{2(1+\sqrt{5})}{\sqrt{5}(1-\sqrt{5})(1+\sqrt{5})}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{2(1+\sqrt{5})}{(1-\sqrt{5})(1+\sqrt{5})}x\right)^n$$
$$= -\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}x\right)^n + \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}x\right)^n$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]x^n$$

לכן מקדם של $x^n$ הינו

$$a_n = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

# קומבינטוריקה למדעי המחשב
# גרפים: מושגים בסיסיים

## 1 תזכורת

- גרף לא מכוון $G(V,E)$ הינו מבנה המורכב מקבוצת הצמתים $V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$ וקבוצת הקשתות, $E=\{e_1,e_2,\cdots,e_m\}$, כאשר כל קשת היא זוג של צמתים מ-$V$.
  - גרף מכוון: קצוות של הקשת מסודרים $v_i \xrightarrow{e_k} v_j$.
  - קשת ששני צמתי הקצה שלה הם אותו צומת תיקרא לולאה עצמית או חוג עצמי.
  - שתי קשתות ששני צמתי הקצה שלהן זהים הן קשתות מקבילות. בגרף מכוון נבדיל בין קשתות מקבילות וקשתות אנטימקבילות.
  - גרף פשוט: גרף ללא לולאות עצמיות וללא קשתות מקבילות.

## 2 תרגיל

השלם את הטבלה עבור השאלה: כמה גרפים עם $n$ צמתים שונים ו $m$ קשתות קיימים?

| | מכוון | מכוון ופשוט | לא מכוון | לא מכוון ופשוט |
|---|---|---|---|---|
| קשתות שונות | | | | |
| קשתות זהות | | | | |

פתרון:

- קשתות זהות:

**גרף לא מכוון ופשוט** כל קשת מחברת בין שני הצמתים. ישנן $\binom{n}{2}$ זוגות של צמתים. מתוכם בוחרים $m$ זוגות שיחוברו בקשת (ללא חזרות וללא חשיבות לסדר הבחירה). סה"כ נקבל

$$\binom{\binom{n}{2}}{m}$$

**גרף מכוון ופשוט** הזוגות של צמתים הם מסודרים. לכן ישנם $n(n-1)$ זוגות של צמתים. כעת בוחרים מתוכם $m$ ללא חזרות וללא חשיבות לסדר הבחירה. סה"כ נקבל

$$\binom{n(n-1)}{m}$$

**גרף לא מכוון ולא בהכרח פשוט** כעת תיתכנה לולאות עצמיות ולכן יש סבך-הכל $\binom{n}{2} + n = \binom{n+1}{2}$ זוגות צמתים סדורים אפשריים. תיתכנה גם קשתות מקבילות ולכן בחירת המקומות לקשתות תהיה עם חזרות. לכן סה"כ

$$\binom{m + \binom{n+1}{2} - 1}{m}$$

**גרף מכוון ולא בהכרח פשוט** תיתכנה לולאות עצמיות וגם יש חשיבות לסדר הצמתים בתוך הזוג. לכן יש $n^2$ זוגות של צמתים. בחירת המקומות לקשתות תהיה עם חזרות ולכן

$$\binom{m + n^2 - 1}{m}$$

- קשתות שונות:

נמספר את הקשתות באמצעות מספרים $1, 2, \ldots, n$. בכל פעם שבוחרים "מקום" עבור קשת, נעשה זאת באופן הבא: קודם נבחר מקום לקשת מספר 1, אחר-כך לקשת מספר 2, וכו'... לכן בחירת המקומות לקשתות הופכת להיות בחירה עם חשיבות לסדר הבחירה במקום בחירה ללא חשיבות לסדר הבחירה. התוצאות תהיינה כמו התוצאות עבור קשתות זהות, אבל בכל מקום שבחרנו זוגות צמתים ( = איפה לשים את הקשתות) ללא חשיבות לסדר הבחירה, עכשיו נבחר אותם עם חשיבות לסדר הבחירה.

התוצאות הסופיות רשומות בטבלה הבאה:

| | מכוון | מכוון ופשוט | לא מכוון | לא מכוון ופשוט |
|---|---|---|---|---|
| קשתות שונות | $(n^2)^m$ | $\binom{n(n-1)}{m}m!$ | $\binom{n+1}{2}^m$ | $\binom{\binom{n}{2}}{m}m!$ |
| קשתות זהות | $\binom{m+n^2-1}{m}$ | $\binom{n(n-1)}{m}$ | $\binom{m+\binom{n+1}{2}-1}{m}$ | $\binom{\binom{n}{2}}{m}$ |

## 3 מסלולים ומעגלים

- מסלול (Path) בגרף הינו סדרת צמתים וקשתות מהצורה הבאה:

$$a_0, a_0 \overset{e_1}{\text{———}} a_1, a_1, a_1 \overset{e_2}{\text{———}} a_2, \cdots, a_{i-1} \overset{e_i}{\text{———}} a_i, a_i, a_i \overset{e_{i+1}}{\text{———}} a_{i+1}, \cdots, a_{l-1} \overset{e_l}{\text{———}} a_l, a_l$$

לפעמים מתייחסים למסלול כאל סדרת הקשתות או כאל סדרת הצמתים.
שימו לב כי אם גרף לא פשוט אז לא מספיק להגדיר מסלול רק ע"י צמתים.

- מעגל: מסלול שצומת ההתחלה שלו זהה לצומת הקצה של קשת אחרונה בו.
- מעגל המילטוני: מעגל שעובר בכל צומת בדיוק פעם אחת.
- מסלול אוילר: הוא מסלול שבו כל קשת מופיעה פעם אחת בדיוק.
- מעגל אוילר: מסלול אוילר שהוא מעגל.
- גרף ייקרא אוילרי (מעגלי) אם קיים בו מסלול (מעגל) אוילרי. [1]
- גרף ייקרא מלא אם יש בו קשת מכל צומת לכל צומת.
- גרף ייקרא קשיר אם יש בו מסלול מכל צומת לכל צומת.

הטבלה הבאה מסכמת תנאים לקיום בגרף קשיר של מסלול או מעגל אוילרי

[1]בעצם בגלל הסוגריים יש פה שתי הגדרות שונות

| | מעגל אוילר | מסלול אוילר שאינו מעגל |
|---|---|---|
| גרף לא מכוון | דרגות כל הצמתים זוגיות | שני צמתים בדיוק בעלי דרגה אי-זוגית |
| גרף מכוון | לכל צומת $v$ מתקיים $d_{in}(v) = d_{out}(v)$ | קיים צומת $s$: $d_{in}(s) + 1 = d_{out}(s)$, קיים צומת $t$: $d_{in}(t) = d_{out}(t) + 1$ ולכל שאר הצמתים $d_{in}(v) = d_{out}(v)$ |

## 4 תרגיל

כמה מעגלים המילטוניים יש בגרף מלא פשוט עם $n$ צמתים?

פתרון: כיוון שהגרף הוא מלא, כל מעגל שנרצה ליצור מ-$n$ הצמתים קיים בגרף. כמה מעגלים כאלה יש? באופן כללי יש $(n-1)!$ מעגלים של $n$ צמתים. אבל, אם נסתכל טוב, נבחין שכל מעגל המילטוני חוזר בחישוב הנ"ל פעמיים: פעם אחת עם כיוון השעון, ופעם שנייה נגד כיוון השעון.

מה קורה כאן? כשסידרנו אנשים במעגל, היתה משמעות ל"מי יושב מימין" ו"מי יושב משמאל" לכל בן-אדם. בגרף, הדבר היחידי שחשוב הוא "מי יושב לידך" (או "אל מי יש לך קשת") ולכן שיקוף של המעגל לא משנה אותו מבחינה גרפית. לכן התשובה הנכונה היא $\frac{(n-1)!}{2}$

הערה: עבור $n = 1$ ו-$n = 2$ הנוסחה לא מתקיימת, אבל שם ממילא אין אף מעגל.

## 5 תרגיל

הוכיחו שאם גרף סופי קשיר ובלתי מכוון מקיים שבדיוק ל-2K מצמתיו יש דרגה אי זוגית, עבור $K \geq 1$, אזי ניתן למצוא חלוקה של קשתותיו ל-$K$ מסלולים זרים בקשתות, באופן שכל קשת שייכת למסלול אחד בדיוק.

פתרון: נסמן את הגרף הנתון ע"י $G(V, E)$. נסמן את הצמתים בעלי דרגה אי-זוגית

ע"י $u_1, u_2, \ldots, u_{2K}$. נבנה גרף חדש $G'(V, E')$ אשר מתקבל מ-$G(V, E)$ באמצעות הוספת קשתות $u_1 - u_2, u_3 - u_4, \cdots, u_{2K-1} - u_{2K}$. הגרף $G'$ הינו גרף אוילרי מעגלי מכיוון שהוא קשיר, בלתי מכוון וכל הצמתים שלו הם בעלי דרגה זוגית. אזי מעגל אוילרי שבו נראה באופן הבא:

$$v - \cdots - u_{i_1} - u_{i_2} - \cdots - u_{i_3} - u_{i_4} - \cdots - u_{i_{2K-1}} - u_{i_{2K}} - \cdots - v$$

כאשר הקשתות $u_{i_j} - u_{i_{j+1}}$ הנ"ל הן הקשתות שהוספנו. אזי המסלולים הבאים הם $K$ מסלולים כנדרש:

$$\begin{aligned} u_{i_2} - \cdots - u_{i_3} \\ u_{i_4} - \cdots - u_{i_5} \\ \cdots \\ u_{i_{2K}} - \cdots - u_{i_1} \end{aligned}$$

אכן,

- מכיוון שהמעגל הנ"ל היה אוילרי, אז כל קשת מופיעה בו לכל היותר פעם אחת. לכן כל קשת תופיע במסלול אחד לכל היותר. לכן מסלולים אלה זרים.
- מכיוון שהמעגל הנ"ל הכיל את כל קשתות של $G'$, והורדנו ממנו רק קשתות שהוספנו במהלך בנית $G'$, אזי מסלולים שבנינו מכילים את כל הקשתות של $G$.

מצאנו מסלולים כנדרש. $\square$

# קומבינטוריקה למדעי המחשב
# גרפי דה-ברוין

## 1 תיזכורת

נתון אלפבית $\Sigma = \{0, 1, 2, \dots, \sigma - 1\}$. אזי גרף דה-ברוין $G_{\sigma,n}(V,E)$ הוא

$$V = \Sigma^{n-1}$$
$$E = \Sigma^n$$

והקשתות בגרף הן מהצורה הבאה:

$$(a_1 a_2 \dots a_{n-1}) \overset{a_1 a_2 \dots a_n}{\longrightarrow} (a_2 a_3 \dots a_n)$$

עובדות חשובות:

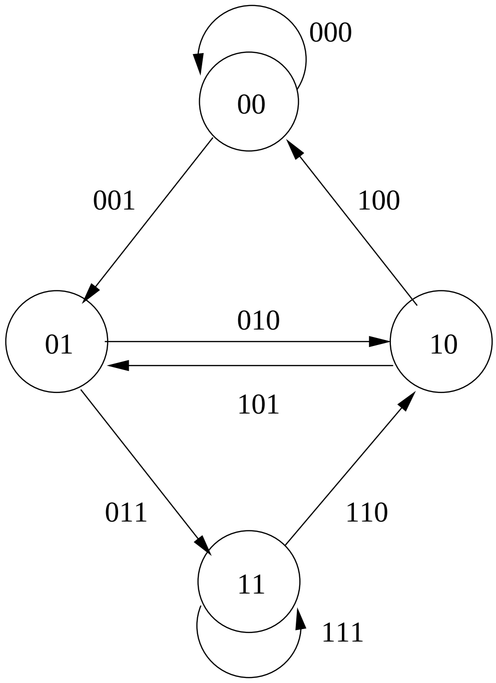
- לכל מילה $w \in \Sigma^{n-1}$ קיים צומת יחיד.
- לכל מילה $w \in \Sigma^n$ קיימת קשת יחידה.
- לכל צומת יש דרגת כניסה ודרגת יציאה $\sigma$.
- לכל $\sigma$ ולכל $n$ $G_{\sigma,n}(V,E)$ הוא אוילרי מעגלי.

<u>הגדרה:</u> בהנתן $\sigma$, $n$ סדרת דה-ברוין היא סדרה ציקלית $a_0 a_1 \dots a_{L-1}$ מעל א"ב $\Sigma$, כך שלכל מילה $w \in \Sigma^n$ קיים $i$ יחיד כך שמתקיים: $w = a_i a_{i+1} \dots a_{i+n-1}$ (כאשר חישוב מודולו $L$).

<u>הערה:</u> מספר המילים הוא $\sigma^n$ ולכן אורך הסדרה $L = \sigma^n$.

## 2 דוגמא

גרף $G_{2,3}$:




בגרף קיים מעגל אוילר:

$$000 \longrightarrow 001 \longrightarrow 010 \longrightarrow 101 \longrightarrow 011 \longrightarrow 111 \longrightarrow 110 \longrightarrow 100$$

וסדרת דה-ברוין המתאימה היא: $00010111$.

## 3 תרגיל

יהי $G$ גרף דה-ברוין $G_{2,7}$. נוציא מ-$G$ שני צמתים $(000000)$ ו-$(100000)$ עם הקשתות שפוגעות בצמתים אלו. יהי $G'$ הגרף שמתקבל.

הוכח או הפרך:

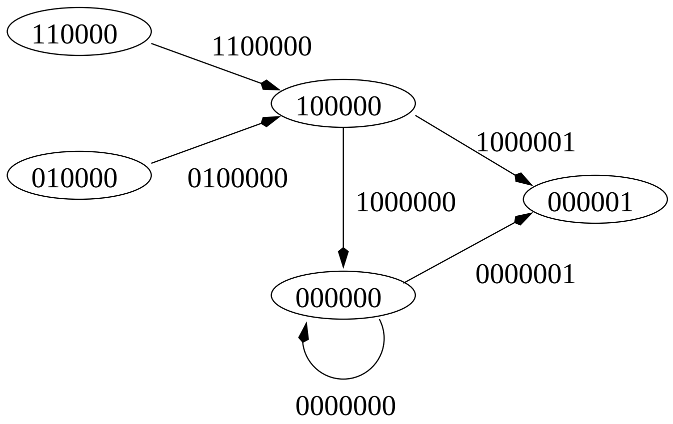
א. ב-$G'$ קיים מסלול אוילרי.

ב. בגרף התשתית של $G'$ קיים מסלול אוילרי.

פתרון: א. נתבונן בקשתות שנוגעות בצמתים שהורדנו.

- ל-100000 נכנסות קשתות מצמתים 010000 ו 110000.
- מ-100000 יוצאות קשתות לצמתים 000000 ו 000001.
- ל-000000 נכנסות קשתות מצמתים 100000 ו 000000.
- מ-000000 יוצאות קשתות לצמתים 000000 ו 000001.

הציור הבא ממחיש את החלק של הגרף אשר הושפע מהורדת הקשתות.




ניתן לראות כי אחרי הורדה של שני הצמתים, לשני צמתים נוספים 010000 ו-110000 מתקיים $d_{in}(v) = d_{out}(v) + 1$. תנאי לקיום מסלול אוילרי בגרף מכוון קשיר היה כי

- קיים צומת $s$: $d_{in}(s) + 1 = d_{out}(s)$
- קיים צומת $t$: $d_{in}(t) = d_{out}(t) + 1$
- לכל שאר הצמתים $d_{in}(v) = d_{out}(v)$

התנאי הזה לא מתקיים. לכן אין מסלול אוילר בגרף שנוצר.

ב. בגרף התשתית נבדוק קשירות וזוגיות של דרגות הצמתים.

קשירות: עלולים להיפגע רק מסלולים שעוברים דרך שני צמתים שהורדנו (כעת מדברים על מסלולים לא מכוונים). נמצא מסלול חליפי בין כל זוג של צמתים

$$010000 — 110000$$

$$110000 — 000001$$

$$010000 — 000001$$

ואז לכל מסלול שהשתמש בקטע מחוק כתת-מסלול שלו, ניתן יהיה להחליף אותו בתת-מסלול אחר שנשאר.

ואכן

$$\underline{010000} — 001000 — 000100 — 000010 — 100001 — \underline{110000}$$

$$\underline{110000} — 011000 — 001100 — 000110 — 000011 — \underline{000001}$$

$$\underline{010000} — 001000 — 000100 — 000010 — \underline{000001}$$

אכן גרף תשתית נשאר קשיר.

זוגיות הדרגות: השתנתה זוגיות של רק שני צמתים: 110000 ו-010000 ולכן בגרף יש רק שני צמתים בעלי דרגה אי-זוגית.

מסקנה: תנאי לקיום מסלול אוילר מתקיימים: גרף קשיר וקיימים 2 צמתים בעלי דרגה אי-זוגית. לכן קיים מסלול אוילר.

## 4 תרגיל

הגדרה: מסלול (מעגל) המילטון הוא מסלול (מעגל) שבו מופיע כל צומת של גרף פעם אחת בדיוק. גרף המילטוני זה גרף שיש בו מסלול או מעגל המילטוני.

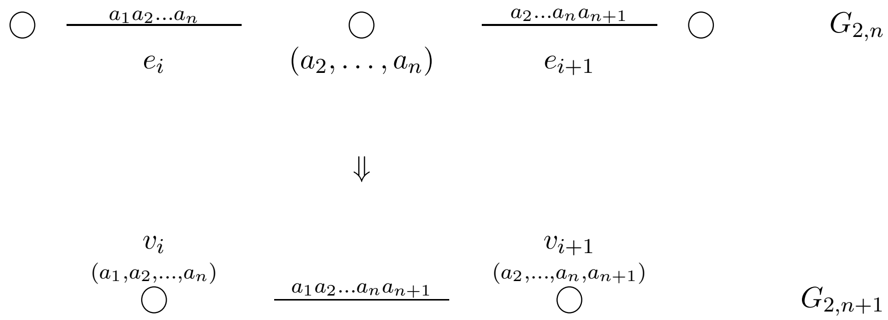
הוכח: גרף דה-ברוין $G_{2,n}$ הינו המילטוני לכל $n \geq 2$.

הוכחה: עבור $n = 2$ המשפט טריוויאלי. נראה כי קיים מעגל המילטון בגרף $G_{2,n+1}$ עבור $n \geq 2$.

יהיה $P = e_1, e_2, \ldots, e_k$ ייצוג באמצעות הקשתות של מעגל אוילר בגרף דה-ברוין $G_{2,n}$ -- קיים מתוך המשפט. יהיו $w_1, w_2, \ldots, w_k$ המילים באורך $n$ המתאימות לקשתות במסלול $P$. נשים לב כי כל מילה כזאת מתאימה לצומת בגרף $G_{2,n+1}$.

יהיו $v_1, v_2, \dots, v_k$ הצמתים בגרף $G_{2,n+1}$ המתאימים למילים $w_1, w_2, \dots, w_k$. נראה שהסדרה $(v_1, v_2, \dots, v_k)$ מהווה מסלול המילטון ב-$G_{2,n+1}$.

- סדרת הצמתים $(v_1, v_2, \dots, v_k)$ מהווה מעגל.
  צריך להראות: לכל שני צמתים שכנים $v_i$, $v_{i+1}$ בסדרה $(v_1, v_2, \dots, v_k)$ קיימת קשת $v_i \longrightarrow v_{i+1}$ בגרף $G_{2,n+1}$.




<u>הערה:</u> גם הקשת $v_k \rightarrow v_1$ קיימת מאותה הסיבה.

- המסלול שנוצר $(v_1, v_2, \dots, v_k)$ מהווה מסלול המילטון.

כל צומת מופיע פעם אחת: במסלול $w_1, w_2, \dots, w_k$ כל קשת מופיעה פעם אחת ולכן כל מילה $w \in \{0,1\}^n$ מופיעה פעם אחת. לכן במסלול $v_1, v_2, \dots, v_k$ בגרף $G_{2,n+1}$ כל צומת מופיע פעם אחת. לכן המעגל $v_1, v_2, \dots, v_k$ הוא מעגל המילטוני ב-$G_{2,n+1}$.

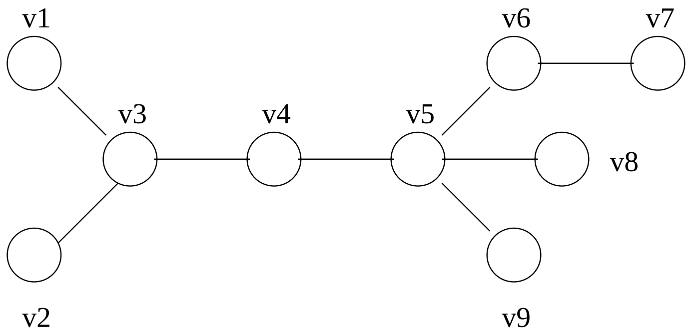
# קומבינטוריקה למדעי המחשב
# עצים לא מכוונים

## 1 הגדרות שקולות של עץ לא מכוון

גרף לא מכוון $G(V,E)$ הוא עץ אמ"מ

- $G$ קשיר וחסר מעגלים
- $G$ חסר מעגלים, ולכל הוספה של קשת ל-$E$ נוצר מעגל
- ב-$G$ אין לולאות עצמיות ולכל שני צמתים קיים מסלול פשוט יחיד שמחבר ביניהם.
- $G$ קשיר, ולכל הסרה של קשת מ-$E$, $G$ הופך להיות בלתי קשיר.

<u>דוגמא</u>




## 2 תכונות של עצים סופיים

יהיה $G(V,E)$ גרף סופי לא מכוון, $|V|=n$. שלושת התנאים הבאים הם שקולים

- $G$ הוא עץ.
- $G$ חסר מעגלים ויש לו $n-1$ קשתות.
- $G$ קשיר ויש לו $n-1$ קשתות.

## 3 עץ פורש

הגדרה: גרף $G'(V',E')$ נקרא עץ פורש של גרף $G(V,E)$ אם

- $V'=V$
- $E'\subseteq E$
- $G'$ הוא עץ.

טענה: לגרף סופי קשיר ובלתי מכוון קיים עץ פורש.

הוכחה: יהיה $G(V,E)$ גרף סופי קשיר ובלתי מכוון. נבצע את האלגוריתם הבא:

כל עוד קיים בגרף מעגל, נמחק קשת אחת מן המעגל.

אזי

- כאשר האלגוריתם מסתיים, בגרף שמתקבל אין מעגלים.
- לאורך כל צעדי האלגוריתם השמורה הבאה מתקיימת: הגרף קשיר. נניח בשלילה שלא, שמחיקת קשת $u-v$ ניתקה מסלול בין צומת $u$ לצומת $v$. אבל מחקנו קשת ממעגל ולכן חייב להיות מסלול נוסף בין $u$ ל-$v$. סתירה.

מסקנה: קיבלנו גרף שהוא קשיר וחסר מעגלים ולכן הוא עץ.

### 3.1 תרגיל

הוכח שבכל גרף $G(V,E)$ סופי קשיר ובלתי מכוון אפשר למצוא $|E|-|V|+1$ מעגלים פשוטים שבכל אחד מהם יש קשת אחת שאינה מופיעה באף מעגל אחר.

הוכחה: יהיה $T(V,F)$ עץ פורש של גרף $G(V,E)$. $T$ הוא עץ ולכן $|F|=|V|-1$. לכן קיימות $|E|-|F|=|E|-|V|+1$ קשתות שהן שהן ב $G$ אבל לא ב-$T$. תהיינה $\{e_1,e_2,\dots,e_{|E|-|V|+1}\}$ הקשתות הללו.

לכל $i=1,\dots,|E|-|V|+1$ הוספת קשת $e_i$ ל-$T$ יוצרת מעגל פשוט $C_i$. המעגל מורכב מקשתות של $T$ ומ-$e_i$. לכן $C_i$ הוא מעגל בגרף $G$.

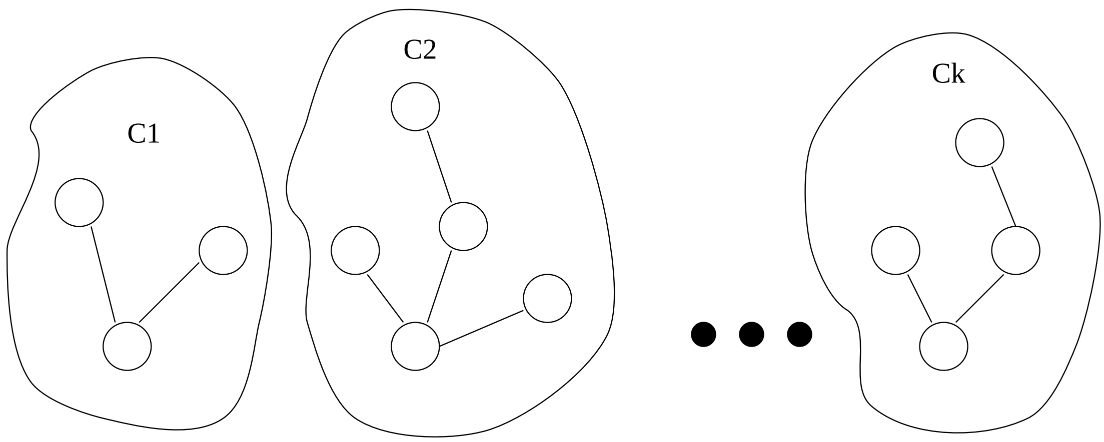
מסקנה: $\{C_i\}_{i=1}^{|E|-|V|+1}$ הם $|E|-|V|+1$ מעגלים בגרף $G$ וקשת $e_i$ אינה מופיעה בשום מעגל פרט ל-$C_i$. מש"ל.

## 4 יער

הגדרה: גרף לא מכוון ייקרא יער אם הוא חסר מעגלים.

הגדרה: תת-גרף קשיר מכסימלי (אשר הגדלתו תיצור תת-גרף בלתי קשיר) של הגרף נקרא רכיב קשיר.

יער לא חייב להיות קשיר. אך אם נסתכל על אוסף רכיבים קשירים של היער, כל אחד מהם הוא קשיר וחסר מעגלים ולכן הוא עץ. לכן יער זה אחוד של עצים.




### 4.1 תרגיל

ביער יש 100 רכיבים קשירים ו 200 צמתים. כמה קשתות יש ביער?

פתרון: יהיה $G(V,E)$ הגרף הנתון. כל רכיב בעצמו מהווה עץ. עבור רכיב הקשירות ה-$i$, $C_i$, $1 \le i \le 100$, נסמן ב-$n_i$ ו $m_i$ את מספר הצמתים והקשתות בהתאמה. מתקיים

$$n_i = m_i + 1$$

נסכם על כל הרכיבים

$$\sum_{i=1}^{100} n_i = \sum_{i=1}^{100} m_i + 100$$

מכאן

$$\text{מספר קשתות כולל} = |E| = \sum_{i=1}^{100} n_i - 100 = 200 - 100 = 100$$

$\square$

## 5 משפט קיילי

מספר עצים פורשים לא מכוונים מעל $n$ צמתים שונים הוא $n^{n-2}$.

נראה התאמה חח"ע ועל בין מקבוצת העצים הפורשים מעל $n$ צמתים שונים המסומנים $\{1,2,\cdots,n\}$ לאוסף מילים באורך $n-2$ מעל א"ב בן $n$ אותיות.

<u>עץ פורש $\longrightarrow$ מילה</u>
נתון עץ $G(V,E)$ בעל $n$ צמתים. נבנה ממנו מילה $a_1a_2\cdots a_{n-2}$.

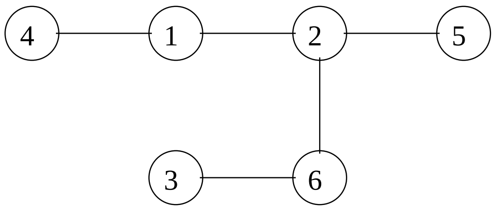
<u>אלגוריתם:</u>
עבור $i=1$ עד $n-2$:
יהיה $j$ העלה בעל מספר הנמוך ביותר בעץ. הוצא את $j$ מהעץ.
קבע $a_i=k$ כאשר $k$ הינו השכן של $j$ בעץ.

<u>הבחנה:</u> ע"י הסתכלות על המילה $a_1a_2\cdots a_{n-2}$ אפשר לדעת מהן דרגות של כל צומת בגרף. דרגה של צומת $k$, $d(k)$, שווה למספר פעמים ש $k$ מופיע ועוד $1$.

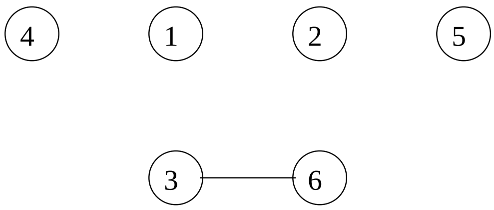
<u>מילה $\longrightarrow$ עץ פורש</u>
נתונה מילה $a=a_1a_2\cdots a_{n-2}$. נשחזר ממנה את העץ המקורי.

<u>אלגוריתם:</u>
$i \leftarrow 1$, $d(v) \leftarrow 1+$ (מספר הופעות של $v$ ב $a$)
עבור $i=1$ עד $n-2$:
יהיה $j$ מינימלי בעל $d(j)=1$. בנה קשת $a_i$—$j$,
כאשר $d(j) \leftarrow 0$, $d(a_i) \leftarrow d(a_i)-1$.
בנה קשת בין שני צמתים בעלי דרגה $1$.

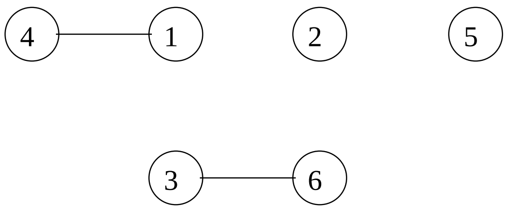
## דוגמא 6



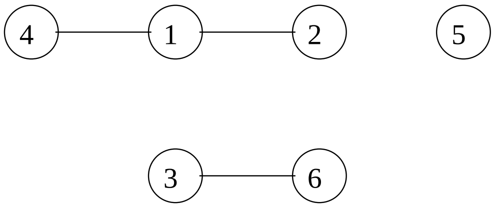

6122



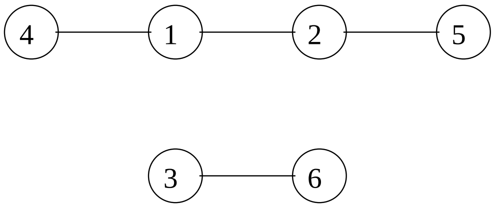

122

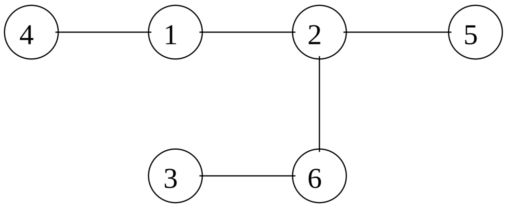



22



2





## 7 תרגיל

מה מספר העצים הלא מכוונים על $n$ צמתים שונים הממוספרים $1, 2, \cdots, n$ עם $2 < k$ עלים בדיוק וצומת אחד בלבד שדרגתו גדולה מ 2?

<u>פתרון:</u>
נסמן את דרגתו המכסימלית של צומת בעץ באמצעות $d$. בעץ יש $n-1$ קשתות ולכן סכום הדרגות של כל הצמתים הוא $2n-2$.

- ישנם $k$ צמתים בעלי דרגה 1.
- ישנם $n-k-1$ צמתים בעלי דרגה 2.
- ישנו צומת אחד בעל דרגה $d$.

נסכם:

$$\begin{aligned} 1 \cdot k + 2 \cdot (n-k-1) + d \cdot 1 &= 2n-2 \\ \Rightarrow d &= k \end{aligned}$$

נאפיין את קבוצת המילים שמתאימות לעצים הנ"ל לפי התאמה של משפט קיילי. ניזכר כי מספר הופעות של צומת במילה קטן ב-1 מדרגה שלו בעץ. לכן $k$ צמתים לא מופיעים כלל במילה. $n-k-1$ צמתים מופיעים פעם אחת כל אחד. צומת אחד מופיע $k-1$ פעמים.

- מספר אפשרויות לבחור צומת בעל דרגה $k$ הוא $\binom{n}{1}$.
- מספר אפשרויות לבחור ממה שנשאר צמתים בעלי דרגה 2 הוא $\binom{n-1}{k}$.
- מספר מילים באורך $n-2$ עם $k-1$ אותיות זהות וכל שאר האותיות שונות הוא $\frac{(n-2)!}{(k-1)!}$.

סה"כ נקבל

$$\binom{n}{1}\binom{n-1}{k}\frac{(n-2)!}{(k-1)!}$$

# קומבינטוריקה למדעי המחשב
# נושאים שונים בעצים

## 1 למת המתווך

הגדרה: בהנתן גרף מכוון $G(V,E)$, צומת $v$ הוא שורש של $G$ אם קיים מסלול מ-$v$ לכל צומת בגרף.

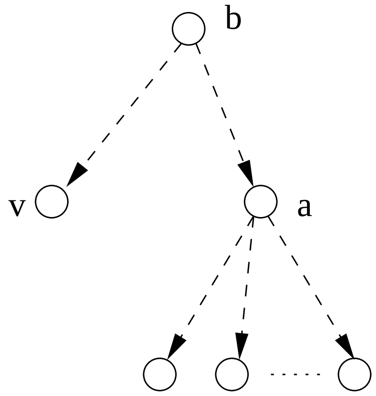
הגדרה: צומת $v$ הוא המתווך של קבוצת צמתים $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ בגרף מכוון אם יש מ-$v$ מסלול לכל אחד מצמתי הקבוצה (מסלול יכול להיות גם באורך 0).

### תרגיל

הוכח כי אם לכל זוג צמתים בגרף סופי מכוון יש מתווך אזי לגרף יש שורש.

הוכחה: נניח בשלילה שב-$G$ אין שורש. נגדיר לכל צומת $v$ בגרף $G$ את $k(v)$, מספר הצמתים בגרף שקיים מסלול מ-$v$ אליהם. נסמן ע"י $a$ את הצומת עם מספר $k(a)$ הגבוה ביותר בגרף.

מתוך ההנחה קיים צומת $v$ כך שאין מסלול מ-$a$ ל-$v$. יהיה $b$ המתווך של $a$ ו-$v$. אזי קיימים מסלולים מ-$b$ ל-$a$ ומ-$b$ ל-$v$. לכן $k(a) < k(b)$ בסתירה למקסימליות של $k(a)$. מש"ל.



## 2 תרגיל

יהיו $T_1$ ו-$T_2$ שני עצים פורשים של גרף לא מכוון $G$. הוכח כי לכל קשת $e_1 \in (T_1 - T_2)$ קיימת קשת $e_2 \in (T_2 - T_1)$ כך שמתקיימת התכונה הבאה: $T_1'$ וגם $T_2'$ המוגדרים כך:

$$T_1' = (T_1 - \{e_1\}) \cup \{e_2\}$$
$$T_2' = (T_2 - \{e_2\}) \cup \{e_1\}$$

הם עצים פורשים של $G$.

<u>הוכחה:</u>
נניח ש-$e_1 = (u, v)$ נמצאת ב-$T_1$ ולא ב-$T_2$ , אז הסרתה מהעץ $T_1$ תפרק אותו לשני רכיבי קשירות - $C_1$ ו-$C_2$, כאשר $u$ ו-$v$ נמצאים כל-אחד ברכיב אחר.

כעת נעבור לעץ $T_2$: בין $u$ ל-$v$ יש ב-$T_2$ מסלול יחיד ולכן חייבת להיות במסלול זה קשת בין צומת ב-$C_1$ לצומת ב- $C_2$ (למה?). זו הקשת $e_2$ שאנחנו מחפשים. הקשת $e_2$ לא נמצאת ב-$T_1$, כי כאמור $e_1$ היא הקשת היחידה ב-$T_1$ שמחברת בין $C_1$ ל-$C_2$, וכזכור $e_1$ לא נמצאת ב-$T_2$.

כעת נחבר מחדש באמצעות $e_2$ את רכיבי הקשירות $C_1$ ו-$C_2$ שב- $T_1 - \{e_1\}$, וקיבלנו שוב גרף קשיר, עם אותו מספר קשתות כמו ב-$T_1$ (שהוא עץ) - ובכך הראנו ש-$(T_1 - \{e_1\}) \cup \{e_2\}$ הוא עץ פורש.

כעת נסיר מ-$T_2$ את הקשת $e_2$. שוב קיבלנו שני רכיבי קשירות, אומנם לא אותם רכיבים כמו קודם - אבל שוב $u$ ו-$v$ נמצאים כל-אחד ברכיב אחר (למה?). לכן הוספה של $e_1$ תחבר בין שני הרכיבים הנ"ל, ובאותו אופן כמו קודם נקבל ש-$(T_2 - \{e_2\}) \cup \{e_1\}$ עץ פורש. מ.ש.ל.

הערה: שימו לב איך הגדרנו את $e_2$. מדוע דרשנו שהיא תהיה על המסלול הפשוט היחיד בין $u$ ל-$v$? למה לא הסתפקנו בלדרוש שהיא תהיה "סתם" קשת שמחברת בין 1 ל-2? וודאו היטב שאתם יודעים לענות על שתי ה"למות" שמופיעות בהוכחה.

## 3 תרגיל

יהי $T=(V,E)$ עץ. נגדיר את $d(u,v)$ להיות אורך המסלול הפשוט (היחיד) בין $u$ ל-$v$ בעץ. מרכז בעץ $T$ הוא צומת $v$ שעבורו $e(v)\triangleq\max_{u\in V}d(v,u)$ מינימלי.

הוכיחו כי בכל עץ סופי יש מרכז אחד או שניים (ולא יותר), ואם יש שניים - אז הם שכנים.

<u>הוכחה:</u> נסמן ב-$n$ את מספר הצמתים בעץ, ונוכיח את הטענה באינדוקציה על $n$:

<u>בסיס:</u> עבור $n=1$ יש רק צומת אחד, והוא המרכז.
עבור $n=2$ העץ הוא שני צמתים המחוברים בקשת, ושניהם מהווים מרכז.

<u>צעד:</u> עבור $n>2$, נניח נכונות לעץ עם מספר צמתים קטן מ-$n$. אנו יודעים שבעץ יש לפחות שני עלים. יתר על כן - הצומת הרחוק ביותר מצומת $v$ כלשהו בעץ חייב להיות עלה (אחרת, אם $u$ הצומת הכי רחוק מ-$v$ והוא אינו עלה, אז ניתן להמשיך את המסלול מ-$v$ ל-$u$ בקשת נוספת ולהגיע לצומת רחוק אף יותר - סתירה).

<u>טענה:</u> אף עלה איננו מרכז.
<u>הוכחה:</u> נניח $x$ עלה, ו-$y$ הצומת שמחובר אליו. אז לכל צומת $u\neq x,y$ מתקיים $d(x,u)>d(y,u)$ ולכן $\max_{u\in V}d(x,u)>\max_{u\in V}d(y,u)\Leftarrow e(x)$ אינו מינימלי. סתירה. (השתמשנו בכך ש-$n>2$. איפה?)

כעת ניצור עץ חדש, $T'$, ע"י מחיקת כל העלים מהעץ $T$, ביחד עם הקשתות שנוגעות בהם. (מדוע $T'$ הוא עץ?)

לכל צומת $v$ שאינו עלה ב-$T$, $e(v)$ ירד ב-1 (כי המסלול לכל צומת רחוק ביותר מ-$v$ הסתיים בעלה, ולאחר שמחקנו את כל העלים, עדיין נשאר הצומת שלפני העלה במסלול, והוא במרחק $e(v)-1$ מ-$v$). לכן כל צומת שהיה ב-$T$ עם $e(v)$ מינימלי, שומר ב-$T'$ על מינימליותו.

<u>מסקנה:</u> צומת הוא מרכז ב-$T$ אמ"ם הוא מרכז ב-$T'$. לפי הנחת האינדוקציה, ב-$T'$ יש מרכז אחד או שניים (ואם יש שניים הם שכנים), ולכן הטענה מתקיימת גם ב-$T$.

■

קומבינטוריקה למדעי המחשב
ספירת עצים מכוונים

## 1 תזכורת

נתון גרף מכוון $G(V,E)$ ללא לולאות עצמיות, $|V| = n$. מגדירים מטריצת דרגת כניסה $D$ בגודל $n \times n$ (לא להתבלבל עם מטריצת שכנויות!) באופן הבא:

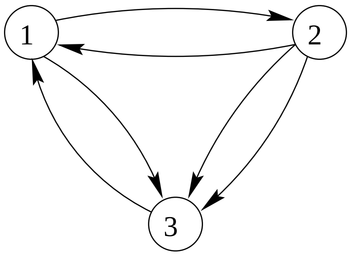
$$D_{i,j} = \begin{cases} d_{in}(i), & i = j \\ -k, & \text{הוא מספר קשתות ב } G \text{ מ } i \text{ ל } j \quad k \end{cases}$$

מגדירים מטריצה $D_r$ המתקבלת ממטריצה $D$ ע"י מחיקה של שורה $r$ ועמודה $r$.

<u>משפט:</u> מספר עצים מכוונים פורשים של $G$ עם שורש $r$ מתקבל ע"י חישוב של דטרמיננט של מטריצה $D_r$, שסימונו $|D_r|$.

## 2 דוגמא

נתון גרף



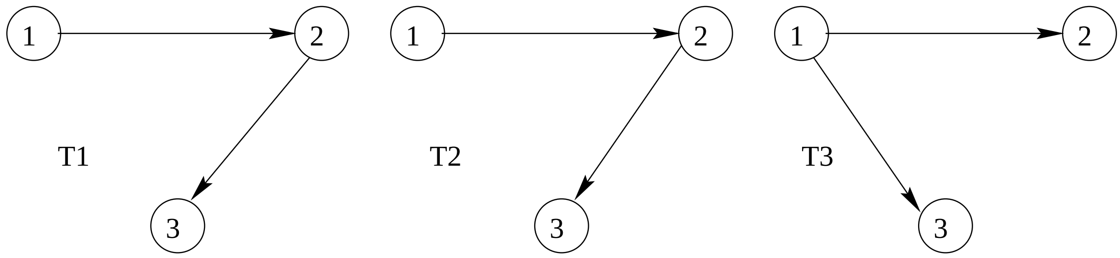

מטריצה $D$ עבור גרף נתון היא:

$$D = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

נמחק שורה ראשונה ועמודה ראשונה. נקבל מטריצה

$$D_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

מתקיים כי $|D|_1 = 3$ ולכן מספר עצים מכוונים עם שורש בצומת $1$ הוא $3$. נבדוק:




אכן קיימים שלושה עצים.

<u>הבחנה:</u> סכום המספרים בכל עמודה של מטריצת דרגת כניסה שווה ל-$0$. מדוע?

<u>הערה חשובה:</u> באופן דומה ניתן לחשב מספר עצים פורשים של גרף <u>לא מכוון</u>. במקרה הזה:

- מטריצת דרגת כניסה תהיה סימטרית.
- מספר העצים הפורשים נתון ע"י $|D|_r$ עבור כל $r$, $1 \leq r \leq n$.

## 3 תרגיל

חשב את מספר העצים הפורשים של גרף דה-ברוין $G_{2,4}$ עם השורש $(000)$.

<u>פתרון:</u> נחשב את מספר העצים הפורשים של הגרף (עם השורש $000$). נרשום כניסות שונות מאפס של מטריצה $D$. זוהי מטריצה $8 \times 8$. נחשב את $D_{000}$.

נוריד לולאות עצמיות בצמתים 000 ו-111 כי זה לא ישנה את מספר העצים הפורש-ים.

| | 000 | 001 | 010 | 011 | 100 | 101 | 110 | 111 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 000 | $1$ | $-1$ | | | | | | |
| 001 | | $2$ | $-1$ | $-1$ | | | | |
| 010 | | | $2$ | | $-1$ | $-1$ | | |
| 011 | | | | $2$ | | | $-1$ | $-1$ |
| 100 | $-1$ | $-1$ | | | $2$ | | | |
| 101 | | | $-1$ | $-1$ | | $2$ | | |
| 110 | | | | | $-1$ | $-1$ | $2$ | |
| 111 | | | | | | | $-1$ | $1$ |

שורש של העץ הוא צומת 000 לכן מוחקים שורה ראשונה ועמודה ראשונה של המטריצה:

$$D_{000} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & & & & \\ & 2 & & -1 & -1 & & \\ & & 2 & & & -1 & -1 \\ -1 & & & 2 & & & \\ & -1 & -1 & & 2 & & \\ & & & -1 & -1 & 2 & \\ & & & & & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

מספר העצים הפורשים הוא בדיוק ערך הדטרמיננטה של המטריצה הנ"ל.
נותר, כמובן, לחשב את הדטרמיננטה:

מבטלים 1-ים: עבור $i = 1,2,3$ מחסירים שורה $i+4$ מתוך שורה $i$ ורושמים במקום שורה $i$.

$$\begin{pmatrix} 2 & & & & -2 & & \\ & 2 & & & & -2 & \\ & & 2 & & & & -2 \\ -1 & & & 2 & & & \\ & -1 & -1 & & 2 & & \\ & & & -1 & -1 & 2 & \\ & & & & & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

מצמצמים 2 עם $-2$ באופן הבא: עבור $i = 1,2,3$ מחברים עמודה $i$ עם עמודה $i+4$ ורושמים את התוצאה במקום עמודה $i+4$.

$$\begin{pmatrix} 2 & & & & & & \\ & 2 & & & & & \\ & & 2 & & & & \\ -1 & & & 2 & -1 & & \\ & -1 & -1 & & 2 & -1 & -1 \\ & & & -1 & -1 & 2 & \\ & & & & & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

מחברים 3 שורות אחרונות לשורה ה-4 ורושמים במקום השורה ה-4:

$$\left(\begin{array}{ccc|c|ccc} 2 & & & & & & \\ & 2 & & & & & \\ & & 2 & & & & \\ \hline -1 & -1 & -1 & 1 & & & \\ \hline & -1 & -1 & & 2 & -1 & -1 \\ & & & -1 & -1 & 2 & \\ & & & & & -1 & 1 \end{array}\right)$$

הדטרמיננט של המטריצה הזאת שווה ל:

$$2^3 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & \\ & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

המטריצה שרשומה כאן זוהי בדיוק מטריצה שמתאימה למספר עצים מכוונים עם שורש 00 בגרף $G_{2,3}$. המטריצה היא $3 \times 3$ ואת הדטרמיננט שלה ניתן לחשב במפורש על-פי נוסחה שנלמדה בקורס באלגברה:

$$\det \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & \\ & -1 & 1 \end{pmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} - (-1) \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + (-1) \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$
$$= 4 - 1 - 1 = 2$$

לכן הדטרמיננט של $D_{000}$ שווה ל-$2^3 \cdot 2 = 16$. וזוהי התשובה הסופית. $\square$.

## 4 תרגיל

חשב את הדטרמיננטה של המטריצה

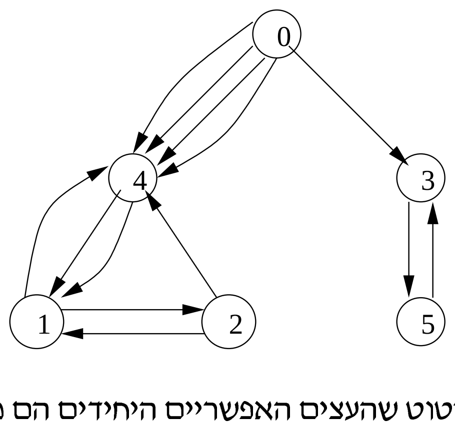
$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

<u>רעיון</u>: נניח שהמטריצה הזאת היא $D_r$ שמתקבלת ממחיקה של שורה ועמודה במ-טריצה דרגת כניסה מסוימת. נשחזר את מטריצת דרגת כניסה ואז נחשב את מספר העצים הפורשים בגרף המתאים.

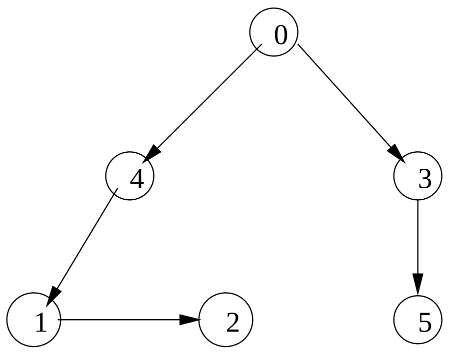
נשחזר את השורה ה-0 ואת העמודה ה-0. נשתמש בהבחנה כי סכום המספרים בכל עמודה של מטריצת דרגת כניסה שווה ל-0. העמודה ה-0 לא מעניינת אותנו כי היא מציינת קשתות שנכנסות לשורש העץ והן לא יכולות להשתתף בעץ. קיבלנו מטריצה:

$$D = \left(\begin{array}{c|ccccc} 0 & 0 & 0 & -1 & -4 & 0 \\ \hline 0 & 3 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

אזי הגרף המתאים הוא:




ניתן לראות מהשרטוט שהעצים האפשריים היחידים הם מהצורה הבאה בלבד:




- מספר האפשרויות לבחור קשת מ-0 ל-4 הוא 4.
- מספר האפשרויות לבחור קשת מ-4 ל-1 הוא 2.
- כל שאר הקשתות בעץ נקבעות באופן יחיד.

לכן סה"כ מספר העצים הפורשים עם שורש 0 הוא

$$4 \cdot 2 = 8$$

וזהו גם דטרמיננטת המטריצה הנתונה. $\square$

## תרגיל

מצא את מספר העצים הפורשים על הצמתים $\{1,2,\ldots,n\}$ שבהם לא משתתפת הקשת 1-2.

פתרון 1 (קירכהוף):

נבנה את מטריצת דרגת הכניסה של הגרף השלם ללא הקשת $(1,2)$.

$$D=\begin{pmatrix} n-2 & 0 & -1 & \cdots & \cdots & -1 \\ 0 & n-2 & -1 & \cdots & \cdots & -1 \\ -1 & -1 & n-1 & & & -1 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & \cdots & n-1 \end{pmatrix}$$

לפי משפט קירכהוף, $|D_1|$ הוא מספר העצים הלא מכוונים הפורשים $n$ צמתים ללא הקשת $(1,2)$. נחשב את זה:

$$|D_1|=\begin{vmatrix} n-2 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & n-1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & -1 & n-1 & & -1 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ -1 & -1 & -1 & & n-1 \end{vmatrix} \xrightarrow{C_{n-1}\leftarrow C_1+C_2+\ldots+C_{n-1}}$$

$$\begin{vmatrix} n-2 & -1 & \cdots & -1 & 0 \\ -1 & n-1 & \cdots & -1 & 1 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & -1 & & n-1 & \vdots \\ -1 & \cdots & \cdots & -1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow[1\le i<n-1]{C_i\leftarrow C_i+C_{n-1}} \begin{vmatrix} n-2 & -1 & \cdots & -1 & 0 \\ 0 & n & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & 0 & & n & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}=$$

$$(n-2)\begin{vmatrix} n & \cdots & 0 & 1 \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & & n & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}=(n-2)n^{n-3}$$

פתרון 2 (מטעמי סימטריה – הכי אלגנטי):

תהי $E$ קבוצת כל הקשתות האפשריות בגרף לא-מכוון פשוט עם $n$ צמתים (מהתרגול אנחנו יודעים ש- $|E|=\binom{n}{2}$). לכל $e\in E$ נסמן ב $C_e$ את מספר העצים הפורשים עם הקשת $e$. מטעמי סימטריה, לכל $e\in E$ מתקיים $C_{(1,2)}=C_e$, ולכן $\sum_{e\in E} C_e=|E|C_{(1,2)}=\binom{n}{2}C_{(1,2)}$.

נחשב בדרך נוספת את אגף שמאל.

__טענה__: $\sum_{e\in E} C_e = n^{n-2}(n-1)$

__הוכחה__: יהא $T=(V,E')$ עץ שפורש $n$ צמתים. לכל קשת $e\in E'$, $T$ הוא עץ פורש עם הקשת $e$ ולכן תורם 1 ל $C_e$. כיוון ש $|E'|=n-1$, $T$ תורם $n-1$ לסכום $\sum_{e\in E} C_e$ $\Leftarrow$ כל עץ פורש תורם $n-1$ לסכום $\sum_{e\in E} C_e$ $\Leftarrow$ $\sum_{e\in E} C_e = n^{n-2}(n-1)$.

קיבלנו ש $\binom{n}{2} C_{(1,2)} = n^{n-2}(n-1)$, ומזה נובע ש $C_{(1,2)} = 2n^{n-3}$.

לפי משפט קיילי, יש $n^{n-2}$ עצים שפורשים $n$ צמתים, לכן מספר העצים הפורשים שבהם הקשת $(1,2)$ משתתפת הוא $n^{n-2}-2n^{n-3}=(n-2)n^{n-3}$.