משוואות מקסוול:

$$\nabla\cdot\vec B=0 \qquad \nabla\times\vec E+\frac{1}{c}\frac{\partial\vec B}{\partial t}=0$$
$$\nabla\cdot\vec E=4\pi\rho \qquad \nabla\times\vec B-\frac1c\frac{\partial\vec E}{\partial t}=\frac{4\pi}{c}\vec J$$

משוואת הרציפות: מתקבלת ממשוואות מקסוול:

$$\frac{4\pi\nabla\cdot\vec J}{c}=\nabla\cdot(\nabla\times\vec B-\frac1c\frac{\partial\vec E}{\partial t})=-\frac1c\frac{\partial\nabla\cdot\vec E}{\partial t}=-\frac1c\frac{\partial 4\pi\rho}{\partial t}$$
$$\nabla\cdot\vec J+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0$$

משוואות מקסוול בכתיב 4 ווקטורי :

ההומוגניות: $\partial_\nu F^{\mu\nu}=\frac{4\pi}{C}J^\mu$

האי הומוגניות $\partial_\sigma F_{\mu\nu}+\partial_\mu F_{\nu\sigma}+\partial_\nu F_{\sigma\mu}=0$

משוואת הרציפות $\partial_\mu J^\mu=0$

פוטנציאלים וקטוריים:

$$\vec E=-\nabla\Phi-\frac1c\frac{\partial\vec A}{\partial t}\qquad \vec B=\nabla\times\vec A$$

האילוצים ממשוואות מקסוול:

$$\nabla(\nabla\cdot\vec A)-\nabla^2\vec A+\frac1c\nabla(\frac{\partial\Phi}{\partial t})+\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec A}{\partial t^2}=\frac{4\pi\vec J}{c}$$
$$-\nabla^2\Phi-\frac1c\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\cdot\vec A)=4\pi\rho$$

חופש הכיול: $\boxed{\Phi'=\Phi-\frac1c\frac{\partial\Lambda}{\partial t},\vec A'=\vec A+\nabla\Lambda}$

כך ש $\nabla^2\Lambda-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Lambda=-\nabla\cdot\vec A-\frac1c\frac{\partial\Phi}{\partial t}$.

כיולים לדוגמא: **כיול לורנץ**: $\nabla\cdot\vec A+\frac1c\frac{\partial\Phi}{\partial t}=0$:

$$\nabla^2\Phi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}=-4\pi\rho,\nabla^2\vec A-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec A}{\partial t^2}=-\frac{4\pi\vec J}{c}$$

וקיבלנו משוואות גלים. בכתיב 4-וקטורי: $\partial_\mu A^\mu=0$

כיול קולון: $\nabla\cdot\vec A=0$:

$$\nabla^2\Phi=-4\pi\rho\to\Phi(\vec x,t)=\int\frac{\rho(\vec x',t)d^3x'}{|\vec x-\vec x'|}$$
$$\nabla^2\vec A-\frac1{c^2}\frac{\partial^2\vec A}{\partial t^2}=\Box\vec A=\frac{4\pi\vec J}{c}+\frac1c\nabla(\frac{\partial\Phi}{\partial t})$$

טרנספורמציית לורנץ: משוואות מקסוול לא אינווריאנטיות תחת טרנס' גליליי,אלא תחת טרנס' לורנץ, בממד אחד:

$$\boxed{\begin{matrix}x'=\gamma(x-vt)\\ t'=\gamma(t-\frac{vx}{c^2})\end{matrix}}\ \boxed{\begin{matrix}x=\gamma(x'+vt)\\ t'=\gamma(t+\frac{vx}{c^2})\end{matrix}},\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}},\beta=\frac vc$$

במרחב ה4 מימדי (x,y,z,it):

$$\boxed{\begin{matrix}\vec x'=\vec x+\vec v(\frac{\vec x\cdot\vec v}{\vec v^2}(\gamma-1)-\gamma t)\\ ct'=\gamma(ct-\frac{\vec x\cdot\vec v}{c})\end{matrix}}\ \boxed{\begin{matrix}\vec x'=\vec x+\vec v(\frac{\vec x\cdot\vec v}{\vec v^2}(\gamma-1)+\gamma t)\\ ct'=\gamma(ct+\frac{\vec x\cdot\vec v}{c})\end{matrix}}$$

חיבור מהירויות : $\boxed{\vec v_{1,2}=\frac{\vec v_1+\vec v_2}{1+\frac{\vec v_1\cdot\vec v_2}{c^2}}}$

בצורה מטריצית: A מט' הטרנס',כך ש $\vec x'=A\vec x$, $AA^t=I$.

לדוגמא: $\vec v=v\hat z$,אזי

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&\gamma&i\beta\gamma\\0&0&-i\beta\gamma&\gamma\end{pmatrix}$$

מטריקה: $g_{\alpha\beta}=g^{\alpha\beta},g_{\alpha\gamma}g^{\gamma\beta}=\delta_\alpha^{\ \beta}$

$$x^\alpha=g^{\alpha\beta}x_\beta,x_\alpha=g_{\alpha\beta}x^\beta,F_{\mu\nu}=g_{\nu\beta}F_\mu^{\ \beta},F^{\mu\nu}=g^{\nu\beta}F^\mu_{\ \beta}$$

טנזורים:מדרגה 1: קונטרה וראיאנטי עובר טרנס' מהצורה:

$$A'^\mu=\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}A^\nu=\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^0}A^0+\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^1}A^1+\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^2}A^2+\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^3}A^3$$

קו וריאנטי :

$$A'_\mu=\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}A_\nu=\frac{\partial x^0}{\partial x'^\mu}A_0+\frac{\partial x^1}{\partial x'^\mu}A_1+\frac{\partial x^2}{\partial x'^\mu}A_2+\frac{\partial x^3}{\partial x'^\mu}A_3$$

משפט הלמהולץ: כל וקטור (בהנחות מסויימות) נקבע באופן יחיד ע"י $\nabla\cdot,\nabla\times$.מכאן נובע כי כל וקטור ניתן לרישום כחלק רוחבי ואורכי:

$\vec V=\vec V_T+\vec V_L$ כך ש: $\nabla\cdot\vec V_T=0\to\vec V_T=\nabla\times\vec a$, $\nabla\times\vec V_L=0\to\vec V_L=\nabla\cdot\vec a$.

עבור פוטנציאלים: $\vec V_L=\nabla\Phi\to\nabla\cdot\vec V_L=\nabla^2\cdot\Phi$

$$\vec V_T=\nabla\times\vec A\to\nabla\times\vec V_T=\nabla\times\nabla\times\vec A=\nabla(\nabla\cdot\vec A)-\nabla^2\vec A=\nabla(0)-\nabla^2\vec A=-\nabla^2\vec A$$

ולכן:

$$\nabla\cdot\vec V=\nabla\cdot\vec V_L+\nabla\cdot\vec V_T=\nabla\cdot\vec V_L+0=\nabla^2\cdot\Phi$$
$$\nabla\times\vec V=\nabla\times\vec V_T+\nabla\times\vec V_L=\nabla\times\vec V_T+0=-\nabla^2\vec A$$

כלומר,ניתן למצוא את $\Phi,\vec A$ בעזרת $\nabla\cdot\vec V,\nabla\times\vec V$ בלבד.

מכאן,כל וקטור ניתן לרישום כ: $\vec V=\vec V_T+\vec V_L=\nabla\times\vec A+\nabla\cdot\Phi$.

הסיבות לשמות אורכי ורוחבי: כל וקטור ניתן לפיתוח לטור פורייה.

$$\vec V(\vec x)=\int\vec V_k e^{i\vec k\cdot\vec x}d^3k\to\vec\nabla\times\vec V(\vec x)=\int i\vec K\times\vec V_k e^{i\vec k\cdot\vec x}d^3k,$$

ולכן $\vec V_T$ ניצב לכיוון התנועה. $\vec\nabla(\vec V(\vec x))=i\int|\vec K|\cdot\vec V_k e^{i\vec k\cdot\vec x}d^3k$

לכן $\vec V_L$ מקביל לכיוון התנועה.

אנרגייה,משפט פויינטינג וחוקי שימור:

אנרגייה בת"ל בזמן: $U=\frac1{8\pi}\int(\vec E^2+\vec B^2)dV$. נראה כי השוויון נכון גם עבור $\vec E,\vec B$ תלויים בזמן. משוואות מקסוול:

$$\begin{cases}\nabla\times\vec E=-\frac1c\frac{\partial\vec B}{\partial t},/\cdot\vec B\\ \nabla\times\vec B-\frac1c\frac{\partial\vec E}{\partial t}=\frac{4\pi}{c}\vec J,/\cdot\vec E\end{cases}$$

נכפיל ונסכום:

$$\frac1{2c}(\frac{\partial\vec E^2}{\partial t}+\frac{\partial\vec B^2}{\partial t})=-\vec B\cdot\nabla\times\vec E+\vec E\cdot\nabla\times\vec B-\frac{4\pi}{c}\vec E\cdot\vec J$$
$$\frac1{2c}\frac{\partial}{\partial t}(\vec E^2+\vec B^2)=-\frac{4\pi}{c}\vec E\cdot\vec J-\nabla\cdot(\vec E\times\vec B)$$

וקטור פויינטינג: $\vec S=\frac{c}{4\pi}(\vec E\times\vec B)$ ואז: $\frac1{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}(\vec E^2+\vec B^2)=-\vec E\cdot\vec J-\nabla\cdot\vec S$

נגדיר,צפיפות אנרגייה א"מ $u=\frac1{8\pi}(\vec E^2+\vec B^2)$ ואז: $\frac{\partial u}{\partial t}+\nabla\cdot\vec S=-\vec E\cdot\vec J$

זו הצורה הדיפרנציאלית של משפט פויינטינג.הצורה האינטגרלית:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int ud^3x+\int\nabla\cdot\vec Sd^3x=-\int\vec E\cdot\vec Jd^3x\to\frac{\partial}{\partial t}U_{em}+\int_{\partial v}\vec S\cdot d\sigma=-\int\vec E\cdot\vec Jd^3x$$

(כזכור: $\vec J(\vec x,t)=\sum_n q_n\vec V_n\delta(\vec x-\vec x_n'(t)),\rho(\vec x,t)=\sum_n q_n\delta(\vec x-\vec x_n'(t))$)

$$=-\sum_n q_n\vec E(\vec x_n,T))\cdot\vec V_n=-\sum_n q_n\vec E(\vec x_n,T))\cdot\vec V_n=-\sum_n q_n(\vec E+\frac{\vec V_n}{c}\times\vec B_n)\cdot\vec V_n$$

(כי $\frac{\vec V_n}{c}\times\vec B_n\perp\vec V_n$). נמשיך: $-\sum_n q_n\vec E(\vec x_n,T))\cdot\vec V_n=\sum_n\vec F\cdot\vec V_n=\dot{\vec W}=$ הספק

ובסה"כ,חוק השימור: $\frac{\partial}{\partial t}\int\frac{(\vec E^2+\vec B^2)}{8\pi}d^3x+\int_{\partial v}\vec S\cdot d\sigma+\sum_n\vec F\cdot\vec V_n=0$

טרנספורמציית שדות:

$F_{\mu\nu}$ עובר טרנס' מהצורה: $F_{\mu\nu}'=AF_{\mu\nu}A^t$,A היא מט'טרנס' לורנץ.טרנס' השדות:

$$\vec E'=\gamma(\vec E+\vec v\times\vec B)-(\frac{\gamma-1}{\vec v^2})(\vec E\cdot\vec v)\vec v$$
$$\vec B'=\gamma(\vec B-\frac{\vec v\times\vec E}{c^2})-(\frac{\gamma-1}{\vec v^2})(\vec B\cdot\vec v)\vec v$$

הגדלים האינווריאנטיים:

$$F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}=F_{\mu\nu}(F^t)^{\nu\mu}=tr(FF^t)=2(\vec B^2-\vec E^2)$$
$$F_{\mu\nu}F^{*\mu\nu}=F_{\mu\nu}(F^{*t})^{\nu\mu}=tr(FF^{*t})=-4i(\vec E\cdot\vec B)$$

ניתן לחפש גדלים נשמרים נוספים בפ"א של F (אין עוד...)

עבור $|\vec E|>|\vec B|$,זהו מצב דמוי E,ולכן ניתן למצוא מערכת לורנץ שעבורה B=0 (נעה ב $\vec u=\frac{c}{\vec E^2}\vec E\times\vec B$),אך לא E=0.

עבור $|\vec B|>|\vec E|$,באותו אופן,E=0 ב $\vec u=\frac{c}{\vec B^2}\vec E\times\vec B$ אם.

$|\vec B|=|\vec E|$, זהו מצב דמוי אור והם שווים בכל מערכת.

$\vec E,\vec B$ עוברים טרנס' מהצורה $F_{\mu\nu}'=A_{\mu\sigma}F^{\sigma\rho}A^t_{\rho\nu}$. לדוגמא:

$$B_1'=F_{23}'=A_{2\sigma}F^{\sigma\rho}A^t_{3\rho}=A_{22}F^{23}A^t_{33}+A_{22}F^{23}A^t_{34}$$

טנזורים:מדרגה 2: קונטרה וראיאנטי עובר טרנס' מהצורה:

$F'^{\mu\nu}=\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha}\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta}F^{\alpha\beta}$ קוואריאנטי : $F_{\mu\nu}=\frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\nu}F'_{\alpha\beta}$

מעורב: $F'^\mu_{\ \nu}=\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha}\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu}F'^\alpha_{\ \beta}$

פונקציית גרין

עבור הדלמברטיאן: $\Box=\nabla^2-\frac1{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$

הלוגיקה: נבצע טרנספורם פורייה על כל חלקי המשוואה. נפתור אותה במרחב פורייה,ובעזרת הטרנס' ההופכי נקבל את G .

פונ' גרין מקיימת: $\Box G(\vec x,\vec x',t,t')=-4\delta^3(\vec x')\delta(t')$

טרנס' פורייה: $\boxed{G(\omega,t)=\int g(\vec x,t)e^{i(\vec k\cdot\vec r-\omega t)}d^3rdt}$

האופרטורים במרחב פורייה: $\partial_t\to\cdot i\omega,\nabla\to\cdot(-ik)$

נציב בטרנספורם פורייה את פונ' דלתא:

$$\delta^3(\vec x')\delta(t')\to\frac1{(2\pi)^4}\int\delta^3(\vec x-\vec x')\delta(t')e^{i(\vec k\cdot\vec x-\omega t)}d^3xdt=\frac{e^{i(\vec k\cdot\vec x')}}{(2\pi)^4}$$

כאן $\vec x'=0$,ולכן $\delta^3(\vec x')\delta(t')\to\frac{1}{(2\pi)^4}$ נציב ונקבל:

$$\Box\tilde G(\vec k,w)=(\frac{\omega^2}{c^2}-k^2)\tilde G(\vec k,w)=\frac{-4\pi}{(2\pi)^4}\to\tilde G(\vec k,w)=\frac{-c^2}{(\omega^2-c^2k^2)4\pi^3}$$

והטרנספורם ההפוך:

$$G(\vec x,t)=\frac{-c^2}{4\pi^3}\int\frac{e^{i(\vec k\cdot\vec x-\omega t)}}{(\omega^2-c^2|k|^2)}d^3rdt=\frac{\delta(\vec x/c-t)}{|\vec x|}$$

משוואת הלמהולץ

נסתכל על המשוואה $(\Box-\frac1{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2})\phi(\vec x,t)=-4\pi\rho(\vec x,t)$. נציב

בטרנספורם פורייה לפי הזמן: $f(\vec x,t)=\frac1{2\pi}\int\tilde f(\vec x,w)e^{-i\omega t}d\omega$.

המשוואה במרחב פורייה: $(\Box-\frac{\omega^2}{c^2})\tilde\phi(\vec x,t)=-4\pi\tilde\rho(\vec x,t)$.

בפרט עבור פונ' גרין(נסמן $\frac{\omega^2}{c^2}=k^2$, $r=|\vec x-\vec x'|$):

$$(\Box-k^2)\tilde G(\vec x-\vec x',\omega)=-4\pi\delta(\vec x-\vec x',t)$$

אז $\frac1r\frac{d^2}{dr^2}(r\cdot\tilde G)+k^2\tilde G=-4\pi\delta(\vec r,t)$.נגדיר $u(\vec r)=r\tilde G$.

$u(\vec r)=Ae^{ikr}+Be^{-ikr}\to\tilde G=A\frac{e^{ikr}}{r}+B\frac{e^{-ikr}}{r}$.מרציפות ב0,

$A+B=1$.נבחר A=1,B=0 ואז $\tilde G=\frac{e^{ikr}}{r}$. בעזרת הטרנס'ההפוך:

$$G(\vec x,t)=\frac1{2\pi}\int e^{-i\omega t}\frac{e^{ikr}}{r}d\omega=\frac1{2\pi r}\int e^{ikr-\omega t}d\omega$$
$$=\frac1{2\pi r}\int e^{(i\omega r/C)-\omega t}d\omega=\frac{\delta(r/c-t)}{r}$$

פונ' גרין הכללית לדלמברטיאן:

$$\boxed{G(\vec x,\vec x',t,t')=\frac{\delta\left(t-\left(t'+\frac{|\vec x-\vec x'|}{x}\right)\right)}{|\vec x-\vec x'|}}$$

חוק שימור התנע בשדה א"מ:

צפיפות תנע א"מ: $\frac{\vec S}{c^2}=\vec g$ צפיפות תנ"ז א"מ: $\vec r\times\frac{\vec S}{c^2}=\vec g$

עבודה מכנית: $-\int\vec E\cdot\vec Jd^3x$

חוק שימור התנע: $\vec F=\frac{\partial\vec P_{mech}}{\partial t}=\rho\vec E+\frac1c\vec J\times\vec B$

ממש'מקסוול: $\nabla\times\vec B-\frac1c\frac{\partial\vec E}{\partial t}=\frac{4\pi}{c}\vec J\to\vec J=\frac{c}{4\pi}(\nabla\times\vec B-\frac1c\frac{\partial\vec E}{\partial t})$

וכן $\rho=\frac1{4\pi}\nabla\cdot\vec E$ ולכן $\vec F=\frac1{4\pi}(\nabla\cdot\vec E)\vec E+\frac1{4\pi}(\nabla\times\vec B-\frac1c\frac{\partial\vec E}{\partial t})\times\vec B$

לשם סימטרייה בין $\vec E$ ל $\vec B$.נוסיף רכיבים שמתאפסים, ונקבל:

$$\vec F=\frac1{4\pi}[\vec E(\nabla\cdot\vec E)+\vec B(\nabla\cdot\vec B)+(\nabla\times\vec B-\frac1c\frac{\partial\vec E}{\partial t})\times\vec B+(\nabla\times\vec E-\frac1c\frac{\partial\vec B}{\partial t})\times\vec E]$$

ולאחר פיתוח:

$$F_i=\frac{d}{dt}(\vec P_{mech}+\vec P_{elec})_i=\frac{d}{dt}(\vec P_{mech}+\int_A T_{ij}dA_j)_i=\int_V\partial_jT_{ij}dV$$

T_{ij} הוא טנזור מקסוול: $\boxed{T_{ij}=E_iE_j+B_iB_j-\frac12\delta_{ij}(\vec E^2+\vec B^2)}$

המשמעות:אם מחוץ לנפח מסויים השדות הא"מ שווים 0, התנע נשמר.

מרחב מינקובסקי-פורמליזם 4 וקטורי $x^\mu = (\vec{x}, ict), x_\mu = (\vec{x}, -ict)$

אינטרוול: $(ds)^2 = x^\mu x_\mu = (d\vec{x})^2 - c^2 (dt)^2$ **עם המטריקה** $g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ (בקוא' קרטזיות)

עבור $(ds)^2 < 0$ נאמר כי ds הוא time-like, אזי עבור שני אירועים שהמרחק ביניהם הוא ds ישנה מערכת לורנץ בה הם מתרחשים באותו מקום, אך לא בו זמנית (יש קשר נסיבתי).

עבור $(ds)^2 > 0$ נאמר כי ds הוא Space-like, אזי עבור שני אירועים שהמרחק ביניהם הוא ds ישנה מערכת לורנץ בה הם מתרחשים בו זמנית, אך לא באותו מקום (אין קשר נסיבתי).

עבור ds=0 התנועה היא על פני קרני האור.

אופרטורים:

גרדיאנט $\partial^\mu = \vec{\nabla}$. **דיברגנץ** $\partial_\mu = \vec{\nabla}\cdot$. **דלמברטיאן** $\square = \partial_\mu \partial^\mu$, $\left(V^\mu V_\mu = \gamma_u^2(\vec{u}^2 - c^2) = -c^2\right)$

גזירה: $d\tau = \frac{i}{c} ds = dt\sqrt{1 - \left(\frac{d\vec{x}}{dt}\right)^2 / c^2} = \frac{dt}{\gamma_u}$ **וקטור מהירות:** $V^\mu = \frac{d\vec{x}^\mu}{d\tau} = \gamma_u \left(\frac{d\vec{x}^\mu}{dt}, ic\right) = \gamma_u(\vec{u}, ic)$

באותו אופן נגדיר מסה אפקטיבית ע"י $m = \gamma_u m_0$, כך ש:

וקטור התנע-אנרגייה $P^\mu = (\vec{P}, E), P_\mu = (-\vec{P}, E)$ כלומר $P^\mu = m v^\mu = \gamma_u (m_0 \vec{u}, i m_0 c) = (m\vec{u}, E)$.

אנרגייה קינטית יחסותית: $E = \gamma m_0 c^2 - m_0 c^2$.

עבודה: $d\vec{s} = \vec{u}dt, \frac{dW}{dt} = \vec{F}\cdot\vec{u} = \frac{d}{dt}(\gamma_u m_0 c^2)$

$$W = \int \vec{F}\cdot d\vec{s} = \int \vec{F}\cdot\vec{u}dt = \int m\frac{d\vec{u}}{dt}\cdot\vec{u}dt = \int \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\cdot\vec{u}^2\right)dt = \frac{1}{2}m\cdot\vec{u}^2\Big|$$

זרם 4-מימדי: $J^\mu = (\vec{J}, ic\rho)$. בהתאם לכך, משוואת שימור הזרם: $\partial_\mu J^\mu = \vec{\nabla}\cdot\vec{J} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$.

פוטנציאל: $A^\mu = (\vec{A}, ic\Phi)$. לפיכך תנאי לורנץ: $\partial_\mu A^\mu = 0$.

השדות הא"מ מוגדרים ע"י הטנזור האנטיסימטרי $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, עם הטנזור הדואלי $F^*_{\mu\nu}$

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & B_3 & -B_2 & -iE_1 \\ -B_3 & 0 & B_1 & -iE_2 \\ B_2 & -B_1 & 0 & -iE_3 \\ iE_1 & iE_2 & iE_3 & 0 \end{pmatrix}, F^*_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -iE_3 & iE_2 & B_1 \\ iE_3 & 0 & -iE_1 & B_2 \\ -iE_2 & iE_1 & 0 & B_3 \\ -B_1 & -B_2 & -B_3 & 0 \end{pmatrix}$$

לגרנז'יאן לחלקיק טעון בשדה א"מ:

קלאסי: $L = \frac{1}{2}m_0\vec{u}^2 - q\Phi + \frac{q}{c}\vec{u}\cdot\vec{A}$ **משוואות EL:** $\frac{d}{dt}(m_0\vec{u}) = q\vec{E} + \frac{q}{c}\vec{u}\times\vec{B}$

יחסותי: $L = -\frac{1}{\gamma}m_0c^2 + \frac{q}{c}\vec{u}\cdot\vec{A} - q\Phi = \frac{1}{\gamma_u}\left(-m_0c^2 + \frac{q}{c}V^\mu A_\mu\right)$.

משוואות התנועה: $m_0\frac{dV^\mu}{d\tau} = \frac{q}{c}F_{\mu\nu}V^\nu$ כלומר $\frac{P^\mu}{m_0} = \frac{q}{c}F_{\mu\nu}$... $\frac{dP^\mu}{d\tau} = \frac{q}{c}F_{\mu\nu}V^\mu$.

כאשר V^4: $m_0\frac{dV^4}{d\tau} = \frac{q}{c}(iF_{4\nu}V^\nu) = \frac{q}{c}i\gamma(E_\nu u^\nu) = \frac{q}{c}i\gamma_u(\vec{E}\cdot\vec{u}) \to \frac{d(m_0 ic\gamma_u)}{d\tau} = \frac{q}{c}i\gamma_u(\vec{E}\cdot\vec{u})$

$\frac{1}{\gamma_u}\frac{d(m_0c^2\gamma_u)}{d\tau} = \frac{1}{\gamma_u}\frac{d\varepsilon}{d\tau} = q(\vec{E}\cdot\vec{u}) = \vec{F}_{Lorentz}\cdot\vec{u} \to \frac{d\varepsilon}{dt} = \vec{F}_{Lorentz}\cdot\vec{u}$ (כוח **ליח' נפח**)

מינקובסקי): $K_\mu = \frac{1}{c}F_{\mu\nu}J^\nu$, בD3 זהו כוח לורנץ: $\vec{K} = \rho(\vec{E} + \frac{1}{c}\vec{u}\times\vec{B}), K_4 = \frac{i}{c}(\vec{E}\cdot\vec{J})$

טנזור תנע אנרגייה 4-מימדי (מקביל לטנזור מקסוול):

$T_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi}[F_{\mu\sigma}F^\sigma{}_\nu + \frac{1}{4}g_{\mu\nu}F_{\lambda\rho}F^{\rho\lambda}]$ **בצורה מפורשת:** $\partial^\mu T_{\mu\nu} = \frac{1}{c}F_{\mu\sigma}J^\sigma = K_\mu$

$$T_{ik} = \frac{1}{4\pi}[E_iE_k + B_jB_k - \frac{1}{2}\delta_{jk}(\vec{E}^2 + \vec{B}^2)] \quad (i,k = 1,2,3)$$

$$T_{4k} = T_{k4} = \frac{-i}{c}S_k = \frac{-i}{4\pi}(\vec{E}\times\vec{B})_k, T_{44} = \frac{1}{8\pi}(\vec{E}^2 + \vec{B}^2) = u$$

הבעייה בטנזור זה היא שהוא איננו סימטרי. מקובל להגדיר בהתאם לכך את הטנזור הסימטרי $\theta^{\mu\nu} = T^{\mu\nu} - (\partial_\lambda T_0^\lambda)^{\mu\nu}, \theta^{00} = H$. עבור הלגרנז'יאן לשדה עם מסה,

$$\theta^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi}g^{\nu\alpha}F_{\alpha\beta}F^{\beta\mu} + \frac{g^{\mu\nu}}{16\pi}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{\mu^2}{4\pi}(A^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}A^{\mu\nu}A_{\mu\nu})$$

חוק שימור התנע: $\int \vec{K}dV + \frac{d}{dt}\vec{G} = \frac{d}{dt}(\vec{\eta} + \vec{G}) = \frac{d}{dt}(\vec{P}_{mech} + \vec{P}_{ele}) = \int T^\mu \cdot d\vec{S}$

dw עובר טרנס' מהצורה: $dw = dw' + icd\vec{p}'\cdot\vec{\beta}$

פורמאליזם לגרנז'י $L(\dot{q}, q, t) = T - V$ פעולה: $A = \int_{t1}^{t2} L(q_i, \dot{q}_i, t)dt$ וואריאציה:

$$\delta A = \int_{t1}^{t2}\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta\dot{q}_i\right)dt = \int_{t1}^{t2}\left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right]\right)\delta\dot{q}_i dt$$ משוואות EL: $\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right] = 0$.

הן מתקיימות $\Leftrightarrow$ δA=0 אם A,A' נבדלים בפונ' של q,t אז $\delta A = \delta A'$.

חבורת לורנץ: חבורה זו היא אוסף המטריצות של טרנס' לורנץ. הדט' של כל A בחבורה היא 1 או 1-. עבור דט' 1-, הטרנס' לא הפיכה, ולכן אנו עובדים רק עם A בעלת דט' 1. כל A ניתנת לרישום מהצורה $A = e^L$. לפיכך $\det A = 1 \to \det e^L = 1$ לפי זהות $1 = \det e^L = e^{trL} \to trL = 0$. (עבור detA=-1 נקבל כי L לא ממשית).

האורך של x^μ הוא אינוואריאנט לורנץ. (g היא המטריקה ומקיימת $g^t = g, g^2 = I$) כלומר:

$x^\mu x_\mu = x'^\mu x'_\mu \to x^\mu x_\mu = g_{\mu\nu}x^\mu x^\nu = x^t g x = x^t A^t g A x$, ולכן למעשה

מתקיים כי $g = A^t g A$. למטריצה A יש 16 דרגות חופש פיסיקליות, כי היא $\in \mathbb{C}^{4,4}$. g סימטרית

ולכן יש לה 10 משתנים בת"ל. מכך ש $g = A^t g A$, נקבל כי לA יש $16 - 10 = 6$ דרגות חופש

בבחירת המשתנים, ולכן לL ישנם 6 יוצרים. בעזרת הצבה, נקבל:

$$gA^tg = g(e^L)^t g = g\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(L)^n}{n!}\right)^t g = g\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(L^t)^n}{n!}\right)g = \left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{g(L^t)^n g}{n!}\right)$$

$$\{g^2 = I\} = \left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(gL^tg)^n}{n!}\right) = e^{gL^tg}$$

מצד שני $e^{-L} = gA^{-1}g = e^{gL^tg} \to gL^tg = -L$ ולכן gL אנטי סימטרית. נסמן: $L = \sum_{i=1}^{6}a_iT_i$

עם היוצרים: $S_1 = \begin{pmatrix} 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&0&-1 \\ 0&0&1&0 \end{pmatrix}, S_2 = \begin{pmatrix} 0&0&0&0 \\ 0&0&0&-1 \\ 0&0&0&0 \\ 0&1&0&0 \end{pmatrix}, S_3 = \begin{pmatrix} 0&0&0&0 \\ 0&0&-1&0 \\ 0&1&0&0 \\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}$

אלו המטריצות המייצגות סיבובים. המטריצות המייצגות הזזה:

$$K_1 = \begin{pmatrix} 0&1&0&0 \\ 1&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}, K_2 = \begin{pmatrix} 0&0&1&0 \\ 0&0&0&0 \\ 1&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}, K_3 = \begin{pmatrix} 0&0&0&1 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 1&0&0&0 \end{pmatrix}$$

עם יחסי החילוף: $[K_i, K_j] = -\varepsilon_{ijk}S_k, [S_i, K_j] = \varepsilon_{ijk}K_k, [S_i, S_j] = \varepsilon_{ijk}S_k$.

זהות: לכל וקטור יחידה $\vec{\varepsilon}$, $(\vec{\varepsilon}\cdot\vec{S})^3 = -\vec{\varepsilon}\cdot\vec{S}, (\vec{\varepsilon}\cdot\vec{K})^3 = \vec{\varepsilon}\cdot\vec{K}$.

באופן כללי נהוג לרשום $L = -\vec{\omega}\cdot\vec{S} - \vec{\eta}\cdot\vec{k}, A = e^{-\vec{\omega}\cdot\vec{S} - \vec{\eta}\cdot\vec{k}}$

משוואות התנועה של השדה הא"מ:

צפיפות הלגרנז'יאן **בהנחה שלחלקיקי השדה אין מסה:** $\ell = \frac{1}{c}J^\mu A_\mu - \frac{1}{16\pi}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$.

המשתנים הדינמיים הם $\vec{E}, \vec{B}$. משוואות התנועה (מעקרון הואריאציה) $\partial_\nu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi J^\mu}{c}$.

אם לחלקיקי השדה יש מסה: $\ell = -\frac{1}{c}J^\alpha A_\beta + \frac{\mu^2}{8\pi}A^\alpha A_\alpha - \frac{1}{16\pi}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}$.

משוואות התנועה: $\partial^\mu \frac{\partial\ell}{\partial(\partial^\mu A_\nu)} = \frac{\partial\ell}{\partial A^\nu}$. כזכור: $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, ולכן:

$$\frac{\partial\ell}{\partial(\partial^\mu A_\nu)} = \frac{\partial}{\partial(\partial^\mu A_\nu)}\left[\frac{-1}{16\pi}(\partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha)^2\right] = \frac{-1}{16\pi}\frac{\partial}{\partial(\partial^\mu A_\nu)}g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2]^2 = \frac{1}{4\pi}F_{\mu\nu}$$

$$\frac{\partial\ell}{\partial A^\nu} = \frac{\partial}{\partial A^\nu}\left[g^\alpha{}_\mu\frac{\mu^2}{8\pi}A^\alpha A_\alpha - g^\rho{}_\alpha\frac{1}{c}J^\nu A_\alpha\right] = -\frac{1}{c}J^\rho + \frac{\mu^2}{4\pi}A^\alpha$$.

ובסה"כ: $\frac{1}{4\pi}F_{\mu\nu} + \frac{\mu^2}{4\pi}A_\mu = -\frac{1}{c}J_\mu$. ההמילטוניאן מוגדר באמצעות טנזור האנרגייה הסימטרי,

ומקיים: $\theta^{44} = h = \sum_\alpha \pi^\alpha\partial_t A^\alpha - \ell$. כאן $\pi^\alpha = \frac{\partial\ell}{\partial_\mu A_\nu} = -\frac{1}{4\pi}F^{\mu\nu}$

$h = \frac{1}{8\pi}(\vec{E}^2 + \vec{B}^2) + \frac{1}{4\pi}\nabla(A_4\vec{E}) - \mu^2 A_4$. בניגוד למקרה ללא מסה, אין חופש כיול הפעם,

כי A_4 מופיע מפורשות בh, ולכן אינו דרגת חופש דינמית (משוואות תנועה לא טריוויאליות)

גלים א"מ אנו מניחים כי ε, μ קבועים. **מקדם השבירה:** $n = \sqrt{\varepsilon, \mu}$. **מהירות הגל בחומר דיאלקטרי:**

$V = c/n = c/\sqrt{\varepsilon\mu}$. שדות בחומר דיאלקטרי: $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}, \vec{B} = \mu\vec{H}$. משוואות מקסוול החדשות:

$$\boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \quad \vec{\nabla}\times\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = 0 \quad \varepsilon\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0 \quad \vec{\nabla}\times\vec{B} - \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = 0}$$ (מניחים כי אין מטענים

וזרמים). בדומה למה שעשינו בכיולים, מקבלים כי השדות מקיימים את משוואות הגלים

$\vec{\nabla}^2\vec{E} - \frac{\mu\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{E} = 0, \vec{\nabla}^2\vec{B} - \frac{\mu\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{B} = 0,$ הפוטנציאל הווקטורי $\vec{A}$ מקיים את אותה משוואה.

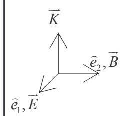
מספר הגדרות: אורך הגל: $ƛ = \lambda/2\pi$. **התדירות** $\nu = \lambda V = c/\sqrt{\mu\varepsilon} = ƛ\omega$ **מספר הגלים ליח' אורך** $1/\lambda$. **מספר הגל** $\vec{K} = \vec{n}/ƛ$. **כך שבסה"כ:** $\vec{K}\cdot\vec{x} - \omega t = \frac{2\pi}{\lambda}(\vec{n}\cdot\vec{x} - vt)$ **פיתוח לפי גלים**

מישורים: ניתנים לרישום כפונקציות של e^{ix}, e^{-ix}. **יחס הדיספרסייה:** $\omega = 2\pi\nu = Kc/\sqrt{\mu\varepsilon}$

נכתב ע"י יניב טננבאום קטן, 2007.

No animals were harmed during the making of the pages

קיטובים של גלים א"מ: נסמן את הפוטנציאל הווקטורי: $\vec{A}(\vec{x},t)=\hat{e}_1 A_0 e^{i(\vec{K}\cdot\vec{x}-\omega T)}$. נבחר כך ש $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}=0$, $\phi=0$. אזי $\vec{E}=-\frac{1}{c}\partial_t\vec{A}=\frac{i\omega}{c}\vec{A}=\frac{i|K|}{c\sqrt{\mu\varepsilon}}\vec{A}$, ולכן $\vec{E}$ בכיוון $\vec{A}$=כיוון $\hat{e}_1$.



כמו כן, $\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=0\to\vec{K}\perp\hat{e}_1$, ובסה"כ $\vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A}=i\vec{K}\times\vec{A}=\sqrt{\mu\varepsilon}\frac{\vec{K}}{|\vec{K}|}\times\vec{E}$

ולכן נעבוד במרחב מהצורה ($\vec{K}\parallel\hat{Z}$): $\vec{K}\perp\hat{e}_1\parallel\vec{E}\perp\vec{B},\vec{K}\perp\vec{B}$

באופן כללי נכתוב $\vec{E}=\vec{E}_1+\vec{E}_2$, כך ש $\vec{E}_1\perp\vec{E}_2$. מאחר ו $\vec{K}\perp\vec{E}$, הוא נפרש ע"י 2 וקטורים.

מקרה ראשון: אין הפרש פאזה בין E_{10} לE_{20}: **קיטוב ליניארי**

לפיכך, אמפליטודת הגל הכוללת עבור $\vec{E}$: $E_0=\sqrt{E_{10}^{\ 2}+E_{20}^{\ 2}}$, כך ש: $\hat{e}E_0=\hat{e}_1E_{10}+\hat{e}_2E_{20}$. במקרה זה $\hat{e}$ יהיה קבוע, כי אין הפרש פאזה בין $\hat{e}_1,\hat{e}_2$.

מקרה שני: הפרש פאזה של $90°$ בין E_{10} לE_{20} (אבל הם שווים בגודלם): **קיטוב מעגלי**

(E_{10} ממשי) $E_{20}=E_{10}e^{i\pi/2}=iE_{10}$, כך ש $\vec{E}(\vec{x},t)=(\hat{e}_1+i\hat{e}_2)E_{10}e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}$. נבחר $\hat{e}_1=\hat{x},\hat{e}_2=\hat{y},\hat{e}_3=\hat{z}=\hat{K}$ ואז: $\vec{E}=\mathrm{Re}\left(\vec{E}(\vec{x},t)\right)$

$\to E_x=E_{10}\cos(kz-\omega t),E_y=-E_{10}\cos(kz-\omega t)$. בכל z קבוע נקבל כי E_0 מסתובב סביב ציר z.

במקרה כזה מקובל להגדיר 2 וקטורי יחידה קומפלקסיים $\hat{e}_\pm=(\hat{e}_1\pm\hat{e}_2)/\sqrt{2}$, כך ש $|\hat{e}_\pm|^2=1,\hat{e}_+\cdot\hat{e}_-=0$, ואז $\vec{E}(\vec{x},t)=(\hat{e}_+E_{+0}+\hat{e}_{2-}E_{-0})e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}$

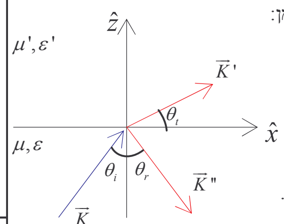
מקרה שלישי: המקרה הכללי ביותר: **קיטוב אליפטי**, $E_{20}\neq E_{10}$, ויש הפרש פאזה.

נסמן: $E_{20}=E_{10}re^{i\theta}$. נבחר כמו קודם $\hat{e}_1=\hat{x},\hat{e}_2=\hat{y},\hat{e}_3=\hat{z}=\hat{K}$. השדה הכולל: $\vec{E}(\vec{x},t)=(\hat{e}_++re^{i\theta}\hat{e}_{2-})E_0e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}$. זהו קיטוב אליפטי, כי אם נסובב את מערכת הצירים ב $\theta/2$, נקבל $\frac{E_x'^2}{E_{10}^{\ 2}(1+r)^2}+\frac{E_y'^2}{E_{10}^{\ 2}(1-r)^2}=1$

מעבר גלים בתווך: עבור גל במעבר בין שני סוגי תווך, נסמן:

תכונות קינמטיות: ($|K|=\omega n/c$)

א) $\omega=\omega'=\omega''$, כי למעשה המדיום קבוע במקומו, ולכן התדירות נשמרת.



ב) זווית הפגיעה=זווית ההחזרה $\theta_i=\theta_r$

ג) חוק סנל ($n=\sqrt{\mu\varepsilon}$): $n\sin\theta_i=n'\sin\theta_t$

ד) הקרן הפוגעת, המועברת והמוחזרת נמצאות במישור אחד.

משוואות הגלים הן מהצורה:

הגל הפוגע $\begin{cases}\vec{E}=\vec{E}_0e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}\\ \vec{B}=n(\hat{K}\times\vec{E})\end{cases}$ הגל המועבר $\begin{cases}\vec{E}'=\vec{E}_0'e^{i(\vec{k}'\cdot\vec{x}-\omega t)}\\ \vec{B}'=n'(\hat{K}'\times\vec{E}')\end{cases}$ הגל המוחזר $\begin{cases}\vec{E}''=\vec{E}_0''e^{i(\vec{k}''\cdot\vec{x}-\omega t)}\\ \vec{B}''=n(\hat{K}''\times\vec{E}'')\end{cases}$

כאשר $(\vec{K}\cdot\vec{X})|_{z=0}=(\vec{K}'\cdot\vec{X})|_{z=0}=(\vec{K}''\cdot\vec{X})|_{z=0}$ (3 הקרניים באותו מישור)(בחרנו $K_y=0$).

תנאי השפה: (**כאן** $\hat{n}=\hat{z}$)

א) רציפות רכיבים ניצבים B_n,D_n: $\begin{cases}\left(\varepsilon(\vec{E}_0+\vec{E}_0'')-\varepsilon'\vec{E}_0'\right)\cdot\hat{z}=0 & \{For\ D_n\}=I\\ \left(\vec{K}\times\vec{E}_0+\vec{K}''\times\vec{E}_0''-\vec{K}'\times\vec{E}_0'\right)\cdot\hat{z}=0 & \{For\ B_n\}=II\end{cases}$

ב) רציפות רכיבים משיקים E_t,H_t: $\begin{cases}\left(\vec{E}_0+\vec{E}_0''-\vec{E}_0'\right)\times\hat{z}=0 & \{For\ E_t\}=III\\ \left(\frac{1}{\mu}\left(\vec{K}\times\vec{E}_0+\vec{K}''\times\vec{E}_0''\right)-\frac{1}{\mu'}\vec{K}'\times\vec{E}_0'\right)\cdot\hat{z}=0 & \{For\ H_t\}=IV\end{cases}$

נבחר $\vec{E}$ ניצב למישור הפגיעה (מקביל ל $\hat{y}$)

נעזר בכך ש3 השדות באותו מישור. לכן I מתקיים טריוויאלית כי $\hat{y}\perp\hat{z}$. מIII: $\vec{E}_0+\vec{E}_0''-\vec{E}_0'=0$,

מאחר ו $K=\omega n/c$, מ IV נקבל $(n/\mu)(E_0-E_0'')\cos(\theta_i)-(n'/\mu')E_0'\cos(\theta_t)=0$, ובסה"כ:

$\frac{E_0'}{E_0}=\frac{2\cos\theta_i\sin\theta_t}{1+\sin(\theta_i+\theta_t)},\frac{E_0''}{E_0}=-\frac{\sin(\theta_i-\theta_t)}{\sin(\theta_i+\theta_t)}$ עבור $\mu=\mu'$. $\frac{E_0'}{E_0}=\frac{2}{1+\frac{\mu\tan\theta_i}{\mu'\tan\theta_t}},\frac{E_0''}{E_0}=\frac{1-\frac{\mu\tan\theta_i}{\mu'\tan\theta_t}}{1+\frac{\mu\tan\theta_i}{\mu'\tan\theta_t}}$

נבחר $\vec{E}$ במישור הפגיעה (ניצב ל $\vec{K}$) (כזכור $\sin(90-\theta)=\cos(\theta)$)

מII: $\left(\vec{E}_0+\vec{E}_0''\right)\sin(90-\theta_i)-\vec{E}_0'\cos(90-\theta_t)=0$, מIV: $(n/\mu)(E_0-E_0'')-(n'/\mu')E_0'=0$,

ובסה"כ $\frac{E_0'}{E_0}=\frac{2n}{n'}\frac{\sin(2\theta_i)}{\sin(2\theta_t)+\frac{\mu}{\mu'}\sin(2\theta_i)},\frac{E_0''}{E_0}=\frac{2\mu}{\mu'}\frac{\sin(2\theta_t)-\sin(2\theta_r)}{\sin(2\theta_t)+\frac{\mu}{\mu'}\sin(2\theta_i)}$, עבור $\mu=\mu'$,

ועבור $\varepsilon\neq\varepsilon',\mu=\mu',\theta_i=\theta_r=0$: $\frac{E_0'}{E_0}=\frac{2\cos\theta_t\sin\theta_t}{-\sin(\theta_i+\theta_t)\sin(\theta_i-\theta_t)},\frac{E_0''}{E_0}=-\frac{\tan(\theta_i-\theta_t)}{\tan(\theta_i+\theta_t)}$

ומחוק סנל $n\sin\theta_i=n'\sin\theta_t=n'\cos(\theta_i)$ נקבל $\frac{E_0'}{E_0}=\frac{2n}{n'+n},\frac{E_0''}{E_0}=\frac{n-n'}{n+n'}$

$\theta_i+\theta_t=\pi/2,E_0''=0$

החזרה מקס' כנ"ל תתקבל כאשר $\tan(\theta_i)=n/n'$. נסמנה **כזווית ברוסטר**: $\boxed{\theta_B=a\tan(n/n')}$

בזווית הנ"ל הגל דועך אקספוננציאלית כי: $e^{i\vec{K}\cdot\vec{x}}=e^{i(\vec{K}'(x\sin(\theta_r+z\cos(\theta_r))}=e^{ik'x\alpha}\cdot e^{-\beta kz}$

פרמטרי סטוקס: ע"מ לבטא את יחסי העוצמות בקיטובים שונים ו/או בהטלה על כיווני קיטוב שונים, נגדיר את הפרמטרים: $\hat{e}_1=a_1e^{i\delta_1},\hat{e}_2=a_2e^{i\delta_2},\hat{e}_+=a_+e^{i\delta_+},\hat{e}_-=a_-e^{i\delta_-}$:

לקיטוב כללי

$$\begin{cases}S_0=\left|\hat{e}_1\cdot\vec{E}\right|^2+\left|\hat{e}_2\cdot\vec{E}\right|^2=a_1^{\ 2}+a_2^{\ 2}\\ S_1=\left|\hat{e}_1\cdot\vec{E}\right|^2-\left|\hat{e}_2\cdot\vec{E}\right|^2=a_1^{\ 2}-a_2^{\ 2}\\ S_2=2\,\mathrm{Re}\left\{\left(\hat{e}_1\cdot\vec{E}\right)^*\left(\hat{e}_2\cdot\vec{E}\right)\right\}=2a_1a_2\cos(\delta_2-\delta_1)\\ S_3=2\,\mathrm{Im}\left\{\left(\hat{e}_1\cdot\vec{E}\right)^*\left(\hat{e}_2\cdot\vec{E}\right)\right\}=2a_1a_2\sin(\delta_2-\delta_1)\end{cases}$$

לקיטוב מעגלי

$$\begin{cases}S_0=\left|\hat{e}_+^*\cdot\vec{E}\right|^2+\left|\hat{e}_-^*\cdot\vec{E}\right|^2=a_+^{\ 2}+a_-^{\ 2}\\ S_3=\left|\hat{e}_+^*\cdot\vec{E}\right|^2-\left|\hat{e}_-^*\cdot\vec{E}\right|^2=a_+^{\ 2}-a_-^{\ 2}\\ S_1=2\,\mathrm{Re}\left\{\left(\hat{e}_+\cdot\vec{E}\right)^*\left(\hat{e}_-\cdot\vec{E}\right)\right\}=2a_+a_-\cos(\delta_--\delta_+)\\ S_2=2\,\mathrm{Im}\left\{\left(\hat{e}_+\cdot\vec{E}\right)^*\left(\hat{e}_-\cdot\vec{E}\right)\right\}=2a_+a_-\sin(\delta_--\delta_+)\end{cases}$$

S_0 עוצמת הגל הכללית, S_1 הפרש העוצמות בין הכיוונים הניצבים, S_2,S_3 מידע על הפרש הפאזה.

הפרמטרים האלו חייבים להיות תלויים כי התחלנו מ3 פרמטרים, וקיבלנו 4. בפועל מתקיים: $S_1^2+S_2^2+S_3^2=S_0^2=\pm1$. בטבע אין גלים מונוכרומטיים, ולכן המציאות נעזר בממוצע על פרמטרי סטוקס, כאשר מתקיים $\langle S_1^2\rangle+\langle S_2^2\rangle+\langle S_3^2\rangle\leq\langle S_0^2\rangle$. ככל שהגל פחות מונו' ההפרש גדל.

נגדיר גם $|\vec{P}|=\frac{\sqrt{S_1^2+S_2^2+S_3^2}}{S_0}$, $0\leq P\leq1$, וכן מטריצת קיטוב: $\rho=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}S_0+S_3 & S_1-iS_2\\ S_1+iS_2 & S_0-S_3\end{pmatrix}$. ρ היא גודל מדיד, ולכן נעזר בה למצוא את הפרמטרים האחרים. אם נזכר במטריצות פאולי, $\vec{\sigma}$, $\rho=(1+\vec{P}\cdot\vec{\sigma})$, כך ש $\vec{P}$ מנורמל $(|\vec{P}|=1)$ עבור אלומה מקוטבת, $0<|\vec{P}|<1$ עבור אלומה מקוטבת חלקית, ו0 עבור אלומה מפוזרת) $\vec{P}=Tr(\rho\sigma)$ **לדוגמא**: נמצא את $\vec{P}$ מהקשר $\rho=\frac{1}{2}(I+\vec{P}\cdot\vec{\sigma})$:

$$\rho\sigma_x=\frac{1}{2}(\sigma_x+P_x\cdot\sigma_x^{\ 2}+P_y\cdot\sigma_y\sigma_x+P_z\cdot\sigma_z\sigma_x)=\frac{1}{2}(\sigma_x+P_x-P_yi\sigma_z+P_zi\sigma_y)\to Tr(\rho\sigma_x)=P_x$$

גל במישורי במוליך: הפוטנציאל $\vec{A}$. **מחוק אוהם** $\vec{J}=\sigma\vec{E}$. מניחים כי $\rho=0$. ממשוואות מקסוול נובע כי $\vec{\nabla}\times\frac{\vec{B}}{\mu}=\vec{\nabla}\times\vec{H}=\frac{4\pi\vec{J}}{c}$ $\vec{\nabla}^2\vec{A}-\frac{\mu\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}=-\frac{4\pi\vec{J}}{c}=-\frac{4\pi\sigma\vec{E}}{c}=\frac{4\pi\sigma\mu}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$ **הפתרון**:

$\vec{A}=\vec{A}_0e^{-\beta(\vec{n}\cdot\vec{x})}e^{i(\alpha(\vec{n}\cdot\vec{x})-\omega t)}$, $\left(K=\sqrt{\mu\varepsilon^*}(\omega/c)=\sqrt{\mu\varepsilon}(\omega/c)(1+4\pi i\sigma/\omega\varepsilon)^{1/2}=\alpha+i\beta\right)$

כאשר ω/α היא מהירות הפאזה, ו$\delta=1/\beta$ עומק הדעיכה: $\vec{E}=\vec{E}_0e^{-\beta(\vec{n}\cdot\vec{x})}e^{i(\alpha(\vec{n}\cdot\vec{x})-\omega t)}$

$\vec{B}=\sqrt{\mu\varepsilon^*}\hat{n}\times\vec{E}=\sqrt{\mu\varepsilon}(1+4\pi i\sigma/\omega\varepsilon)^{1/2}\hat{n}\times\vec{E}$ $\boxed{\hat{n}=\vec{K}/K}$. **בגבול מוליך גרוע**:

$4\pi\sigma/\omega\varepsilon\ll1$, אזי $K=\sqrt{\mu\varepsilon^*}(\omega/c)=\frac{\omega\sqrt{\mu\varepsilon}}{c}+i\frac{2\pi}{c}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\sigma$ **בגבול מוליך טוב**:

$K=\frac{\omega\sqrt{\mu\varepsilon}}{c}\left(i\frac{4\pi\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^{1/2}=(1+i)\frac{\omega\sqrt{\mu\varepsilon}}{c}\frac{\sqrt{2\pi\sigma}}{\omega\varepsilon}=(1+i)\frac{\sqrt{2\pi\omega\sigma\mu}}{c}$, עם עומק החדירה $\delta=\frac{1}{\beta}\frac{c}{\sqrt{2\pi\sigma\mu\omega}}$.

שדות בחומר (מיקרוסקופי): **הקיטוב**: $\vec{P}=\chi\vec{E}$, **השדה**: $\vec{D}=\vec{E}+4\pi\vec{P}=\vec{E}(1+4\pi\chi)$. תדירות הכוח המחזיר (בקירוב מסדר ראשון) ω_0. נמצא את $\vec{P}$: γ מקדם הדעיכה, **ומשוואות התנועה** לחלקיקי החומר:

$m_e\frac{d^2\vec{x}}{dt^2}+m_e\frac{d\vec{x}}{dt}+m_e\omega_0^2\vec{x}=e\vec{E}(\vec{x},t)$. נציב פתרון: $\vec{E}=\vec{E}_0e^{-i\omega t},\vec{x}=\vec{x}_0e^{-i\omega t}$ ונקבל:

$m_e(-\omega^2-i\omega\gamma+\omega_0^2)\vec{x}_0e^{-i\omega t}=e\vec{E}_0e^{-i\omega t}\to\vec{x}_0=\frac{e\vec{E}_0}{m_e(\omega_0^2-\omega^2-i\omega\gamma)}$, **התנע המכני**

$\vec{p}_{mec}=e\vec{x}=\frac{e^2\vec{E}}{m_e(\omega_0^2-\omega^2-i\omega\gamma)}$. יש N חלקיקים ליח' נפח: $\vec{P}=N\vec{p}_{mec}=\frac{Ne^2\vec{E}}{m_e(\omega_0^2-\omega^2-i\omega\gamma)}$

ולכן: $\varepsilon=1+\frac{4\pi Ne^2\vec{E}}{m_e}\frac{1}{(\omega_0^2-\omega^2-i\omega\gamma)}$. נקבל את משוואות הגלים ממשוואות מקסוול:

$\begin{cases}\nabla^2\vec{E}-\frac{\mu\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}=\frac{4\pi}{c}\frac{\partial\vec{J}}{\partial t}\\ \nabla^2\vec{B}-\frac{\mu\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}=-\frac{4\pi\mu\vec{\nabla}\times\vec{J}}{c}\end{cases}$ שוב נציב $\begin{cases}\vec{E}=\vec{E}_\omega e^{-i\omega t}\\ \vec{B}=\vec{B}_\omega e^{-i\omega t}\\ \vec{J}=\vec{J}_\omega e^{-i\omega t}\end{cases}$, וכן $\begin{cases}n(\omega)=\sqrt{\mu\varepsilon}\\ K(\omega)=n(\omega)\frac{\omega}{c}\end{cases}$, נזניח $\vec{B}$ (כי

$(\vec{V}_e\ll c,F_{\vec{B}}=(\vec{V}_e\times\vec{B})/c$: $\begin{cases}(\nabla^2+K(\omega)^2)\vec{E}_\omega=-\frac{i4\pi}{c}k(\omega)\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\vec{J}_\omega=-\frac{i4\pi}{c}k(\omega)\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\sigma\vec{E}_\omega\\ (\nabla^2+K(\omega)^2)\vec{B}_\omega=-\frac{4\pi}{c}\mu\vec{\nabla}\times\vec{J}_\omega=-\frac{i4\pi}{c}k(\omega)\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\sigma\vec{B}_\omega\end{cases}$.

נגדיר: $K'^2(\omega)=K^2(\omega)+i\frac{4\pi}{c}\frac{\sigma K(\omega)n(\omega)}{\varepsilon}$, ואז $\begin{matrix}(\nabla^2+K'(\omega)^2)\vec{E}_\omega=0\\ (\nabla^2+K'(\omega)^2)\vec{B}_\omega=0\end{matrix}$. זו משוואת הלמהולץ שפתרונה

$\vec{E}_\omega=\vec{E}_0e^{i\vec{K}'\cdot\vec{x}}=\vec{E}_0e^{i\vec{K}_r\cdot\vec{x}}e^{-\vec{K}'_r\cdot\vec{x}}$, כנ"ל ל $\vec{B}$. מכאן: $\sigma\vec{E}_\omega=\vec{J}_\omega=Ne\vec{V}=Ne\dot{\vec{x}}=\frac{-i\omega Ne^2\vec{E}_\omega}{m_e(\omega_0^2-\omega^2-i\omega\gamma)}$.

ולכן $\sigma=\frac{-i\omega Ne^2}{m_e(\omega_0^2-\omega^2-i\omega\gamma)}$. תדירות הפלסמה: $\omega_p=\frac{4\pi Ne^2}{m_e\varepsilon}$. בין המקרים האפשריים:

* $\omega_0=0,\gamma=0$ (**אין כוח מחזיר ומקדם דעיכה**) $K'^2=K^2(1-\omega_p^{\ 2}/\omega^2)$. עבור $\omega>\omega_p$, K מדומה טהור הגלים לא חודרים לפלסמה. $\omega<\omega_p$ הגל יחדור לפלסמה ולא ידעך בקירוב ראשון.

* $\omega_0=0,\gamma\neq0$ (**מוליך**). $K'^2\approx(1+i)/\delta,\delta=c\sqrt{\varepsilon}/\sqrt{2\pi\sigma\omega n^2}$, δ הוא עומק החדירה של הגל. עבור δ גדול הגל ינוע רק על שפת המוליך(כלומר במוליך "טוב").

Wave Guide: מניחים שוב $\vec E=\vec E_\omega e^{-i\omega t},\vec B=\vec B_\omega e^{-i\omega t}$. נבחר את מוליך הגל סביב ציר z כך שיש סימטרייה סביב ציר זה. כמו קודם נקבל את משוואות הגלים: $\left(\vec\nabla^2+(\mu\varepsilon/c^2)\omega^2\right)(\vec E_\omega,\vec B_\omega)=0$

עבור הגלים הרוחביים נבחר $\vec E=\vec E_{\omega t}e^{i(k_g z-\omega t)},\vec B=\vec B_{\omega t}e^{i(k_g z-\omega t)}$ כך ש $\vec E_{\omega t},\vec B_{\omega t}$ בת"ל בz.

הגדרות

גל **(Transverse Electric)TE**: $\vec E_z=0$, עם תנאי השפה $\frac{\partial \vec B_Z}{\partial\hat n}|_{\partial V}=0$

גל **(Transverse Magnetcic)TM**: $\vec B_z=0$ עם תנאי השפה $E_Z|_{\partial V}=0$

המשוואות החדשות: $\left(\partial_x^2+\partial_y^2-K_g^2+(\mu\varepsilon/c^2)\omega^2\right)(\vec E_\omega,\vec B_\omega)=0$. **ממשוואות מקסוול מתקבל** $\vec\nabla\times\vec B_\omega=-i(\omega/c)\vec E_\omega,\vec\nabla\times\vec E_\omega=-(1/c)\partial_t\vec B_\omega=i(\omega/c)\vec B_{\omega t}$. והפתרון:

$$\begin{cases}B_{\omega t,y}=\frac{i}{(\omega/c)^2-K_g^2}\left[\frac{\omega}{c}\partial_x E_{\omega t,z}+K_g\partial_y B_{\omega t,z}\right]\\ B_{\omega t,x}=\frac{i}{(\omega/c)^2-K_g^2}\left[\frac{\omega}{c}\partial_y E_{\omega t,z}-K_g\partial_x B_{\omega t,z}\right]\\ E_{\omega t,x}=\frac{i}{(\omega/c)^2-K_g^2}\left[\frac{\omega}{c}\partial_y B_{\omega t,z}+K_g\partial_x E_{\omega t,z}\right]\\ E_{\omega t,y}=\frac{i}{(\omega/c)^2-K_g^2}\left[\frac{\omega}{c}\partial_x B_{\omega t,z}-K_g\partial_y E_{\omega t,z}\right]\end{cases}$$

לכן מספיק למצוא את השדות בכיוון z

דוגמא: מוליך מלבני בכיוון ציר z. $B_{\omega t,z}=0$, מחפשים $E_{\omega t,z}$ במוליך ($x\in[0,a],y\in[0,b]$).

תנאי השפה: מאחר וזהו מוליך, $E_z(x=0)=E_z(x=a)=E_z(y=0)=E_z(y=b)=0$. אם ניקח פתרון מהצורה $Sin(k_x x),Sin(k_y y),\cos(k_x x),\cos(k_y y)$, נקבל כי $k_x=\frac{m\pi}{a},k_y=\frac{m\pi}{b}$. נציב במשוואות ונקבל $(-m^2\pi^2/a^2-n^2\pi^2/b^2+\omega^2/c^2-k_g^2)E_{\omega tz}=0$, כלומר ניתן לחלץ k_g. התלות ב k_g היא $e^{ik_g z}$, ולכן אם הוא מדומה נקבל דעיכה בחומר. ω המינימלי שעבור אין דעיכה חייב לקיים $\omega^2=c^2\pi^2(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2})$ בפרט $\omega^2\ge\omega_{11}^2=c^2\pi^2(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2})$ ולדוגמא ע"מ להעביר $(TM)_{21}$ $c^2\pi^2(\frac{4}{a^2}+\frac{1}{b^2})\ge\omega^2\ge c^2\pi^2(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2})$, וכו'.

קצת תורה א"מ: **חוק אוהם:** $\vec J=\sigma\vec E$ **אנרגיית שדה מגנטי** $W=\frac12\int\vec H\cdot\vec B d^3x$

חוק אמפר: $\oint_v\vec B\cdot d\vec l=\mu_0\int_S\vec J\cdot\hat n dS=\mu_0 I$

קוא' כדוריות: $x=r\sin\theta\cos\varphi,y=r\sin\theta\sin\varphi,z=r\cos\theta$

$$\begin{cases}\hat r=\cos\varphi\sin\theta\hat x+\sin\varphi\sin\theta\hat y+\cos\theta\hat z\\ \hat\theta=\cos\varphi\cos\theta\hat x+\sin\varphi\cos\theta\hat y-\sin\theta\hat z\\ \hat\varphi=-\sin\varphi\hat x+\cos\varphi\hat y\end{cases}$$

$$\begin{cases}\hat x=\cos\varphi\sin\theta\hat r+\cos\varphi\cos\theta\hat\theta-\sin\varphi\hat\varphi\\ \hat y=\sin\varphi\sin\theta\hat r+\sin\varphi\cos\theta\hat\theta+\cos\varphi\hat\varphi\\ \hat z=\cos\theta\hat r-\sin\theta\hat\theta\end{cases}$$

ע"י הצבת $\theta=\pi/2$ **מקבלים קוא' גליליות** ($\hat z=\hat\theta$)

אופרטורים: $\vec\nabla\times\vec A=\left(\partial_y A_z-\partial_z A_y,\partial_z A_x-\partial_x A_z,\partial_x A_y-\partial_y A_x\right)$

בקוא' כדוריות:

$$\vec\nabla\times\vec A=\frac{1}{r\sin\theta}\left(\partial_\theta(\sin\theta A_\varphi)-\partial_\varphi A_\theta\right)\hat r+\left(\frac{\partial_\varphi A_r}{r\sin\theta}-\frac1r\partial_r(rA_\varphi)\right)\hat\theta+\frac1r\left(\partial_r(rA_\theta)-\partial_\theta A_r\right)\hat\varphi$$

$$\vec\nabla\cdot\vec A=\frac{1}{r^2}\partial_r(r^2A_r)+\frac{1}{r\sin\theta}\partial_\theta(\sin\theta A_\theta)+\frac{1}{r\sin\theta}\partial_\varphi(A_\varphi)$$

$$\vec\nabla(\vec A)=\partial_r A_r\hat r+\frac1r\partial_\theta A_\theta\hat\theta+\frac{1}{r\sin\theta}\partial_\varphi A_\varphi\hat\varphi$$

$$\vec\nabla^2\vec A=\frac{1}{r^2}\partial_r(r^2\partial_r A_r)+\frac{1}{r\sin\theta}\partial_\theta(\sin\theta\cdot\partial_\theta A_\theta)+\frac{1}{r\sin\theta}\partial_\varphi^2(A_\varphi)$$

קרינה- פוטנציאלים של Weichert-Lienard:

כזכור מאלקטרוסטטיקה: $\begin{cases}\Phi(\vec r,t)=\int\frac{\rho(\vec r',t-|\vec r-\vec r'|/c)}{|\vec r-\vec r'|}d^3r'\\ \vec A(\vec r,t)=\int\frac{\vec V'\rho(\vec r',t-|\vec r-\vec r'|/c)}{|\vec r-\vec r'|}d^3r'\end{cases}$, כאשר $\vec V'=\frac{d\vec r'}{dt}$

עבור מטען הנע במהירות משתנה $\vec V'$: $\begin{cases}\Phi(\vec r,t)=\frac{qc}{Rc-\vec R\cdot\vec V}|_{t'=t-\frac1c|\vec r-\vec x(t')|}\\ \vec A(\vec r,t)=\frac{\vec Vqc}{Rc-\vec R\cdot\vec V}|_{t'=t-\frac1c|\vec r-\vec x(t')|}\end{cases}$

כאשר $R=|\vec R|,\vec R=\vec r-\vec x(t),\hat n=\vec R/R$. **עוצמה** $\boxed{P=\oint\frac{\vec S\cdot d\vec A}{r^2}}$ **עבודה:** $\boxed{\frac{dW}{dt}=\vec S\cdot\hat n}$

השדות עבור מטען כנ"ל: לכל שדה ישנו חלק התלוי במהירות $\vec\beta$, וחלק התלוי בתאוצה $\vec a$, כך שנסמן $\vec E=\vec E_u+\vec E_a,\vec B=\vec B_u+\vec B_a$ (כאשר $\vec B_u\vec E_u\propto\frac{1}{R^2},\vec B_a\vec E_a\propto\frac1R$):

$$\begin{cases}\vec E_u=e\left(\frac{(1-\beta^2)(\vec R-R\vec\beta)}{(R-\vec R\cdot\vec\beta)^3}\right)\\ \vec E_a=\frac{e}{c^2}\left(\frac{(\vec R\cdot\vec a)(\vec R-R\vec\beta)}{(R-\vec R\cdot\vec\beta)^3}+\frac{R\vec a}{(R-\vec R\cdot\vec\beta)^2}\right)\end{cases}\qquad\begin{cases}\vec B_u=e\left(\frac{(1-\beta^2)(\vec\beta\times\vec R)}{(R-\vec R\cdot\vec\beta)^3}\right)\\ \vec B_a=\frac{e}{c^2}\left(\frac{(\vec R\cdot\vec a)(\vec\beta\times\vec R)}{(R-\vec R\cdot\vec\beta)^3}+\frac{\vec a\times\vec R}{(R-\vec R\cdot\vec\beta)^2}\right)\end{cases}$$

נוסחת לרמור: למהירות קבועה נסמן θ הזווית בין התאוצה $\vec a$ לוקטור המקום $\vec R$

קרינת מטען מואץ במהירות נמוכה: כפי שראינו, $\vec B_u\vec E_u\propto\frac{1}{R^2},\vec B_a,\vec E_a\propto\frac1R$, ולכן עבור R גדול מספיק נתחשב רק בחלק התאוצתי. $\vec S\approx\frac{c}{4\pi}(\vec E_a\times\vec B_a)=\frac{c}{4\pi}\left(\vec E_a\times\left(\frac{\vec R}{R}\times\vec E_a\right)\right)$ אולם, $\vec E_a\cdot\vec R=0$ עבור $R\gg1$, ולכן $\approx\frac{c}{4\pi R}\left(\vec E_a^2\vec R-(\vec E_a\cdot\vec R)\vec E_a\right)\approx\frac{c}{4\pi}\vec E_a^2\hat n$, כאשר

$$\vec E_a^2=\frac{e^2}{c^4}\frac{1}{R^6}\left((\vec R\cdot\vec a)^2R^2+R^4a^2-2(\vec R\cdot\vec a)^2R^2\right)=\frac{e^2}{c^4}\frac{1}{R^6}\left(R^4a^2-R^2(\vec R\cdot\vec a)^2\right)$$, ובהתאם

$$=\frac{e^2}{c^4}\frac{1}{R^2}\left(a^2(1-\cos^2\theta)\right)=\frac{e^2}{c^4}\frac{1}{R^2}\left(a^2\sin^2\theta\right)\to\vec S=\frac{e^2a^2\sin^2\theta}{4\pi R^2c^2}\hat n$$

לזאת, ההספק: $\frac{dp}{d\Omega}=\vec S\cdot\hat nR^2=\frac{e^2a^2\sin^2\theta}{4\pi c^3}\to\boxed{P=\oint\frac{dp}{d\Omega}d\Omega=\frac{2e^2a^2}{3c^3}}$ **וזו נוסחת לרמור**

עבור תנועה מחזורית מעגלית: $r=r_0\cos(\omega t),a^2=\ddot r^2=\omega^4r_0^2\cos^2(\omega t)$, ואז

$$\boxed{P=\frac{2e^2\langle a^2\rangle}{3c^3}=\frac23\frac{e^2}{c^3}\frac12\omega^4r_0^2=\frac13\frac{e^2}{c^3}\omega^4r_0^2}$$

עבור מהירות ותאוצה באותו כיוון נסמן $k=R-\vec R\cdot\vec\beta$, ומתקיים $(\vec R\cdot\vec a)\vec\beta=(\vec\beta\cdot\vec R)\vec a$

$$\vec E_a=\frac{e}{c^2}\left(\frac{(\vec R\cdot\vec a)(\vec R-R\vec\beta)}{K^3}+\frac{R\vec a}{K^2}\right)=\frac{e}{c^2K^3}\left((\vec R\cdot\vec a)\vec R-R^2\vec a\right)$$

$$\vec E_a^2=\frac{e^2}{c^4}\frac{1}{K^6}\left(R^4a^2-(\vec R\cdot\vec a)^2R^2\right)=\frac{e^2}{c^4}\frac{R^2}{K^6}\left(R^2a^2-(\vec R\cdot\vec a)^2\right)=\frac{e^2}{c^4}\frac{R^4a^2\sin^2\theta}{K^6}$$, (אולם

$$\frac{e^2}{c^4}\frac{R^4a^2\sin^2\theta}{K^6}=\frac{e^2}{c^4}\frac{a^2\sin^2\theta}{R^2(1-\beta\cos\theta)^6}\quad(k=R-\vec R\cdot\vec\beta=R(1-\beta\cos\theta))$$, ובאותו אופן,

$$\vec S=\frac{c}{4\pi}\frac{e^2}{c^4}\frac{a^2\sin^2\theta}{R^2(1-\beta\cos\theta)^6}\hat n,\quad\frac{dP}{d\Omega}=\frac{d^2\omega}{d\Omega dt'}=(\vec S\cdot\hat n)R^2\frac{dt}{dt'}=(1-\beta\cos\theta)(\vec S\cdot\hat n)R^2=\frac{e^2a^2\sin^2\theta}{4\pi c^3(1-\beta\cos\theta)^5}$$

בהסתמך על כך ש $\boxed{\frac{dt}{dt'}=1-\frac1c\vec\nabla R(t')\cdot\frac{d\vec r_e(t')}{dt'}=1-\frac1c\frac{\vec R}{R}\cdot\vec V_e(t')=1-\hat n\cdot\vec\beta}$. **הכללה למערכת אינרציאלית כלשהי:**

$$a_\mu=\frac{du_\mu}{d\tau}=\frac{du_\mu}{dt/\gamma_u}=\gamma_u\frac{du_\mu}{dt}=\gamma_u\left(\frac{d}{dt}(\gamma_u\vec u),ic\frac{d\gamma_u}{dt}\right)=$$

$$=\gamma_u\left(\frac{\gamma_u^3}{c^2}(\vec u\cdot\dot{\vec u})\vec u+\gamma_u\dot{\vec u},ic\frac{\gamma_u^3}{c^2}(\vec u\cdot\dot{\vec u})\right)$$, ומצד שני $a'_\mu=(\dot{\vec u}',0)$. בסה"כ נקבל כי, עבור

לדוגמא $\vec u=(0,0,u)$, $\vec a'=\left(\frac{\dot u_1}{1-\beta_u^2},\frac{\dot u_2}{1-\beta_u^2},\frac{\dot u_3}{(1-\beta_u^2)^{3/2}}\right)$, $\vec a'^2=\frac{1}{(1-\vec\beta^2)^2}\left(\dot{\vec u}'^2+\frac{(\vec\beta\cdot\dot{\vec u})^2}{1-\vec\beta^2}\right)$

ואז $\boxed{P'=\frac{2e^2}{3c^3}\frac{1}{(1-\beta^2)^2}\left(\dot u'^2+\frac{(\beta\cdot\dot u)^2}{1-\beta^2}\right)}$