

מערכות בקרה 1 – סיכום

*מסמך זה הינו סיכום הקורס, שברובו מכיל חומר מהתרגולים עם תוספות, אך אינו מסמך רשמי של הקורס.

ליניאריזציה סביב נקודת שיווי משקל

רוב המערכות הפיסיקליות ניתנות לתיאור על ידי משוואות דיפרנציאליות לא-ליניאריות אותן ניתן להביא לצורה של משוואות מצב לא ליניאריות: $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n)^T \in R^n$, $\frac{d\underline{x}}{dt} = f(\underline{x}, u)$, $y = g(\underline{x}, u)$

בנקודת שיווי המשקל מתקיים: $f(\underline{x}_e, u_e) = 0$

נניח כניסה מהצורה: $u(t) = u_e + \delta u(t)$

כאשר האות δu "קטן". נסמן גם: $x(t) = \underline{x}_e + \delta \underline{x}(t)$ $y(t) = y_e + \delta y(t)$

לאחר הצבה במשוואות המצב ופיתוח לטור טיילור נקבל משוואות מצב ליניאריות המתארות בקירוב את תגובת המערכת להפרעות קטנות סביב נקודת שיווי המשקל (נש"מ).

$$\frac{d}{dt}(\delta \underline{x}(t)) \approx A \delta \underline{x}(t) + B \delta u(t)$$

$$\delta y(t) \approx C \delta \underline{x}(t) + D \delta u(t)$$

כאשר:

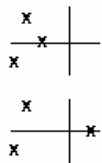
מעבר ממשוואות מצב לפונק' תמסורת:
 $H(s) = C(sI - A)^{-1} B + D$

$$A = \left. \frac{\partial f}{\partial \underline{x}} \right|_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}} \triangleq \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} \quad B = \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}} \triangleq \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial u} \end{pmatrix}$$

$$C = \left. \frac{\partial g}{\partial \underline{x}} \right|_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}} \triangleq \begin{pmatrix} \frac{\partial h}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial h}{\partial x_n} \end{pmatrix} \quad D \triangleq \left. \frac{\partial g}{\partial u} \right|_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}}$$

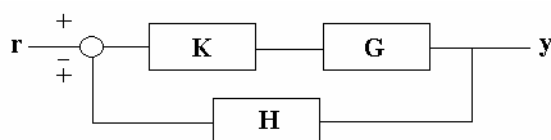
יציבות

לפי משפט ליאפונוב:



- כל הע"ע של A בעלי חלק ממשי קטן מ-0"0" ← נש"מ \underline{x}_e יציבה
- לפחות אחד הע"ע של A בעל חלק ממשי גדול מ-0"0" ← נש"מ \underline{x}_e לא יציבה
- לפחות אחד הע"ע של A בעל חלק ממשי שווה ל-0"0" ← לא ניתן לדעת

- אם המערכת נתונה כפונקצית תמסורת, ניתן למצוא את $Y(s)$, ולהעביר למשוואה דיפ' ע"י לפלס.



- פונקצית תמסורת באופן כללי: $T(s) = \frac{K \cdot G}{1 \pm K \cdot G \cdot H}$

קריטריון היציבות של Routh-Hurwitz

$$T(s) = \frac{b(s)}{a(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_m}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n}$$

- נניח ש- $T(s)$ היא proper כלומר $m \leq n$

תזכורת:

- ❖ המערכת יציבה אסימפטוטית אם תגובה שואפת ל-0 לכל תנאי התחלה עם $u = 0$ אם"ם : כל שורשי הפולינום $a(s)$ הם $\text{Re}(s) < 0$
- ❖ המערכת יציבה BIBO \Leftrightarrow כל כניסה חסומה גורמת יציאה חסומה אם כל הקטבים p_i הם בעלי $\text{Re}(p_i) < 0$.

הגדרה:

❖ פולינום ששורשיו יציבים $\text{Re}(s) < 0$ נקרא פולינום הורוביץ.

$$a(s) = s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n$$

עבור $n=1$: ליציבות $a_1 > 0$ (תנאי מספיק והכרחי) $a(s) = s + a_1$

עבור $n=2$: ליציבות $a_1 > 0, a_2 > 0$ (תנאי מספיק והכרחי) $a(s) = s^2 + a_1 s + a_2$

עבור $n=3$: ליציבות $a_1 > 0 ; a_2 > \frac{a_3}{a_1} ; a_3 > 0$ (תנאים מספיקים) $a(s) = s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3$

(תנאים מספיקים)

בונים את הטבלה הבאה (כאן מוצגת דוגמה עבור $n=7$):

$s^7 :$	$a_0 > 0$	a_2	a_4	a_6
$s^6 :$	a_1	a_3	a_5	a_7
$s^5 :$	$b_1 = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1}$	$b_2 = \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1}$	$b_3 = \frac{a_1 a_6 - a_0 a_7}{a_1}$	$b_4 = 0$
$s^4 :$	$c_1 = \frac{b_1 a_3 - a_1 b_2}{b_1}$	$c_2 = \frac{b_1 a_5 - a_1 b_3}{b_1}$	$c_3 = \frac{b_1 a_7 - a_1 b_4}{b_1}$	$c_4 = 0$
$s^3 :$	$d_1 = \frac{c_1 b_2 - b_1 c_2}{c_1}$	$d_2 = \frac{c_1 b_3 - b_1 c_3}{c_1}$	$d_3 = 0$	
$s^2 :$	$e_1 = \frac{d_1 c_2 - c_1 d_2}{d_1}$	$e_2 = \frac{d_1 c_3 - c_1 d_3}{d_1}$	$e_3 = 0$	
$s^1 :$	$f_1 = \frac{e_1 d_2 - d_1 e_2}{e_1}$	$f_2 = 0$		
$s^0 :$	$g_1 = \frac{f_1 e_2 - e_1 f_2}{f_1}$	$g_2 = 0$		

בשתי השורות הראשונות רושמים את מקדמי הפולינום לפי הסדר (מלמעלה למטה ומשמאל לימין, כמו בדוגמה). התאים האחרים מחושבים מתאים אלה עפ"י העיקרון המוצג בדוגמה.

עבור פולינום מדרגה n מחשבים $n + 1$ שורות (כולל שתי השורות של מקדמי הפולינום).
 שורשי הפולינום $P(s)$ הם כולם בעלי חלק ממשי שלילי (כלומר נמצאים בחלק השמאלי של
 המישור) אם ורק אם איברי העמודה הראשונה גדולים מאפס.

הגדרה: פולינום נקרא הורביצי אם כל שורשיו בעלי חלק ממשי שלילי (כלומר אם הוא מקיים את
 הדרישות של קריטריון Routh-Hurwitz).

בנוסף, מספר חילופי הסימן בעמודה הראשונה שווה למספר השורשים בחלק הימני של המישור

מקרה מיוחד:

1) אם במהלך בנית בטבלת RH התקבל כי אלמנט העמודה הראשונה של שורה שווה
 לאפס וכל יתר איברי השורה שונים מאפס, ניתן להחליף את ה-0 בקבוע חיובי קטן
 $\varepsilon > 0$ ולהמשיך בבניית הטבלה. לאחר השלמת הבניה, קריטריון היציבות מופעל על
 ידי לקיחת $\varepsilon \rightarrow 0$ ובדיקת חילופי סימן.

משמעות תרחישים הבאים של הופעת סימנים +/- בעמודה הראשונה הינה כדלקמן:

ל- $a(s)$ יש שורש ממשי לא יציב אחד, בעל $\text{Re}(s) > 0$. נספר כהחלפת סימן אחת.

ל- $a(s)$ קיים צמד שורשים מדומים (על ציר $j\omega$, בעלי $\text{Re}(s) = 0$).

במידה ואפס בעמודה הראשונה מתקבל בשורה אחת לפני אחרונה (שורה s^1), ניתן
 לחשב שני שורשי $a(s)$ אשר הניבו אפס זה בטבלה על ידי פתרון משוואה ריבועית
 המתקבלת ממקדמי שורה s^2 : $d_1 s^2 + d_2 = 0$ (יתקבלו 2 שורשים מדומים או שורש יציב
 ושורש לא יציב).

טיפ: ניתן לפרק פולינום ממעלה גבוהה לכמה פולינומים ממעלה נמוכה יותר ואז לעבוד עם הכללים הבסיסיים.
 כלומר: (פולינום ממעלה 1) * (פולינום ממעלה 3) = (פולינום ממעלה 4)

תגובה זמנית של מערכות מסדר שני

$$H(s) = \frac{\alpha_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \alpha_n^2} = \frac{b}{s^2 + a_1 s + a_2}$$

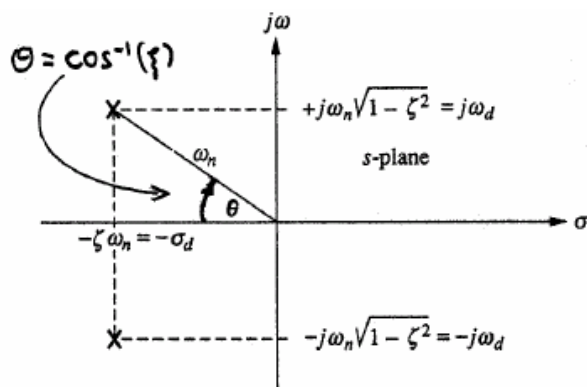
פונקצית תמסורת (בחוג סגור)

ω_n - תדר טבעי

ζ - מקדם הריסון

משבר בין ההצגות: $\omega_n = \sqrt{a_2}$

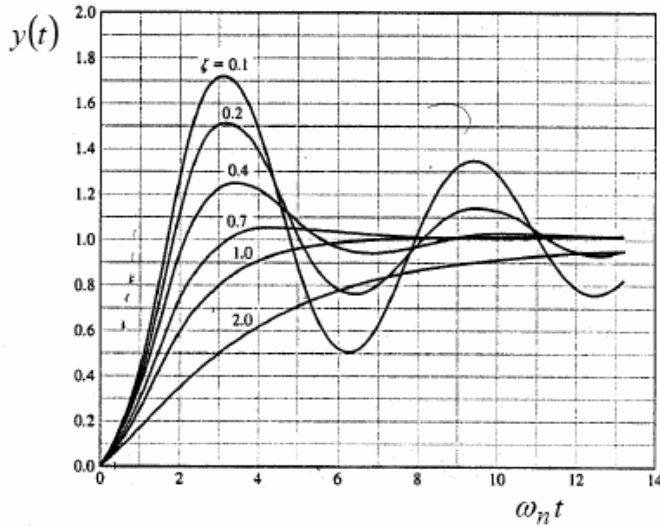
$$\zeta = \frac{a_1}{2\omega_n} = \frac{a_1}{2\sqrt{a_2}}$$



מיקום הקטבים

התגובה למדרגה

$$y(t) = 1 - \frac{e^{-\sigma_d t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_d t + \cos^{-1} \zeta) \quad t \geq 0$$

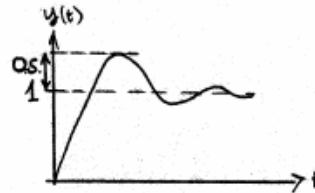
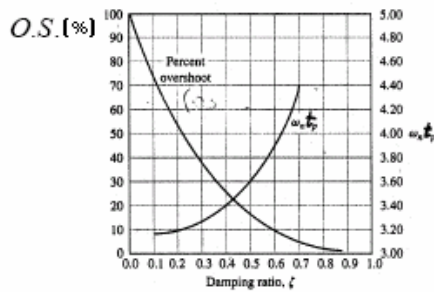


תדר התנודה - $\omega_d = \omega_n \sqrt{1-\zeta^2}$
 $\sigma_d = \zeta \omega_n$

תגובת יתר (Overshoot)

$$\dot{y} = 0 \Rightarrow t_p = \frac{\pi}{\sqrt{1-\zeta^2} \omega_n} = \frac{\pi}{\omega_d} \quad \text{עבור } 0 \leq \zeta < 1$$

$$O.S. = \exp\left(-\pi \zeta / \sqrt{1-\zeta^2}\right) = \exp(-\pi / \text{tg} \theta)$$



זמן התייצבות (Settling Time) הזמן בו נכנסת התגובה לשריטת של $\pm x\%$ מהערך הסופי

$$\frac{e^{-\zeta \omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} = 0.05 \Rightarrow t_s \approx -\frac{\ln(0.05 \sqrt{1-\zeta^2})}{\zeta \omega_n}$$

לתחום $\pm 5\%$ - קירוב 1

$$t_s \approx -\frac{\ln(0.05)}{\zeta \omega_n} \cong \frac{3}{\zeta \omega_n}$$

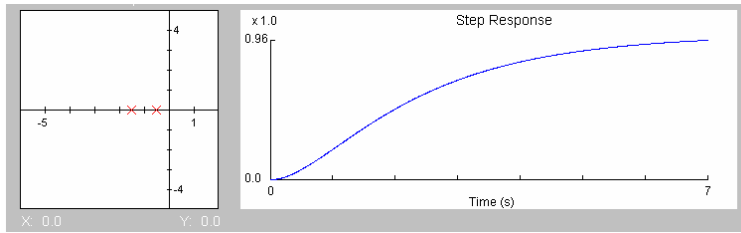
- קירוב 2

$$t_s \approx -\frac{\ln(0.02)}{\zeta \omega_n} \cong \frac{3.9}{\zeta \omega_n}$$

לתחום $\pm 2\%$ - קירוב 2 נותן

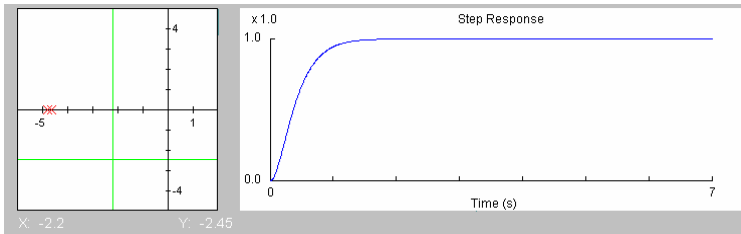
הריסונים השונים

ריסון יתר:



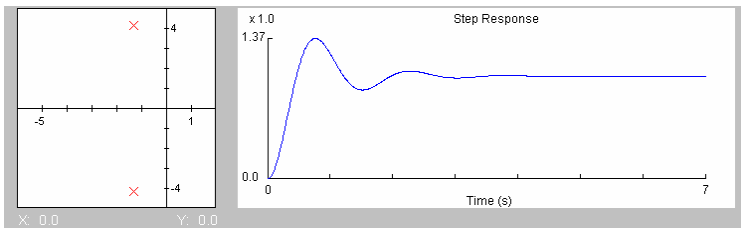
$\omega_n > 0$
 $\zeta > 1$

ריסון קריטי:



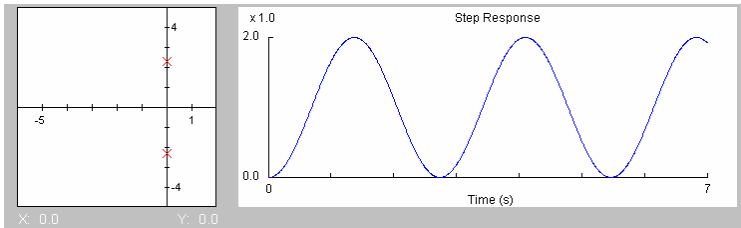
$\zeta = 1$

תת ריסון:



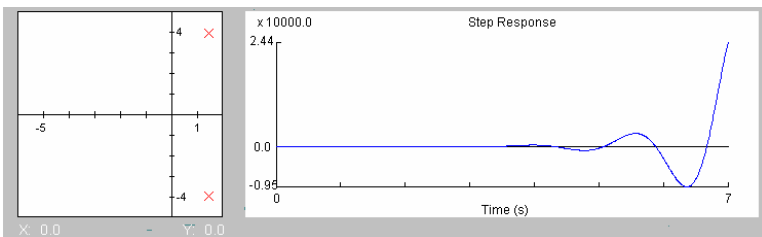
$0 < \zeta < 1$

מערכת לא מרוסנת:



$\zeta = 0$

מערכת לא יציבה:



$\zeta < 0$

קירוב מערכת מסדר גבוה לסדר שני

מטרה: לבחור את שני הקטבים המשמעותיים ביותר לתגובת המערכת. מדובר בביטול של קטבים / אפסים יציבים בלבד.

כללים:

1. מבטלים את הקטבים והאפסים המהירים.

2. מאחדים קוטב ואפס קרובים.

הערות: - אין לבצע צמצומים אלא אם כן נתבקש במפורש.
- לפני יישום הכללים, יש להביא את המערכת לצורת בודה, כדי לא לאבד את הגבר ה DC.

השפעת אפס וקוטב נוסף על המערכת

$$T(s) = T_0(s) \cdot \left(1 + \frac{s}{a}\right) \quad \text{הוספת אפס:}$$

$$y(t) = y_0(t) + \frac{1}{a} \frac{d}{dt} y_0(t) \quad \text{התגובה למדרגה תהייה:}$$

- הערות:**
- ניתן לראות שככל ש- a גדול יותר, כך האפס הנוסף משפיע פחות.
 - באופן כללי, גוזר משפר את היציבות ואת מהירות התגובה הזמנית.
 - מערכת יציבה עם אפס בצד ימין של מישור s ($a < 0$) נקראת: "ללא מינימום פאזה".
 - אין שינוי בערכים עצמיים של המערכת.

$$T(s) = T_0(s) \cdot \left(\frac{1}{1 + \frac{s}{|p|}}\right) \quad \text{הוספת קוטב (יציב בלבד):}$$

- נוכל לראות שככל ש- $\beta = \frac{|p|}{\zeta \omega_n}$ קטנה יותר, המערכת איטית יותר (קוטב קרוב יותר לראשית, והמע' מתקרבת למע' מסדר ראשון).

- באופן כללי, אינטגרטור פוגע ביציבות אך גם מקטין את שגיאת המצב המתמיד (שהמערכת יציבה).

תגובת תדר של מערכת בקרה - עקום בודה

עקום ההגבר האסימפטוטי של בודה הוא שרטוט של $20 \log |H(\omega)|$ כפונקציה של ω . ההגבר נמדד ביחידות של dB וסקלת הציר האופקי ω היא לוגריתמית (הערה: אם לא נאמר אחרת, log פירושו \log_{10}).
עקום הפאזה האסימפטוטי של בודה הוא שרטוט של $\angle H(\omega)$. סקלת הציר האופקי ω היא לוגריתמית.

עבור מערכת מסדר שני מהצורה: $\ddot{y}(t) + 2\xi\omega_n\dot{y}(t) + \omega_n^2 y(t) = \omega_n^2 x(t)$ נקבל:

$$\lambda_{1,2} = \begin{cases} -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{\xi^2-1} & , \quad |\xi| < 1 \\ -\xi\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\xi^2-1} & , \quad |\xi| \geq 1 \end{cases} \quad \text{ולכן } H(j\omega) = \left(1 + j2\xi\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right) - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 \right)$$

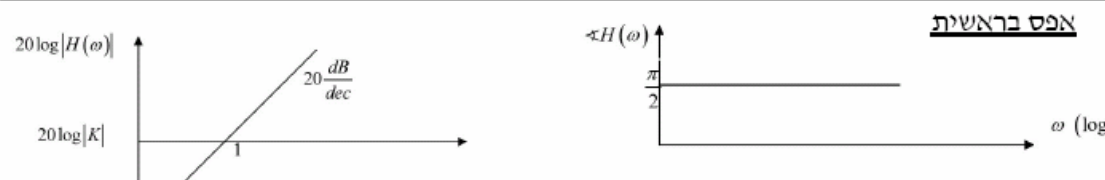
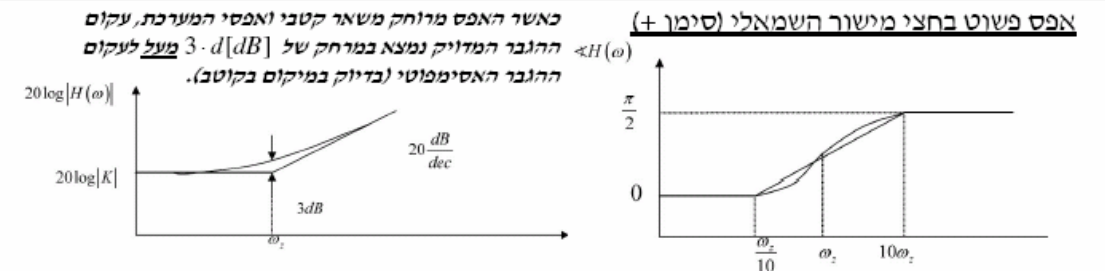
לצורך שרטוט עקומי ההגבר והפאזה נרשום את תגובת התדר בצורה קונונית כללית. לדוגמא:

$$\left\{ \begin{array}{l} H(s) \Big|_{s=j\omega} \\ j\omega \in ROC \end{array} \right. = H(\omega) = \frac{K \cdot j\omega_{z_0} \cdot \overbrace{\left(1 \pm j\frac{\omega}{\omega_{z_1}} \right)}^{\text{real zero}} \cdots \overbrace{\left(1 + j2\xi\left(\frac{\omega}{\omega_{z_2}}\right) - \left(\frac{\omega}{\omega_{z_2}}\right)^2 \right)}^{2 \text{ adjacent complex zeroes}} \cdots}{j\omega_{p_0} \cdot \underbrace{\left(1 \pm j\frac{\omega}{\omega_{p_1}} \right)}_{\text{real pole}} \cdots \underbrace{\left(1 + j2\xi\left(\frac{\omega}{\omega_{p_2}}\right) - \left(\frac{\omega}{\omega_{p_2}}\right)^2 \right)}_{2 \text{ adjacent complex poles}} \cdots} = \frac{K \prod_i (\omega - \omega_{z_i})}{\prod_i (\omega - \omega_{p_i})}$$

הערה: קירוב בודה אומר שלכל $\omega \leq \omega_p, \omega_z$ **ההשפעה זניחה** (כאשר ω_z, ω_p הוא קוטב/אפס).

טבלת סוגי הקטבים והאפסים והשפעתם:

סוג קוטב/אפס	תיאור ב- $H(\omega)$	תרומה בהגבר, $\delta_H \left[\frac{dB}{dec} \right]$ (מהקוטב/אפס ימינה)	השפעה בפאזה, $\delta_p \left[\frac{rad}{dec} \right]$ (מימין ומשמאל לקוטב/אפס)
קוטב פשוט , $\omega_p \neq 0$ מריבוי d .	$\frac{1}{\left(1 \pm j\frac{\omega}{\omega_p} \right)^d}$	$\delta_H = -20 \cdot d$ גם עבור קוטב בחצי מישור ימני	$\delta_p = \begin{cases} -\frac{\pi}{4} \cdot d & \omega_p < 0 (+ \text{sign}) \\ +\frac{\pi}{4} \cdot d & \omega_p > 0 (- \text{sign}) \end{cases}$ סה"כ $\frac{\pi}{2}$ על פני שתי דקדויות!
אפס פשוט , $\omega_z \neq 0$ מריבוי d .	$\left(1 \pm j\frac{\omega}{\omega_z} \right)^d$	$\delta_H = +20 \cdot d$ גם עבור קוטב בחצי מישור ימני	$\delta_p = \begin{cases} +\frac{\pi}{4} \cdot d & \omega_z < 0 (+ \text{sign}) \\ -\frac{\pi}{4} \cdot d & \omega_z > 0 (- \text{sign}) \end{cases}$ סה"כ $\frac{\pi}{2}$ על פני שתי דקדויות!
אפס בראשית , מריבוי d .	$(j\omega)^d$	$\delta_H = +20 \cdot d$	היסט של $+\frac{\pi}{2} \cdot d$ לכל אורך הגרף! ($\delta_p = 0$)
קוטב בראשית , מריבוי d .	$\frac{1}{(j\omega)^d}$	$\delta_H = -20 \cdot d$	היסט של $-\frac{\pi}{2} \cdot d$ לכל אורך הגרף! ($\delta_p = 0$)
קוטב מרוכב , מריבוי d , $\omega_n \neq 0$, $0 < \xi < 1$.	$\frac{1}{\left(1 \pm j2\xi\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right) - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 \right)^d}$	$\delta_H = -40 \cdot d$	$\delta_p = -\frac{\pi}{2} \cdot d$ על פני שתי דקדויות סה"כ!



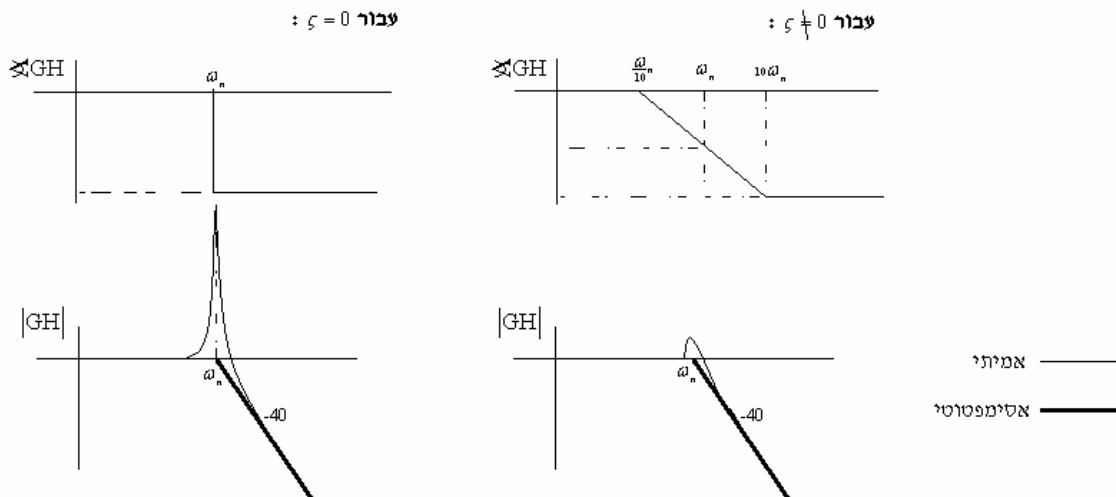
יוג קטבים קומפלקסיים:

$$GH(j\omega) = \frac{1}{1 + 2\zeta \frac{j\omega}{\omega_n} + \left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

$$|GH(j\omega)|_{dB} = -20 \log \left[\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + 4\zeta^2 \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right]^{\frac{1}{2}} = \begin{cases} 0 & \omega \ll \omega_n \\ -20 \log 2\zeta & \omega = \omega_n \\ -40 \log \frac{\omega}{\omega_n} & \omega \gg \omega_n \end{cases} ; \angle GH(j\omega) = \begin{cases} 0 & \omega \ll \omega_n \\ -90^\circ & \omega = \omega_n \\ -180^\circ & \omega \gg \omega_n \end{cases}$$

תהודה קיימת עבור $\zeta < \frac{\sqrt{2}}{2}$ הגבר התהודה: $M = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}$ תדר התהודה: $\omega_p = \omega_n \sqrt{1-2\zeta^2}$

- חשיבות ζ :
- עבור $\zeta < 0$, הקטבים לא יציבים, מכאן שגם המערכת לא יציבה.
 - ככל ש- ζ יותר גדול, כך הוא מתחיל להשפיע יותר מוקדם אבל פחות חזק.
 - ζ קטן יגרום להגבר תהודה גדול, ואז יהיה פיק גבוה יותר בעקום האמיתי.



- מציאת שיפוע בגרף:
$$a = \frac{H(\omega_B) - H(\omega_A)}{\log(\omega_B) - \log(\omega_A)} = \frac{H(\omega_B) - H(\omega_A)}{\log(\omega_B/\omega_A)}$$

- נוסחאות קרוב שימושיות בחישוב פאזה:
$$\tan^{-1}\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right) = \begin{cases} \frac{\omega_1}{\omega_2} & \omega_2 > \omega_1 \\ \frac{\pi}{2} - \frac{\omega_2}{\omega_1} & \omega_1 > \omega_2 \end{cases} \quad \tan^{-1}(x) = \begin{cases} x & x < 1 \\ \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} & x > 1 \end{cases}$$

- עקום ההגבר מתחיל מ- $20 \log|k|$, אלא אם כן יש גוזר (אפס בראשית) או אינטגרטור (קוטב בראשית).

- עקום הפאזה מתחיל מ-0 אלא אם כן יש אפס בראשית מסדר n , אז הוא יתחיל מ- $+\frac{\pi}{2} \cdot n$.

- עבור $k < 0$ יש היסט של $-\pi$ בגרף הפאזה.

- קוטב יציב מוריד את ההגבר ואת הפאזה, אפס יציב מעלה את ההגבר ואת הפאזה.

- עקום בודה של פונקציית התמסורת הצמודה, יהיה זהה בהגבר ובפאזה נגדית (הסבר): $\angle H^*(s) = -\angle H(s)$.

מאפייני תגובת תדר של מערכת בקרה

עודף הגבר (Gain Margin) הינו היחס בו ניתן להגדיל את הגבר המערכת עד להגיעו לערך 1 (0 Db) עבור התדר בו הפאזה מקבלת ערך של -180° .

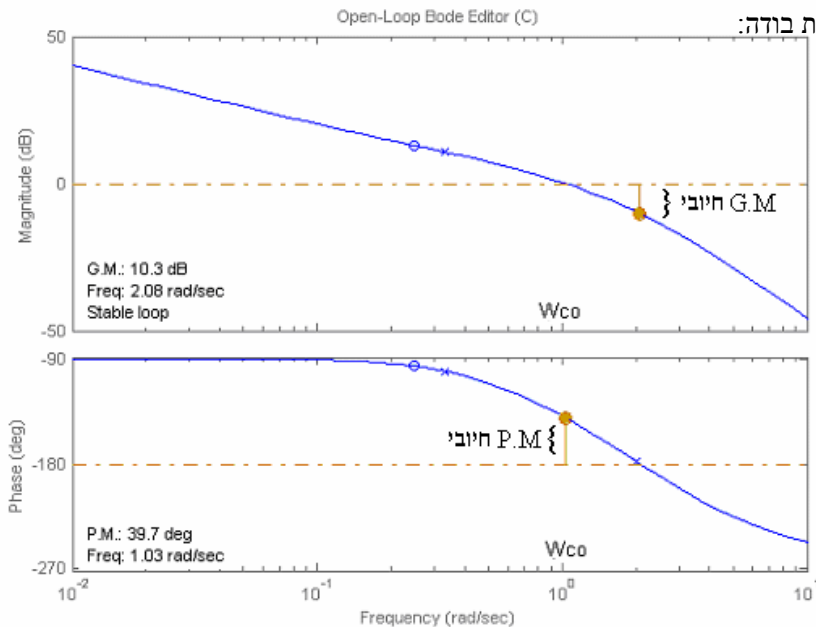
$$GM = -20 \log_{10} |G(j\omega)|_{\angle G(j\omega) = -180^\circ}$$

ערכים מקובלים של GM במערכות הנדסיות 6-10Db.

עודף הפאזה (Phase Margin) הינו ההפרש בין פאזת המערכת ל- -180° עבור התדר בו הגבר המערכת הינו 1 (0 Db). תדר זה נקרא crossover frequency (תדר חציה) ומסומן ב- ω_{CO} .

$$PM = \angle G(j\omega)_{|G(j\omega)|=1} + 180^\circ$$

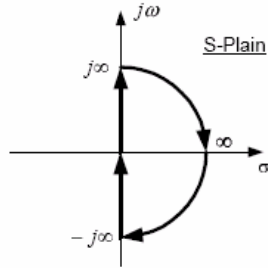
ערכים מקובלים של PM במערכות הנדסיות $30^\circ - 60^\circ$.



ניתן לראות את GM ו-PM בדיאגרמת בודה:

קריטריון היציבות של Nyquist

דיאגרמת Nyquist הינה תיאור גרפי של תגובת התדר של החוג הפתוח $GH(s)$. זהו תיאור גרפי של $\text{Re}\{GH(j\omega)\}$ ו- $\text{Im}\{GH(j\omega)\}$ במערכת קרטזית כאשר התדר ω הוא פרמטר.

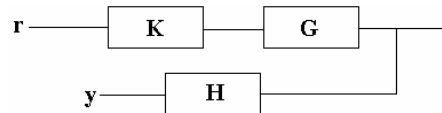
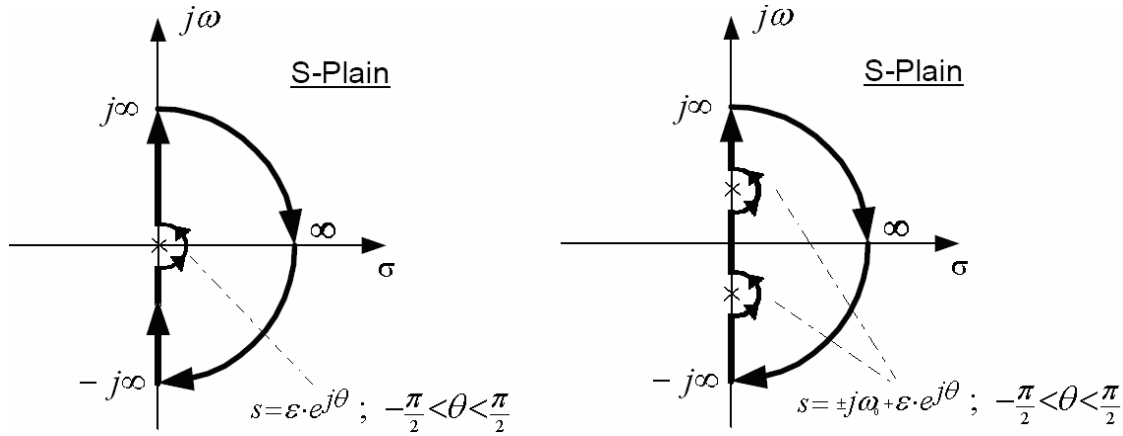


עקום Nyquist השלם

נצייר את $GH(s)$ לאורך המסלול הבא:

כך שהמסלול עוקף קטבים מדומים של $GH(s)$ מימין ע"י חצי מעגל ברדיוס שואף לאפס.

לדוגמא:



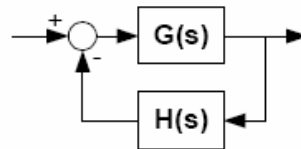
הערה: חוג פתוח מתואר כך -

כאשר פונקציית התמסורת של החוג הפתוח הינה: $T(s) = K \cdot G \cdot H(s) \Rightarrow Y(s) = R \cdot K \cdot G \cdot H(s)$

קריטריון היציבות של Nyquist

הקריטריון מאפשר לקבוע את היציבות של מערכת בחוג סגור בהסתמך על תגובת התדר של החוג הפתוח

$$T(s) = \frac{G(s)}{1 + GH(s)}$$



$T(s)$ יציבה אמ"מ לביטוי $1+GH(s)$ אין שורשים בחצי המישור הימני הסגור (נניח בהמשך שלא חל צמצום של קוטב לא יציב).

$$P_c = P_o + N_{cw}$$

קריטריון Nyquist קובע:

- P_c - מספר הקטבים הלא יציבים בחוג סגור (אותו מחפשים)
- P_o - מספר הקטבים הלא יציבים בחוג פתוח (לא כולל קטבים מדומים)
- N_{cw} - מספר ההקפות של העקומה את הנקודה -1 **בכיוון השעון**

כללים לשרטוט העקומה

1. בחרו במסלול המתאים (עקפו קטבים מדומים מימינם).
2. **חלק I** של העקומה העובר דרך הציר המדומה החיובי הציבו $s = j\omega$ ושרטטו את העקומה בעזרת שרטוט בודה של $GH(s)$.
3. **חלק II** של העקומה הינו "תמונת ראיי" (יחסית לציר הממשי) של חלק I.
4. **חלק III** חצי המעגל ברדיוס האינסופי (עם כיוון השעון) הגדירו:

$$s = Re^{j\theta}, \quad R \rightarrow \infty, \quad \theta: \frac{\pi}{2} \xrightarrow{(cw)} \frac{\pi}{2}$$

$$1 + Ts \approx Ts$$

אז מתקיים:

5. **חלק IV** מעקפי קטבים מדומים הגדירו קירוב מתאים. לדוגמא: עבור קוטב בראשית הגדירו:

$$s = \varepsilon e^{j\theta}, \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad \theta: -\frac{\pi}{2} \xrightarrow{(ccw)} \frac{\pi}{2}$$

$$1 + Ts \approx 1$$

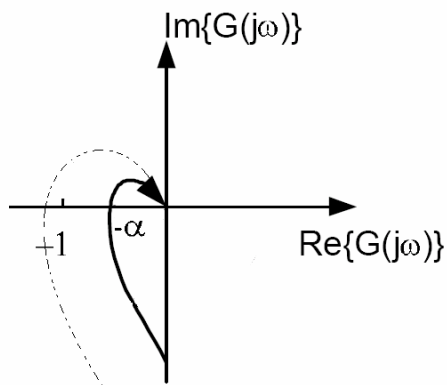
במקרה זה מתקיים:

הערות

- אם יש קוטב מדומה בחוג סגור העקומה תעבור בדיוק דרך הנקודה -1 (ואז המערכת הסגורה אינה יציבה)
- הקפות של הנקודה -1 נגד כיוון השעון (ccw) ייחשבו כספירה שלילית של N_{cw}
- אם מעוניינים ביציבות בחוג סגור של $1 + KGH(s)$ ניתן לצייר את העקומה עבור $1 + GH(s)$ אך לספור הקפות סביב הנקודה $-1/K$.

עודף הגבר ועודף הפאזה בדיאגרמת נייקויסט

עודף הגבר בפשטות, הינו היחס בו ניתן להגדיל את הגבר המערכת K , ושעדיין המערכת לא תצא מיציבות.



עבור עקום נייקויסט כאן, ניתן לראות שאם נגדיל את ההגבר K פי $1/\alpha$, נקבל הקפה סביב -1, כלומר המערכת תצא מיציבות. זהו עודף הגבר.

כמוכן שנעדיף עודף הגבר גדול ככל שניתן, כדי שלא כל רעש יוציא את המערכת מיציבות.

α היא נק' חיתוך עקום נייקויסט את הציר הממשי השלילי. מתקבלת עבור התדר בה $\angle GH(j\omega_g) = -180^\circ$.

$$G.M = \frac{1}{|GH(j\omega_g)|} = \frac{1}{\alpha}$$

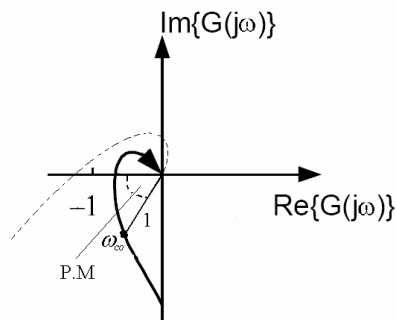
באותו אופן, עודף הפאזה הינו הזווית אותה ניתן להוסיף למערכת מבלי שהיא תצא מיציבות. הוספת פאזה \Leftarrow הכפלה ב- $K = e^{j\theta}$.

מבחינת עקום נייקויסט, עודף הפאזה הינה הזווית שבה גודל העקום הוא 1, כי אם נוסיף זווית זו לעקום אז תתבצע הקפה סביב -1 \Leftarrow המערכת תצא מיציבות.

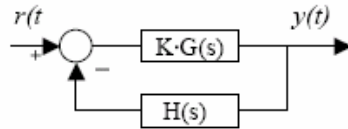
$$P.M = 180^\circ + \angle GH(j\omega_{co})$$

הערות: - גודל ההגבר שווה 1 \Leftarrow עקום בודה שווה 0.

- $P.M$ פרופורציוני לריסון המערכת ($P.M$ קטן - ריסון נמוך).



ROOT LOCUS



$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K \cdot G(s)}{1 + K \cdot GH(s)} \quad \text{אנו דנים במערכת:}$$

ה- $R.L.$ הינו תרשים במישור של $s = \sigma + j\omega$ של מיקום קטבי החוג הסגור. כלומר שורשי המשוואה האופיינית: $1 + K \cdot GH(s)$ כאשר $GH(s)$ נתון, ו- K פרמטר המשתנה מ- 0 ל- ∞ (או $-\infty$).

תנאי המודול והזווית

כל פתרון s_0 של המשוואה האופיינית מקיים (ל- K מסוים): $K \cdot GH(s_0) = -1$. נפרק תנאי זה לשני התנאים הבאים:

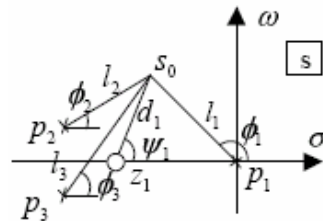
$$|K| \cdot |GH(s_0)| = 1 \quad \text{א. תנאי המודול:}$$

ב. תנאי הזווית:

$$\angle GH(s_0) = (2n+1)\pi \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad \text{עבור } K > 0$$

$$\angle GH(s_0) = 2n\pi \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad \text{עבור } K < 0$$

משמעות גרפית



$$GH(s) = \frac{(s - z_1)}{(s - p_1)(s - p_2)(s - p_3)} \quad \text{נדגים עבור}$$

(s_0 נקודה כלשהי על ה- $R.L.$)

$$|K| = \frac{1}{|GH(s)|} = \frac{|s_0 - p_1| \cdot |s_0 - p_2| \cdot |s_0 - p_3|}{|s_0 - z_1|} = \frac{l_1 \cdot l_2 \cdot l_3}{d_1} \quad \text{מתנאי המודול:}$$

$$= \frac{\text{מכפלת המרחקים של } s_0 \text{ מקטבי החוג הפתוח}}{\text{מכפלת המרחקים של } s_0 \text{ מאפסי החוג הפתוח}}$$

מתנאי הזווית בצורה דומה:

$$(K > 0) \quad (2n+1)\pi = [\angle(s_0 - p_1) + \angle(s_0 - p_2) + \angle(s_0 - p_3)] - [\angle(s_0 - z_1)] =$$

$$= \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 - \psi_1 = \left\{ \begin{array}{l} \text{סכום הזוויות} \\ \text{בין } s_0 \text{ לקטבים} \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} \text{סכום הזוויות} \\ \text{בין } s_0 \text{ לאפסים} \end{array} \right\}$$

משמעות תנאי המודול והזווית

תנאי הזווית הינו תנאי מספיק והכרחי כך שהנקודה s_0 תמצא על ה- $R.L.$ התנאי

אינו תלוי בגודלו של K , ובעזרתו נוכל לשרטט את ה- $R.L.$

מתנאי המודול נוכל לקבל את ההגבר K בכל נקודה על ה- $R.L.$

כללי שרטוט ROOT LOCUS

כללית ה- R.L. הינו סימטרי ביחס לציר הממשי.

כלל 0 הבא את התמסורת החוג הפתוח לצורה סטנדרטית ל- R.L. : $K \cdot GH(s) = \frac{K \cdot \prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{j=1}^r (s - p_j)}$

z_i - אפסי החוג הפתוח, מספרם $\#z = m$

p_j - קוטבי החוג הפתוח, מספרם $\#p = r$

כלל 1 מספר ענפי ה- R.L. הוא $\max(\#p, \#z)$

כלל 2 נקודות קצה של ה- R.L. :

כל ענף של ה- R.L. מתחיל ($K=0$) בקוטב שונה של החוג הפתוח (p_j) ומסתיים

$|K| = \infty$ באפס שונה של החוג הפתוח (z_i). כשמספר הקטבים (אפסים) גדול ממספר

האפסים (קטבים) אזי לצורך זה האפסים (קטבים) החסרים נמצאים ב- ∞ .

כלל 3 ה- R.L. על הציר הממשי :

עבור $K > 0$: נקודה על הציר הממשי תימצא על ה- R.L. אם סכום הקטבים

והאפסים הממשיים (של החוג הפתוח) מימנה הוא אי זוגי.

עבור $K < 0$: כני"ל, עם מספר זוגי.

כלל 4 אסימפטוטות :

האסי הן קווים ישרים (קרניים) אליהם שואפים ענפי ה- R.L. ההולכים ל- ∞ .

מספר האסי : $N = |\#p - \#z|$

זווית האסי : $K > 0$: $\Theta = \frac{(2n+1)\pi}{N}$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$)

$K < 0$: $\Theta = \frac{2n\pi}{N}$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$)

מפגש האסי : כל האסי נפגשות בנקודה אחת על הציר הממשי שהיא : $b_0 = \frac{\sum p_j - \sum z_i}{\#p - \#z}$

כלל 5 א' זווית עזיבה מקוטב קומפלקסי, או כניסה לאפס קומפלקסי, של החוג הפתוח

$K > 0$: זווית עזיבה מקוטב בנקודה s_0 : $-\Phi + \angle [GH(s_0)]^{\#} = \pi$

זווית כניסה לאפס בנקודה s_0 : $\Psi + \angle [GH(s_0)]^{\#} = \pi$

כאשר $\angle [GH(s_0)]^{\#}$ זו הזווית של $GH(s)$ המחושבת ב- s_0 ללא תרומת הקוטב (אפס) הנדון.

$K < 0$: כני"ל עם 0 במקום π .

כלל 5 ב' זוויות עזיבה מקוטב ממשי מרובה (או כניסה לאפס ממשי מרובה) ניתן לקבל

(כאלטרנטיבה עדיפה לכלל 5 א') מצירוף העובדות הבאות :

א. קיום / אי קיום ענף של ה- R.L. על הציר הממשי משני צידי הקוטב / אפס.

ב. הזוויות בין הענפים היוצאים (נכנסים) הן שוות.

ג. ה- R.L. הינו סימטרי ביחס לציר הממשי.

כלל 6 נקודות פיצול של ה- R.L. :

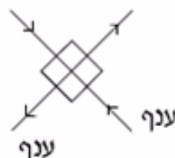
נקודת פיצול היא נקודה בה נפגשים 2 ענפים (או יותר) של ה- R.L.

בד"כ נתקל בנקודת פיצול על הציר הממשי.

נקודות אלו הן נקודות קיצון של K , ומתקבלות מתוך :

$\frac{d}{ds} [GH(s)] = 0$ או $\frac{d}{ds} (K) = -\frac{d}{ds} \left[\frac{1}{GH(s)} \right] = 0$

שים לב : יש לבדוק לגבי כל נקודת פיצול אם היא שייכת ל- R.L. עבור $K > 0$ או ל- R.L. עבור $K < 0$.



7 כלל 7

חיתוך ציר: $j\omega$
 ניתן למצוא את נקודות חיתוך הענפים עם ציר $j\omega$ (במידה וקיימות) בשתי שיטות:
 א. מקריטריון רות – הורוביץ.

חשב את מערך $R.H.$ עבור הפולינום האופייני של החוג הסגור

$$1 + K \cdot GH(s) = 0$$

מצא K_0 (או מספר ערכים של K) עבורו המקדם בשורה s^1 המתאפס.

הצב K_0 זה בשורה s^2 ומצא את ω_n - תדר החציה.

ב. שיטה שניה:

הצב $s = j\omega$ במשוואה האופיינית. השוואת החלק הממשי והמדומה לאפס

תיתן את K_0 ו- ω_n .

הערה: כאשר הקטבים בחוג סגור עוברים את הציר המדומה ימינה, המערכת יוצאת מיציבות. אלה הנק' בעקום נייקוויסט בהן משתנה מספר ההקפות.

כלל 8 – שימור מרכז הכובד

אם מספר הקטבים של החוג הפתוח גדול לפחות בשניים ממספר האפסים

$(\# p \geq \# z + 2)$, אזי סכום קטבי החוג הסגור קבוע (לכל K) ושווה לסכום קטבי החוג

הפתוח.

$$\sum_{i=1}^{\#p_d} p_{oi} = \sum_{i=1}^{\#p_d} p_{di} \quad (\text{קוטבי החוג הסגור}) \quad (\text{קוטבי החוג הפתוח})$$

שגיאת מצב מתמיד

משפט הערך הסופי

(באם הגבול הזמני קיים)

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot E(s)$$

שגיאת מצב מתמיד עבור משוב יחידה (מקרה פרטי)



$$E(s) = \frac{1}{1 + G(s)} R(s)$$

ממשפט הערך הסופי נובע שהשגיאה במצב מתמיד היא: $e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot E(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{1 + G(s)} R(s)$

בתנאי שהמערכת בחוג סגור יציבה והגבול קיים.

הצורה הכללית של פונקציית התמסורת $G(s)$ נתונה ע"י:

$$G(s) = \frac{K(1 + b_1s + b_2s^2 + \dots + b_qs^q)}{s^m(1 + a_1s + a_2s^2 + \dots + a_ps^p)}$$

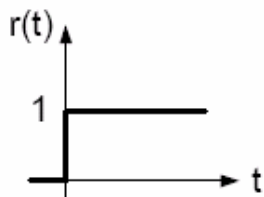
כאשר: K – הגבר פונקציית התמסורת

a_i, b_j – מקדמים קבועים

m – מספר הקטבים בראשית שיש ל- $G(s)$.

על פי מספר זה מגדירים את הסוג של $G(s)$: כאשר $m = i$ המערכת היא מסוג i . ($i = 0, 1, 2$).

נגדיר את הערך של השגיאה במערכת כאשר היא במצב מתמיד, עבור כניסה מסוג מסוים:

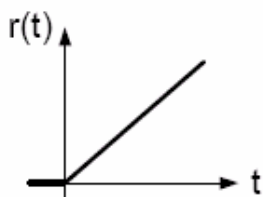


כניסת מדרגה

$$r(t) = 1(t) \quad ; \quad R(s) = \frac{1}{s}$$

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{1 + G(s)} \frac{1}{s} = \frac{1}{1 + \lim_{s \rightarrow 0} G(s)} = \frac{1}{1 + K_p}$$

כאשר $K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s)$ - קבוע השגיאה לכניסת מדרגה.

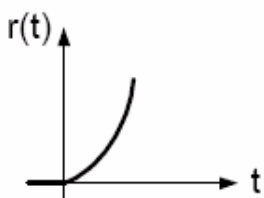


כניסת ריצה

$$r(t) = t \cdot 1(t) \quad ; \quad R(s) = \frac{1}{s^2}$$

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{1 + G(s)} \frac{1}{s^2} = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} s \cdot G(s)} = \frac{1}{K_v}$$

כאשר $K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot G(s)$ - קבוע השגיאה לכניסת ריצה.



כניסת תאוצה

$$r(t) = \frac{1}{2} t^2 \cdot 1(t) \quad ; \quad R(s) = \frac{1}{s^3}$$

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{1 + G(s)} \frac{1}{s^3} = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} s^2 \cdot G(s)} = \frac{1}{K_a}$$

כאשר $K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 \cdot G(s)$ - קבוע השגיאה לכניסת תאוצה.

טבלת שגיאות מסכמת

תאוצה	ריצה	מדרגה	סוג המערכת (נקבע לפי G)
$r(t) = \frac{1}{2} t^2 \cdot 1(t)$	$r(t) = t \cdot 1(t)$	$r(t) = 1(t)$	
∞	∞	$\frac{1}{1 + K_p}$	מערכת מסוג 0
∞	$\frac{1}{K_v}$	0	מערכת מסוג I
$\frac{1}{K_a}$	0	0	מערכת מסוג II

באופן כללי, עבור $e(t) = r(t) - y(t)$
 נקבל: $E(s) = \underbrace{(1 - T(s))}_{T_e(s)} \cdot R(s)$
 כאשר $T_e(s)$ הינה פונק' התמסורת בין $R(s)$ ל- $E(s)$.

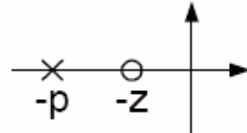
תכנ RL – רשתות תיקון קידום / פיגור

שיטת ה- R.L. מאפשרת לקבל תמונה גרפית של תנועת קטבי החוג הסגור כפונקציה של ההגבר K . הדרך הפשוטה ביותר לתכנן בקר בעזרת R.L. היא לבחור ערך של K שעבורו מתקבלת התנהגות רצויה של החוג הסגור. השיטה הזאת לא משנה את מבנה ה- R.L. ולכן לא מאפשרת להשיג ביצועים טובים. דרך התכנון היעילה יותר היא לתכנן רשתות תיקון.

רשת קידום פאזה

רשת קידום הינה מהצורה הבאה:

$$G_c(s) = K \frac{s+z}{s+p} = K \frac{s+\alpha p}{s+p} \quad ; \quad \alpha \equiv \frac{z}{p} ; \quad 0 < \alpha < 1$$



ז"א, ברשת קידום האפס קטן יותר מהקוטב.

תכנון בקר רשת קידום

רשת קידום "מושכת" את ה- R.L. שמאלה ובכך מאפשרת את שיפור התגובה הזמנית.

השיטה

1. מתוך דרישות התכנן חשב את מקום הקטבים הדומיננטיים הנדרשים.
2. הוסף רשת קידום באזור הקטבים הדומיננטיים.
3. העזר בתנאי הזווית למציאת פרמטרי רשת הקידום (z, p) הנדרשים להצבת הקוטב בנקודה $s_1 = p_1^c$:

$$\angle G_c(s_1) + \angle G(s_1) = -\pi$$

כאשר $G(s)$ היא פונקצית התמסורת של המערכת המבוקרת.

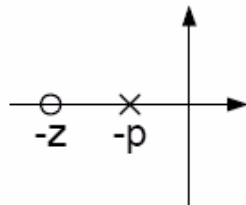
$$K = \frac{1}{|G(s_1)|} \cdot \frac{|s_1 + p|}{|s_1 + z|} \quad ; \quad \text{מצא את } K \text{ מתוך תנאי המודול}$$

הערה: רשת קידום מורידה זווית

רשת פיגור פאזה

רשת פיגור הינה מהצורה הבאה:

$$G_c(s) = K \frac{s+z}{s+p} = K \frac{s+\alpha p}{s+p} \quad ; \quad \alpha \equiv \frac{z}{p} ; \quad \alpha > 1$$



ז"א, ברשת פיגור הקוטב קטן יותר מהאפס.

תכנון בקר רשת פיגור

רשת פיגור מאפשרת שיפור קבועי השגיאה פי α לערך מבלי לשנות משמעותית את מיקום הקטבים הדומיננטיים.

השיטה

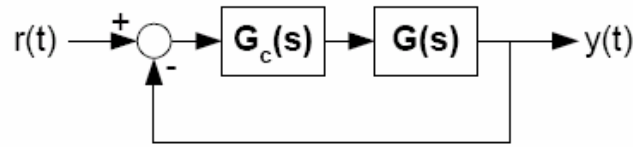
נמצא הגבר K הדרוש לקבלת הקטבים הדומיננטיים הרצויים (ללא רשת תיקון) ונוסף את רשת הפיגור סמוך לראשית עם ה- α הדרוש. הערה: רשת פיגור "מושכת" את ה- R.L. ימינה וגורמת להקטנת הריסון והיציבות (כלל שימור מרכז הכובד)

הערה: - רשת פיגור מוסיפה זווית (קטנה)

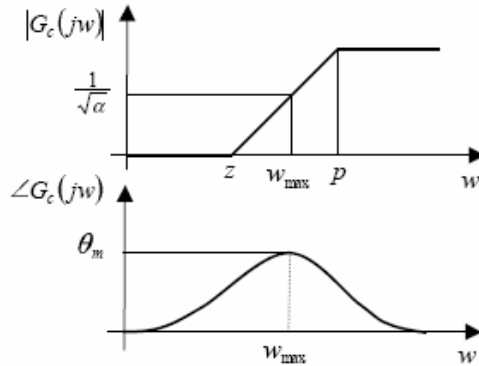
- לשיפור מערכת סטטית, נעדיף רשת פיגור כי היא לא פוגעת כמעט בתגובה הזמנית.

המטרה

תכנון בקר $G_c(s)$ כך שהמערכת בחוג סגור תעמוד בדרישות ביצועים מוכתבות.



$$G_c(s) = \frac{1 + \frac{1}{z}s}{1 + \frac{1}{p}s} = \frac{1 + \frac{1}{z}s}{1 + \alpha \frac{1}{z}s} \quad 0 < \alpha \equiv \frac{z}{p} < 1 \quad \text{רשת קידום פאזה:}$$



$$w_{\max} = \frac{z}{\sqrt{\alpha}}$$

$$\sin \theta_m = \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} \Rightarrow \alpha = \frac{1 - \sin \theta_m}{1 + \sin \theta_m}$$

θ_m - תוספת הפאזה הדרושה.

w_{\max} - התדר בו דרושה התוספת.

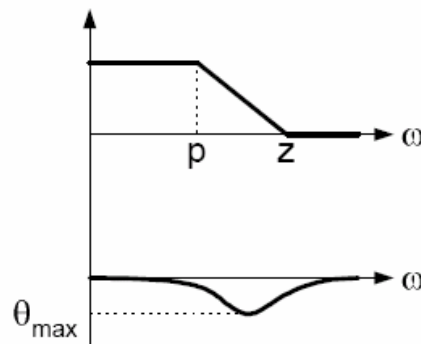
רשת קידום מוסיפה פאזה באזור ω_{co} וע"י כך מגדילה PM (עודף פאזה).

חסרון: תוספת הגבר בתדרים גבוהים.

יש למקם את הרשת בסביבת ω_{co} .

רשת פיגור פאזה

$$G_c(s) = K \frac{s+z}{s+p} = K \frac{s+\alpha p}{s+p} \quad ; \quad \alpha \equiv \frac{z}{p} \quad ; \quad \alpha > 1 \quad \text{סימון בחלק מספרי לימוד:}$$



- מגדילה את ההגבר בתדרים נמוכים מבלי להשפיע על התדרים הגבוהים ולכן משפרת את השגיאה במצב מתמיד.

- מוסיפים את הרשת בתדרים הנמוכים ($z \ll \omega_{co}$ (מקובל $z = \frac{\omega_{co}}{10}$) כך

שהפאזה השלילית של הרשת "לא תשפיע" באזור חציית 0 Db (כדי לא לקלקל את ה-PM)

α - תוספת ההגבר הדרושה.

תכן בתדר – שיטת עבודה:

- עבור הדרישות הסטטיות ($e_{ss}^{p,v,a}$, $t_{p,v,a}$) , נשתמש ברשת פיגור או בקר PI .
- אם יש צורך בתיקון מאפיינים דינמיים ($P.M$, $G.M$, ω_{BW}) , נשתמש ברשת קידום או בקר PD .
- מתחילים עם בחירת β . אם לא נתון אזי בד"כ נבחר $1.5 < \beta < 1.7$.
- מתקיים $\omega_{BW} = \beta \cdot \omega_{co}$. בד"כ יינתן אחד הערכים. בנוסף מתקיים $\omega_{max} = \omega_{co}$.

$PI: K_p + \frac{K_I}{s} = K \frac{s+z}{s}$
 $PD: K_p + K_D s = K(s+z)$

- נחשב את $\theta_{max} = PM^{1צו} - PM^{מצו} + 5^\circ$

מציאת $PM^{מצו} : \angle G(s = j\omega_{co}) + 180^\circ$

- נחשב את $\alpha = \frac{z}{p} = \frac{1 - \sin(\theta_{max})}{1 + \sin(\theta_{max})}$

- כעת יש למצוא את z, p , בעזרת הקשרים לעיל ובעזרת $\omega_{max} = \frac{z}{\sqrt{\alpha}}$

- למציאת $K : H(s) = K \frac{1 + \frac{s}{z}}{1 + \frac{s}{p}}$. נדרוש שיתקיים ω_{co} , כלומר בתדר זה $|GH(j \cdot \omega_{co})| = 1 = 0_{dB}$

- כעת נבדוק את שגיאת המצב המתמיד (e_{ss}) . אם היא לא מתאימה, נוסיף רשת פיגור כאשר הפקטור החסר לנו

ישמש לנו כ- $\alpha > 1$. **הסבר:** $\frac{e_{ss}^{מצו}}{\alpha} = e_{ss}^{1צו}$

קונטרולוביליות, אובזרווביליות ומינימליות, מימושים קנוניים

מערכת משוואות לינאריות קבועה בזמן היא קונטרולובילית אם ניתן להביא את ווקטור המצב שלה x מכל ערך נתון לכל ערך רצוי ע"י בקרה מתאימה.
 מערכת משוואות לינאריות קבועה בזמן היא אובזרוובילית אם ניתן לחשב את ווקטור המצב ההתחלתי x_0 מתוך מדידת הכניסות והיציאות בקטע זמן סופי.

מערכת קונטרולובילית ואובזרוובילית נקראת מינימלית.

במערכת מינימלית אין צמצום של אפסים וקטבים בפונקציית התמסורת. אם יש צמצום כזה, המערכת אינה מינימלית, כלומר המערכת אינה קונטרולובילית או אינה אובזרוובילית או אינה קונטרולובילית ואובזרוובילית.

חשוב: - קונטרולוביליות ואובזרווביליות הינן תכונת של מימוש ולא של פונק' תמסורת!!
 - עובדים רק עם מערכות *Stricly Proper*. אם נתון אחרת, ניתן לחלק פולינומים.

משפט:

(1) מערכת בדידה או רציפה היא קונטרולובילית אם ורק אם מטריצת הקונטרולוביליות שלה $C = [B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B]$ אינה סינגולרית.

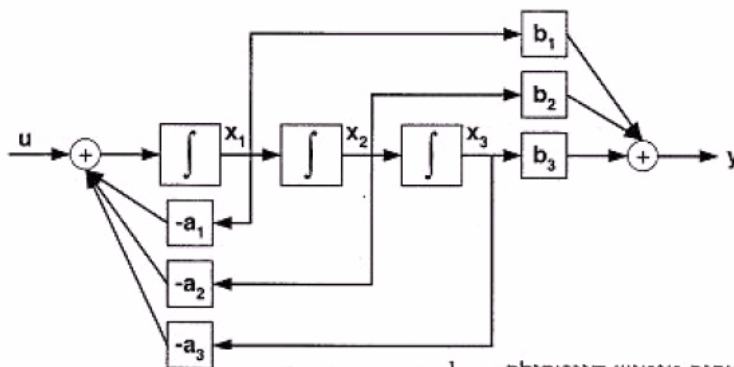
(2) מערכת בדידה או רציפה היא אובזרוובילית אם ורק אם מטריצת האובזרווביליות שלה $O = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$ אינה סינגולרית.

מימושים קנוניים במערכות SISO
 נתונה המערכת הבאה:

$$H(s) = \frac{b_1s^2 + b_2s + b_3}{s^3 + a_1s^2 + a_2s + a_3}$$

Controller Canonical Form

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & -a_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad ; \quad y = [b_1 \ b_2 \ b_3] x$$



מימוש בלוקים:

הערה: אם נחליף כניסה ביציאה, מסכם למפצל ונהפוך את כיוון החיצים – נקבל מימוש אובזרוור.

מטריצת הקונטרולוביליות עבור מימוש קונטרולר:

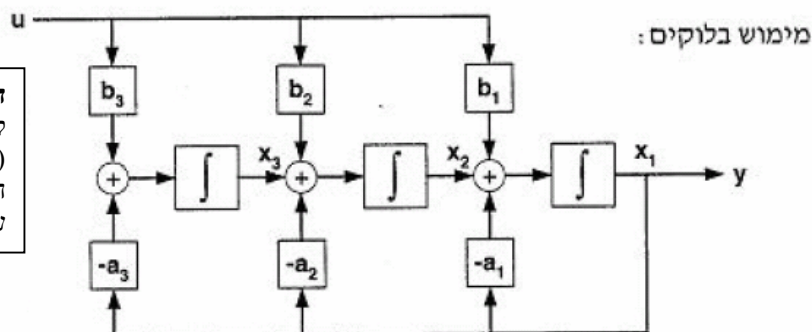
$$C = \begin{bmatrix} 1 & a_1 & a_2 \\ 0 & 1 & a_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

- מימוש קונטרולר תמיד קונטרולובילי.
- המערכת קונטרולובילית אמ"מ ניתן להביאה ע"י טרנספורמציה דמיון לצורת קונטרולר.

Observer Canonical Form

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -a_1 & 1 & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 \\ -a_3 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} u \quad ; \quad y = [1 \ 0 \ 0]x$$

הערה: כל פונק' תמסורת ניתן למימוש בעזרת אובזרוור (אפילו אם יש בה צמצומים) ואז היא אובזרוובילית. באותו אופן עבור קונטרולר.



מטריצת האובזרווביליות עבור מימוש אובזרוור: $O = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_1 & 1 & 0 \\ a_2 & a_1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$

- מימוש אובזרוור תמיד אובזרוובילי.
- המערכת אובזרוובילית אמ"מ ניתן להביאה ע"י טרנספורמציית דמיון לצורת אובזרוור.

הערה:

$$A_o = A_c^T \quad ; \quad B_o = C_c^T \quad ; \quad C_o = B_c^T$$

מימוש אלכסוני

המימוש לא תמיד קיים!!! כאשר הוא קיים:

$$A_d = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} \quad ; \quad B_d = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}$$

$$C_d = [\gamma_1 \ \dots \ \dots \ \gamma_n] \quad ; \quad H(s) = \sum_{k=1}^n \frac{\beta_k \gamma_k}{s - \lambda_k} = \sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k}{s - \lambda_k}$$

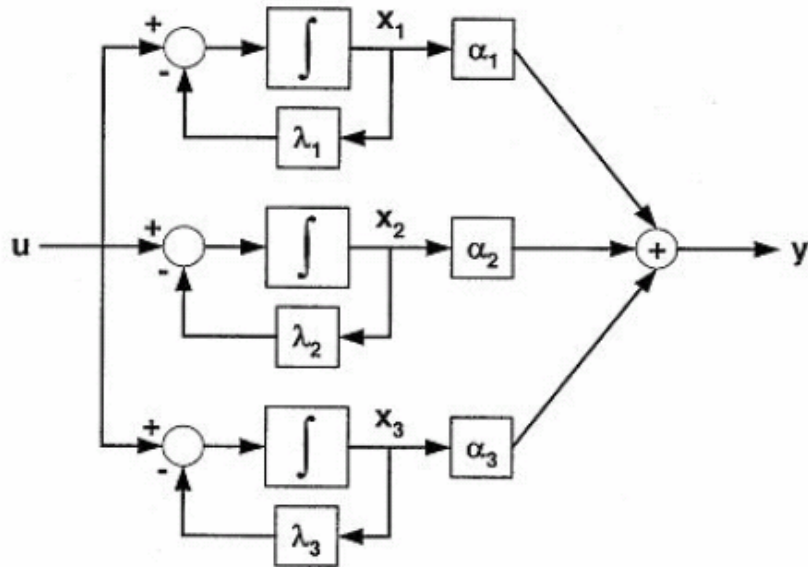
- כלומר α_k הוא מקדם הפירוק לשברים חלקיים של λ_k .
- המערכת מינימלית אמ"מ $\alpha_k \neq 0 \quad \forall k$.
- מטריצת הקונטרולאביליות:

$$C_d = \begin{bmatrix} \beta_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \beta_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \dots & \lambda_1^{n-1} \\ \vdots & \lambda_2 & \dots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

- המערכת קונטרולאבילית אמ"מ כל ה- λ_k שונים זה מזה (אין ריבוי) $\beta_k \neq 0 \quad \forall k$.
- מטריצת האובזרוואביליות:

$$O_d = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \gamma_n \end{bmatrix}$$

- המערכת אובזרוואבילית אמ"מ כל ה- λ_k שונים זה מזה (אין ריבוי) $\gamma_k \neq 0 \quad \forall k$.



שימושים במטריצות האובזרווביליות והקונטרולביליות:

$$\begin{bmatrix} u[n-1] \\ \vdots \\ u[0] \end{bmatrix} = C^{-1} [x[n] - A^n x[0]]$$

$$x[0] = O^{-1} \left[\begin{bmatrix} y[0] \\ \vdots \\ y[n-1] \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u[0] \\ \vdots \\ u[n-1] \end{bmatrix} \right]$$

מימושים קנוניים וטרנספורמציות דמיון.

מוטיבציה

- נתונה מערכת משוואות מצב.
נרצה מערכת חדשה בעלת התנהגות זהה לזו של המערכת הנתונה.
נרצה לעבור למערכת בעלת:
- ייצוג "פשוט" יותר.
 - משתני מצב עם תכונות מעניינות.
 - ייצוג סטנדרטי.

$$\bar{x} = T^{-1}x \quad ; \quad x = T\bar{x}$$

הטרנספורמציה

$T_{n \times n}$ מטריצה לא סינגולרית

$$\bar{A} = T^{-1}AT \quad ; \quad \bar{B} = T^{-1}B$$

$$\bar{C} = CT \quad ; \quad \bar{D} = D$$

תכונות מערכות דומות

- אותם ערכים עצמיים
- אותה פונקציית תמסורת
- אותה תכונת קונטרולאביליות ובפרט:
 $\bar{C} = T^{-1}C \quad ; \quad C = [B \quad AB \quad \dots \quad A^{n-1}B]$
- אותה תכונת אובזרוואביליות ובפרט:

$$\bar{O} = OT \quad ; \quad O = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

$$T_{1 \rightarrow 2} = C_{old}^{-1} \cdot C_{new}$$

שים לב!

בקרה ע"י משוב מצב

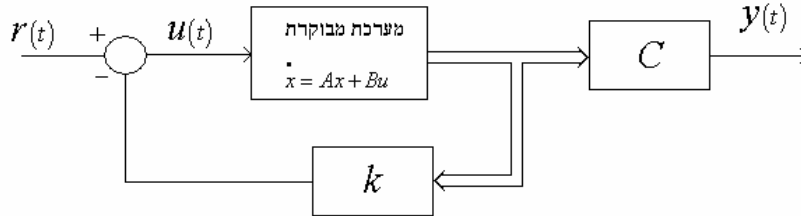
$$\dot{x} = Ax + Bu$$

נתונה מערכת:

$$y = Cx$$

נרצה לבנות בקר מהצורה $u(t) = r(t) - kx(t)$ שיעמוד בדרישות הנתונות.

המערכת עם המשוב נראית כך:



נניח ראשית כי המערכת נתונה בצורת קונטרולר (A_c, B_c, C_c) וכי $r(t) = 0$ (בעיית רגולציה). אזי $u = -k_c x$.

$$\dot{x} = (A_c - B_c k_c) x$$

החוג הסגור במקרה זה הינו:

אם החוג הסגור הרצוי הוא $\alpha(s) = s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \dots + \alpha_n$, אז נדרוש כי הפ"א של $A_c - B_c k_c$ יהיה $\alpha(s)$.

מקדמי הפ"א של $A_c - B_c k_c$ הינם $a_i + k_{ci}$ (עבור החזקה s^{n-i}) ולכן נדרוש: $k_{ci} = \alpha_i - a_i$.

$$\underline{a} = [a_1 \dots a_n], \quad \underline{\alpha} = [\alpha_1 \dots \alpha_n]$$

לכן, אם נסמן:

$$k = [k_{c1} \dots k_{cn}] = \underline{\alpha} - \underline{a}$$

נקבל:

עבור מקרה קונטרולר כללי, יידוע כי $x = CC_c^{-1} x_c$, כאשר C_c הינה מטריצת הקונט' של A, B .

$$u = -k_c x_c = -k_c C_c C^{-1} x = -kx$$

$$\underline{k} = (\underline{\alpha} - \underline{a}) C_c C^{-1}$$

לכן, במקרה הכללי נקבל את הנוסחא:

דרך נוספת – השוואת מקדמים

$$\alpha(s) = s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \dots + \alpha_n$$

פ"א רצוי:

$$a_c(s) = \det(sI - A + Bk)$$

פ"א מצוי בחוג הסגור: (מכנה פונק' התמסורת בחוג הסגור)

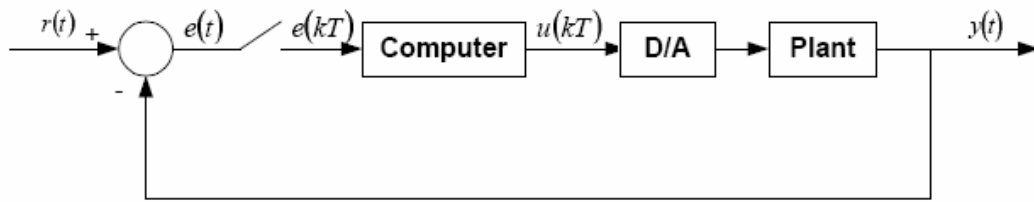
את \underline{k} נוכל לחלץ מתוך $\alpha(s) = s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \dots + \alpha_n = \det(sI - A + Bk) = a_c(s)$ ע"י השוואת המקדמים.

הערות

- אם המערכת קונט', אזי ניתן למקם את קטבי המערכת כרצוננו.
- משוב מצב אינו משפיע על אפסי החוג (אלא ע"י צמצום).

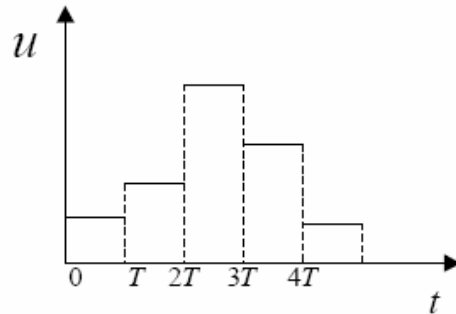
דיסקרטיזציה

נתונה מערכת:



- $r(t)$ – כניסת ייחוס
- $y(t)$ – תפוקת המערכת
- $e(t)$ – אות השגיאה הנדגם במרווח דגימה T
- $e(kT)$ – אות השגיאה הדגום
- $u(kT)$ – אות הבקרה היוצא מבקר ספרתי

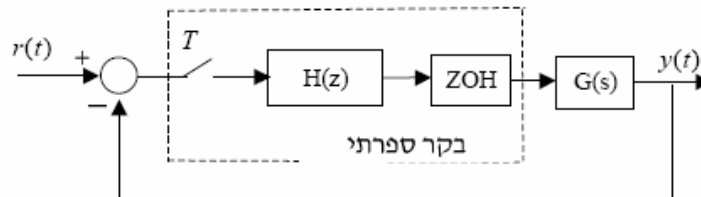
ממיר D/A מעביר את אות הבקרה הדגום לאות הבקרה הרציף. הממיר הנפוץ ביותר הוא ZOH (Zero Order Hold):



תכנ בקר ספרתי

- תכנ בזמן בדיד
- תכנ מקורב בזמן רציף

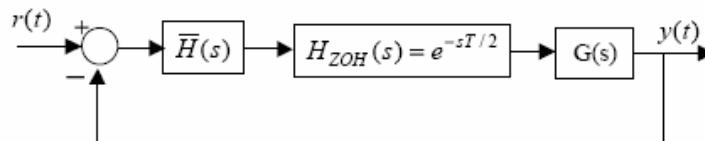
במקרה זה היציאה נתונה בזמן רציף והבקר בזמן בדיד:



מערכת הדגימה וה-ZOH מכניסה השהייה של $e^{-sT/2}$. לכן ניתן לקרב אותה על ידי:

$$H_{ZOH}(s) = \frac{1}{1 + sT/2}$$

שיטת התכנון תהיה לתכנן בקר בזמן רציף $\bar{H}(s)$ תוך קירוב רציף של המערכת אותה צריך לבקר על ידי תוספת של $H_{ZOH}(s)$:



ואחייב מעבר מהבקר בזמן רציף לבקר בזמן בדיד על ידי קירוב אויילר:

$$s \rightarrow \frac{1-z^{-1}}{T}$$

או על ידי קירוב טרפזי:

$$s \rightarrow \frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$$

בדיקת יציבות של מערכת בזמן בדיד:

נשתמש בהתמרה: $z = \frac{1+s}{1-s}$

שמתמירה את מעגל היחידה לחצי המישור השמאלי במישור s , ונבדוק יציבות לפי R.H. עבור פונקציית התמסורת.

שקול דיסקרטי של מערכת רציפה

השקול הדיסקרטי $\bar{G}(z)$ של מערכת רציפה $G(s)$ במרווח הדגימה T הוא התמסורת הבדידה של המערכת:



חישוב $\bar{G}(z)$:

- המערכת מתוארת על ידי פונקציית התמסורת $G(s)$. אזי $\bar{G}(z) = (1-z^{-1})Z \left\{ \frac{G(s)}{s} \right\} = (1-z^{-1})Z \left\{ L^{-1} \left\{ \frac{G(s)}{s} \right\}_{t=kT} \right\}$

- המערכת מתוארת על ידי משוואות מצב: $\dot{x} = Ax + Bu$
 $y = Cx + Du$

אזי בזמן בדיד נקבל:

$$\bar{A} = e^{AT}$$

$$\bar{B} = \int_0^T e^{A\tau} B d\tau$$

$$\bar{C} = C$$

$$\bar{D} = D$$

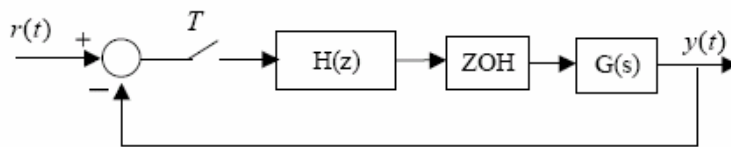
$$\bar{G}(z) = \bar{C}(zI - \bar{A})^{-1}\bar{B} + \bar{D}$$

ביצוע תכן - שתי גישות

מעבר לזמן רציף:

ה- ZOH נותן השהייה של בערך $\frac{T}{2}$:
 $ZOH \approx e^{-\frac{sT}{2}} \approx \frac{1}{1 + \frac{sT}{2}}$
 קרוב נוסף לפי טיילור

באופן כללי:



כאשר: $\tilde{G}(s) = G \frac{1}{1 + \frac{sT}{2}}$ \Leftrightarrow $\tilde{G}(s)$ - כאן נבצע המרה של

כעת נבצע תכן בזמן רציף של $H(s)$ עבור $\tilde{G}(s)$.

שתי המרות אפשריות של s (גזור): $s \rightarrow \frac{1-z^{-1}}{T}$; $s \rightarrow \frac{2}{T} \frac{1-Z^{-1}}{1+Z^{-1}}$

הערה: בזמן רציף העדפנו קטבים דומיננטיים כמה שיותר שמאלה וכמה שיותר קרובים לציר x . באופן דומה, בזמן בדיד, נעדיף קטבים כמה שיותר קרובים לראשית (בתוך מעגל היחידה).

TABLE 8.1

Laplace Transforms and z-transforms of Simple Discrete Time Functions

$F(s)$ is the Laplace transform of $f(t)$, and $F(z)$ is the z-transform of $f(kT)$. Note: $f(t) = 0$ for $t = 0$.

Number	$\mathcal{F}(s)$	$f(kT)$	$F(z)$
1		$1, k = 0; 0, k \neq 0$	1
2		$1, k = k_0; 0, k \neq k_0$	z^{-k_0}
3	$\frac{1}{s}$	$1(kT)$	$\frac{z}{z-1}$
4	$\frac{1}{s^2}$	kT	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
5	$\frac{1}{s^3}$	$\frac{1}{2!}(kT)^2$	$\frac{T^2}{2} \left[\frac{z(z+1)}{(z-1)^3} \right]$
6	$\frac{1}{s^4}$	$\frac{1}{3!}(kT)^3$	$\frac{T^3}{6} \left[\frac{z(z^2+4z+1)}{(z-1)^4} \right]$
7	$\frac{1}{s^m}$	$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!} \left(\frac{\partial^{m-1}}{\partial a^{m-1}} e^{-akT} \right)$	$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!} \left(\frac{\partial^{m-1}}{\partial a^{m-1}} \frac{z}{z - e^{-aT}} \right)$
8	$\frac{1}{s+a}$	e^{-akT}	$\frac{z}{z - e^{-aT}}$
9	$\frac{1}{(s+a)^2}$	kTe^{-akT}	$\frac{Tze^{-aT}}{(z - e^{-aT})^2}$
10	$\frac{1}{(s+a)^3}$	$\frac{1}{2}(kT)^2 e^{-akT}$	$\frac{T^2}{2} e^{-aT} z \frac{(z + e^{-aT})}{(z - e^{-aT})^3}$
11	$\frac{1}{(s+a)^m}$	$\frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!} \left(\frac{\partial^{m-1}}{\partial a^{m-1}} e^{-akT} \right)$	$\frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!} \left(\frac{\partial^{m-1}}{\partial a^{m-1}} \frac{z}{z - e^{-aT}} \right)$
12	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1 - e^{-akT}$	$\frac{z(1 - e^{-aT})}{(z-1)(z - e^{-aT})}$
13	$\frac{a}{s^2(s+a)}$	$\frac{1}{a}(akT - 1 + e^{-akT})$	$\frac{z[(aT - 1 + e^{-aT})z + (1 - e^{-aT} - aTe^{-aT})]}{a(z-1)^2(z - e^{-aT})}$
14	$\frac{b-a}{(s+a)(s+b)}$	$e^{-akT} - e^{-bkT}$	$\frac{(e^{-aT} - e^{-bT})z}{(z - e^{-aT})(z - e^{-bT})}$
15	$\frac{s}{(s+a)^2}$	$(1 - akT)e^{-akT}$	$\frac{z[z - e^{-aT}(1 + aT)]}{(z - e^{-aT})^2}$
16	$\frac{a^2}{s(s+a)^2}$	$1 - e^{-akT}(1 + akT)$	$\frac{z[z(1 - e^{-aT} - aTe^{-aT}) + e^{-2aT} - e^{-aT} + aTe^{-aT}]}{(z-1)(z - e^{-aT})^2}$
17	$\frac{(b-a)s}{(s+a)(s+b)}$	$be^{-bkT} - ae^{-akT}$	$\frac{z[z(b-a) - (be^{-aT} - ae^{-bT})]}{(z - e^{-aT})(z - e^{-bT})}$
18	$\frac{a}{s^2 + a^2}$	$\sin akT$	$\frac{z \sin aT}{z^2 - (2 \cos aT)z + 1}$
19	$\frac{s}{s^2 + a^2}$	$\cos akT$	$\frac{z(z - \cos aT)}{z^2 - (2 \cos aT)z + 1}$
20	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + b^2}$	$e^{-akT} \cos bkT$	$\frac{z(z - e^{-aT} \cos bT)}{z^2 - 2e^{-aT}(\cos bT)z + e^{-2aT}}$
21	$\frac{b}{(s+a)^2 + b^2}$	$e^{-akT} \sin bkT$	$\frac{ze^{-aT} \sin bT}{z^2 - 2e^{-aT}(\cos bT)z + e^{-2aT}}$
22	$\frac{a^2 + b^2}{s[(s+a)^2 + b^2]}$	$1 - e^{-akT} \left(\cos bkT + \frac{a}{b} \sin bkT \right)$	$\frac{z(Az + B)}{(z-1)[z^2 - 2e^{-aT}(\cos bT)z + e^{-2aT}]}$ $A = 1 - e^{-aT} \cos bT - \frac{a}{b} e^{-aT} \sin bT$ $B = e^{-2aT} + \frac{a}{b} e^{-aT} \sin bT - e^{-aT} \cos bT$