Version 1.4

תקציר קורס

104004 – חדו"א 2

נכתב ע"י: אור צפריר
Or.Tzafrir@Gmail.com

<u>מכפלה סקלרית</u>

$$\vec{V_1}\cdot\vec{V_2}=|\vec{V_1}||\vec{V_2}|\cos\theta=(x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k})\cdot(x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k})=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$$

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}|}$$

<u>אי שוויון קושי-שוורץ:</u>

$$|\vec{a}\cdot\vec{b}|\leq|\vec{a}||\vec{b}|$$

<u>מכפלה ווקטורית</u>

$$\vec{V_1}\times\vec{V_2}=|\vec{V_1}||\vec{V_2}|\sin\theta\,\vec{n}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\end{vmatrix}$$

<u>מכפלה מעורבת</u>

$$\vec{V}\cdot(\vec{u}\times\vec{w})=\begin{vmatrix}V_1&V_2&V_3\\u_1&u_2&u_3\\w_1&w_2&w_3\end{vmatrix}$$

<u>משוואת מישור</u>

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

או

$$Ax+By+Cz+D=0$$
$$D=-Ax_0-By_0-Cz_0$$

- $[A,B,C]$ - ווקטור ניצב למישור.
- (x_0,y_0,z_0) - נק' על המישור.
- כאשר A,B,C תלויים בשני מישורים אז הם מקבילים, וכש D גם הוא תלוי אז המישורים שווים.

<u>משוואת ישר</u>

<u>תצוגה פרמטרית:</u>

$$\begin{cases}x=x_0+ta\\y=y_0+tb\\z=z_0+tc\end{cases}$$

או

<u>תצוגה קרטזית / קנונית:</u>

$$\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}$$

- $[a,b,c]$ - ווקטור בכיוון הישר.
- (x_0,y_0,z_0) - נק' על הישר.

משוואת מעגל

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$$

- (a,b) - מרכז המעגל.

משוואת אליפסה

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=1$$

- מוקדים: $(\pm c,0)$

$$b^2=a^2-c^2$$

משוואת היפרבולה

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{y}{b}\right)^2=1$$

$$c^2=a^2+b^2$$

משוואת פרבולה

$$y=ax^2+bx+c$$

או

$$x=ay^2+by+c$$

משוואת קו ישר

$$ax+by+c=0$$

או

$$y=mx+n$$

- m - שיפוע.
- n - נק' חיתוך עם ציר ה-y.

ואו

$$y-y_0=m(x-x_0)$$

- (x_0,y_0) - נק' על הישר.

שיטות לזיהוי עקום לפי משוואה

$$ax^2+by^2+cx+by+e=0$$

תנאים:

1. אם $0\neq a=b$ <= מעגל.
2. אם $0\neq a\neq b\neq 0$, אז:

1.2. a,b **שוני** סימן ← היפרבולה.

2.2. a,b **שווי** סימן ← אליפסה.

3. $a = 0$ או $b = 0$ ← פרבולה או קו ישר (עדיף לבדוק)

מרחק בין נק' למישור

$d = \left|\overrightarrow{P_0P_1} \cdot \vec{n}\right|$

$\vec{n}$ - ווקטור יחידה בכיוון הנורמל למישור.

P_0 - נק' על המישור.

P_1 - הנק' הרצוייה במרחב.

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

(x_1, y_1, z_1) - הנק' הרצוייה במרחב.

$[A, B, C]$ - הווקטור הניצב למישור.

מרחק בין שני מישורים מקבילים

$$d = \frac{|D_2 - D_1|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

המקדמים A, B, C בשני המישורים חייבים להיות ממש שווים.

מרחק בין נק' לישר

דרך א'

$$d = \frac{\left|\overrightarrow{PQ} \times \vec{a}\right|}{|\vec{a}|}$$

Q - הנק' הרצויה במרחב.

P – נק' על הישר.

$\vec{a}$ - ווקטור בכיוון הישר.

דרך ב'

למצוא משוואת מישור הניצב לישר ועובר דרך נק' Q. אח"כ למצוא את הנק' R הנמצאת בקו ישר ל-Q. ואז:

$d = \left|\overrightarrow{RQ}\right|$

מצבים הדדיים בין ישרים

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}, \begin{cases} x = x_0 + ta \\ y = y_0 + tb \\ z = z_0 + tc \end{cases}$$

1. מקבילים:

כאשר a, b, c תלויים.

את המרחק מחשבים ע"י מרחק נק' מישר אחד לישר השני.

2. נפגשים:

כאשר $\overrightarrow{PQ} \cdot \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) = 0$, a, b, c אינם תלויים.

בשביל למצוא את המישור ששני הישרים האלה יוצרים, אני עושה מכפלה ווקטורית כדי למצוא את הנורמל ואז לוקח נק' מאחד הישרים.

3. מצטלבים:

כאשר $\overrightarrow{PQ} \cdot \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \neq 0$, a, b, c אינם תלויים.

מרחק בין ישרים מצטלבים:

$$d=\frac{\left|\overrightarrow{PQ}\cdot\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\right|}{\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|}$$

<u>דרכים נוספים להצגת נק' במישור</u>

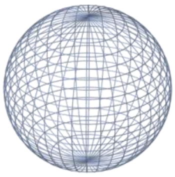
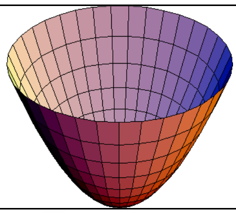
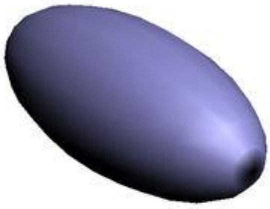
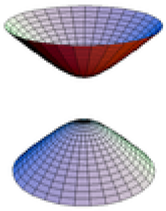
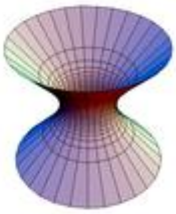
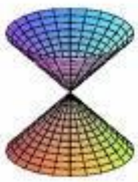
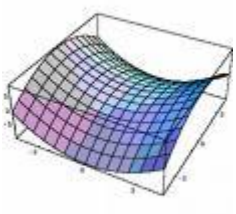
- (r,θ)

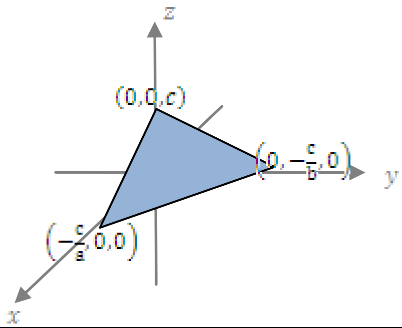
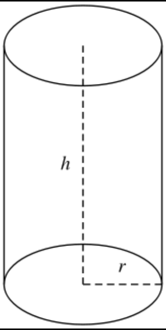
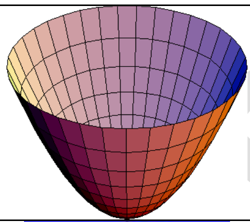
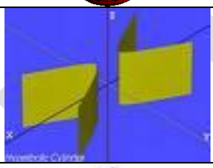
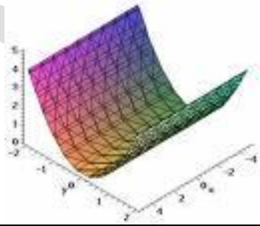
  $x=r*\cos\theta\ ,\ y=r\sin\theta$

  $r=\sqrt{x^2+y^2}$
- $x=x(t),\ y=y(t)$

<u>משטחים בסיסיים</u>

<table>
<tr><th colspan="2"><u>שם & משוואה</u></th><th><u>ציור</u></th></tr>
<tr><td colspan="2"><u>כדור שמרכזו ב- (a,b,c)</u>
$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$

כדור שמרכזו בראשית
(בכל חתך נקבל מעגל)
$x^2+y^2+z^2=R^2$</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2"><u>פרבולואיד מעגלי</u>
$z=x^2+y^2$
בציר z,k $z=x^2$
בציר z,y $z=y^2$
בציר x,y מעגל</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2"><u>אליפסואיד</u>
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$
בכל חתך נקבל אליפסה</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="3"><u>היפרבולואידים</u>
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=w$</td><td><u>היפרבולואיד דו יריעתי</u>
<u>אליפטי</u> $(w<0)$
מישור x,y אליפסה
מישורים x,z ו- y,z
היפרבולה</td><td></td></tr>
<tr><td><u>היפרבולואיד חד יריעתי</u>
<u>אליפטי</u> $(w>0)$
מישור x,y אליפסה
מישורים x,z ו- y,z
היפרבולה</td><td></td></tr>
<tr><td><u>חרוט אליפטי</u> $(w=0)$
$z^2=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$
במישור x,y אליפסה
במישור y,z $y=\pm bz$
במישור z,x $x=\pm az$</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2"><u>אוכף</u> – היפרבולואיד היפרבולי
$z=\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}$
במישור x,y אליפסה
בשאר המישורים פרבולה</td><td></td></tr>
</table>

<u>משולש</u> $z = c + ax + by$	
<u>גליל מעגלי</u> $x^2 + y^2 = k$ כל חתך בגובה $z = k$ נותן מעגל	
<u>גליל אליפטי</u> $ax^2 + by^2 = c$ כל חתך בגובה $z = k$ נותן אליפסה	
<u>פרבולואיד אליפטי</u> $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$ במישור x, y אליפסה במישור x, z פרבולות	
<u>גליל היפרבולי</u> $ay^2 - bx^2 = c$ בכל רמה של x נקבל היפרבולה	
<u>גליל פרבולי</u> $y = x^2$ בכל רמה של z נקבל $y = x^2$ פרבולה	

<u>גבולות של פונקציה בשני משתנים</u>

<u>הגדרה:</u>

אם L קיים וסופי לכל $(x,y)\to(0,0)$, כלומר לאורך כל עקום שמתקרב ל- $(0,0)$, אז אומרים ש- L הוא הגבול של הפונקציה הזאת.

אי שיוויוניים שימושיים:

$0\leq|f(x,y)|$

$$\ln(1+x)<x\,,x>-1$$

$$\sqrt{xy}\leq\frac{x+y}{2}$$

אי שיוויון הממוצעים:

$$\frac{1}{2}\geq\frac{xy}{x^2+y^2}$$

שיוויוניים שימושיים:

$(\sin x)^n{}_{x\to0}\approx x^n$

$(\tan x_{x\to0})^n\approx x^n$

<u>גבולות ידועים מחדו"א 1</u>

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=L$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{t}{n}\right)^n=e^t$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$$

$$a^b=e^{b\ln a}$$

<u>הסנדוויץ'</u>

אם גבול $L=\lim_{M\to M_0}g(x,y)$ ו- $\lim_{M\to M_0}$כ$(x,y)=L$. ולכן xy מסביבת M_0 מתקיים:
$f(x,y)\leq R(x,y)\leq g(x,y)$

אז:
$$\lim_{M\to M_0}R(x,y)=L$$

<u>השיטה הפולארית למציאת הגבול:</u>

אם ניתן להציג את הפונקציה $f(x,y)$ ע"י הצבה:

$$x=r\cos\propto$$
$$y=r\sin\propto$$

$$f(r\cos\propto,r\sin\propto)=E(r)*F(\propto)$$

אם כש $r \to 0$ מתקיים $E(r) = 0$, ו- $F(\propto)$ חסומה אזיי הגבול קיים והוא אפס.

<u>שיטת ההצבה</u>

$$\lim_{xy\to(2,-4)} \frac{(x-2)^2(y+4)}{(x-2)^2+(y+4)^2} = \lim_{uv\to(0,0)} \frac{u^2v}{u^2+v^2} = 0$$

$$x-2=u\ \overrightarrow{x\to 2}\ 0$$
$$y+4=v\ \overrightarrow{y\to -4}\ 0$$

$$0 \le \left|\frac{u^2v}{u^2+v^2}\right| \le \frac{1}{2}|u|$$

<u>סתירה של גבול ע"י להראות שהגבול תלוי</u>

מציבים:

$$\begin{cases} \text{קו ישר}: y = ax \\ \text{פרבולה}: y = ax^2 \end{cases}$$

אם בסוף מתקבל גבול שתלוי בפרמטר a אז אין גבול.

<u>רציפות של פונקציה</u>

<u>הגדרה:</u>

פונקציה $Z = f(x,y)$ רציפה בנק' (x_0,y_0) אמ"ם:

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = f(x_0,y_0)$$

<u>תכונות חשובות של פונקציה רציפה</u>

1. אם f מוגדרת על תחום חסום וסגור, היא מקבלת שם את ערכה הגדול ביותר ואת ערכה הקטן ביותר.
2. אם L עקום רציף מנק' A אל נק' B, ו- $Z(x,y)$ פונקציה רציפה על תחום שמכיל את L, אז Z מקלת על L **כל ערך ביניים** שבין $Z(A)$ עד $Z(B)$.

<u>נגזרות חלקיות</u>

<u>הגדרה וסימון:</u>

$z = z(x,y)$, נק' (x_0,y_0).

$$\dot{z}_x(x_0,y_0) = \frac{\partial z}{\partial x}(x_0,y_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{z(x,y_0)-z(x_0,y_0)}{x-x_0} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{z(x_0+\Delta x,y_0)-z(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

<u>הערה:</u>

אם שתי הנגזרות $\dot{z}_x$ ו- $\dot{z}_y$ **רציפות** באותה נקודה, אז הפונקציה $Z(x,y)$ היא דיפרנציאבילית ("חלקה").

הדרך למציאת רציפות או אי רציפות של נגזרת חלקית

1. גוזרים רגיל בכל נקודה השונה מהנקודה הסינגולארית (הנקודה שמאפסת את המונה והמכנה).
2. גוזרים לפי ההגדרה בנקודה הסינגולארית.
3. לוקחים גבול בסביבת הנקודה הסינגולארית של הביטוי לא לפי ההגדרה אם הם שווים -> רציפה.

דיפרנציאביליות

תנאי מספיק

אם ל- $z = f(x,y)$ יש נגזרות חלקיות בסביבת (x_0,y_0) והן פונקתחוץ רתח]ץ בנקודה (x_0,y_0), אזיי $z = f(x,y)$ דיפרנציבלית בנקודה זו.

תנאי הכרחי

פונקציה דיפרנציאבילית חייבת להיות רציפה, אבל פ' רציפה לא חייבת להיות דיפרנציאבילית.

מישור משיק

תנאי מספיק

אם ל- $f(x,y)$- נגזרות חלקיות רציפות בסביבת (x_0,y_0) אזי f רציפה בסביה של נק' זו, וניתן להעביר בסביבת הנק' מישור משיק וההפך.

מציאת מישור משיק:

משוואת העקום $f(x,y)$, המשיק הנקודה (x_0,y_0)

$$\boldsymbol{z - z_0 = A(x - x_0) + B(y - y_0)}$$

$$A = \acute{f}_x(x_0, y_0)$$
$$B = \acute{f}_y(x_0, y_0)$$
$$z_0 = f(x_0, y_0)$$

נורמל למישור המשיק:

$$\vec{n} = (A, B, -1)$$

קירוב ליניארי

$$z(x,y) \approx z(x_0,y_0) + A(x - x_0) + B(y - y_0)$$

עבור (x,y) קרוב לנק' (x_0,y_0).

$$\begin{cases} A = \acute{z}_x(x_0,y_0) \\ B = \acute{z}_y(x_0,y_0) \end{cases}$$

כלל השרשרת

תהי $U = f(x,y,z)$ דיפרנציאבילית, והיו $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ פונקציות גזירות, אז קיימת הנגזרת:

$$\frac{du}{dt} = U_x * x_t + U_y Y_t + U_z Z_t$$

<u>משפט</u>

תהי $U = f(x, y, z)$ דיפרנציאבילית.
ובנוסף:

$$\begin{cases} x = x(t, v) \\ y = y(t, v) \\ z = z(t, v) \end{cases}$$

דיפרנציאבילית.
אז U גזירה חלקית לפי V ולפי t.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x} * \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} * \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial z} * \frac{\partial z}{\partial t}$$

<u>נגזרות מסדר גבוהה</u>

$$z_{xx} = [z_x(x, y)]_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}(x, y)\right) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} z(x, y)$$

$$z_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}(x, y)\right) = \frac{\partial^2}{\partial y\, \partial x} z(x, y)$$

<u>נגזרת מכוונת</u>

נגזרת המכוונת של $z(p)$ בנקודה P, בכיוון $\vec{a}$.

$$z = z(x, y) = z(P)$$
$$P_0 = (x_0, y_0)$$
$$\vec{a} = (a_1, a_2) \quad a_1{}^2 + a_2{}^2 = 1$$

במידה והפונקציה **לא דיפרנציאבילית**, אז צריך לפי הגדרה:

$$\frac{\partial z}{\partial \vec{a}}(p_0) = \lim_{p \to p_0} \frac{z(p) - z(p_0)}{p - p_0} = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + t * a_1, y_0 + t * a_2) - f(x_0, y_0)}{t}$$

ובמקרה והפונקציה **כן דיפרנציאבילית**, אז גוזרים לפי הדרך הבאה:

$$\frac{\partial z}{\partial \vec{a}}(p_0) = \vec{\nabla} Z(P_0) \cdot \vec{a}$$

$$\vec{\nabla} Z(P_0) = \left(f_x(P_0), f_y(P_0)\right)$$

<u>משפט</u>

נתון משטח חלק $F(x, y, z) = 0$, ונקודה $P = (x_0, y_0, z_0)$ שעליו. אז הווקטור:

$$\nabla F(P) = [F_x, F_y, F_z](P)$$

מאונך למשטח באותה הנקודה.

פונקציה סתומה – Implicit Function

משפט הפונקציות הסתומות (במשתנה אחד)

נתונה המשוואה $F(x, y) = 0$ ‏(F חלקה) בסביבת הנקודה (x_0, y_0) שגם היא מקימת את המשואה.
וכמו כן: $F_y(x_0, y_0) \neq 0$, אזי בסביבת x_0 קיימת פונקציה אחת ויחידה $y = y(x)$ שמקיימת $y(x_0) = y_0$ ו-

$$y'(x_0) = -\frac{F_x}{F_y}$$

משפט הפונקציות הסתומות (בשני משתנים)

$F(x, y, z) = 0$ בסביבת הנקודה (x_0, y_0, z_0), וידוע ש-$F'_z \neq 0$ בנקודה (ובסביבתה).

אז קיימת פונקציה אחת ויחידה $z = z(x, y)$ המקיימת את המשוואות:

$$z'_x = -\frac{F_x}{F_z}$$

$$z'_y = -\frac{F_y}{F_z}$$

משפט הפ' הסתמות מסדר גבוהה

$$z''_{xx} = -\frac{F_{xx}}{F_z}$$

$$z''_{yy} = -\frac{F_{yy}}{F_z}$$

$$z''_{xy} = -\frac{F_{xy}}{F_z}$$

נוסחת האינטגרל של לייבניץ

הגדרה

$$G(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(x, t)\,dt = G(u, v, x)$$

נניח שכל הפונקציות הן "יפות".

אזי:

$$G'(x) = -f[x, u(x)] * u'(x) + f[x, v(x)] * v'(x) + \int_{u(x)}^{v(x)} f_x(x, t)\,dt$$

פיתוח טיילור לשני משתנים

$$z(x,y) = z(x_0,y_0) + [z_x(x_0,y_0) * (x - x_0) + z_y(x_0,y_0) * (y - y_0)]$$
$$+ \frac{1}{2!}[z_{xx}(x_0,y_0) * (x - x_0)^2 + 2z_{xy}(x_0,y_0) * (x - x_0)(y - y_0)$$
$$+ z_{yy}(x_0,y_0) * (y - y_0)^2]$$
$$+ \frac{1}{3!}[z_{xxx}(x_0,y_0) * (x - x_0)^3 + 3z_{xxy}(x_0,y_0) * (x - x_0)^2(y - y_0)$$
$$+ 3z_{xyy}(x_0,y_0) * (x - x_0)(y - y_0)^2 + z_{yyy}(x_0,y_0) * (y - y_0)^3]$$

(x, y) - המספרים הנתונים

(x_0,y_0) - מספרים שאני בוחר שרירותית (בערך).

דרך נוספת לכתוב את נוסחת טיילור:

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j!}\left((x - x_0)\frac{\partial}{\partial x} + (y - y_0)\frac{\partial}{\partial y}\right) f(x_0,y_0) + R_n$$

מקסימום ומינימום מקומי

בנקודה קריטית צריך להתקיים:

$\nabla f(x_0,y_0) = (0, 0)$

תהא (x_0,y_0) נקודה קריטית של פונקציה דיפרנציאבילית $z(x_0,y_0)$, כלומר $z'_x = z'_u = 0$ בנקודה.

נסמן: $D_1 = z_{xx} * z_{yy} - {z_{xy}}^2$

- אם $D_1 > 0$ ו- $z_{xx} > 0$ 🡸 נקודת **מינימום מקומי**.
- אם $D_1 > 0$ ו- $z_{xx} < 0$ 🡸 נקודת **מקסימום מקומי**.
- אם $D_1 < 0$ 🡸 נקודת **אוכף**.
- אם $D_1 = 0$ 🡸 **אין לדעת בשיטה זו**.

מינימום ומקסימום עם אילוצי שיוויון – כופלי לגרנג'

מדובר על הבעיה מהסוג הבא:

$\min f(x,y)$

$s.t\ g(x,y)$

נגדיר את הפונקציה:

$L(x, y, \lambda) = f(x,y) - \lambda g(x,y)$

וצריך להתקיים:

$$\begin{cases} L'_x = 0 = f'_x - \lambda g'_x = 0 \\ L'_y = 0 = f'_y - \lambda g'_y = 0 \\ L'_z = 0 = f'_z - \lambda g'_z = 0 \end{cases}$$

$f(x,y)$ – פונקצית המטרה.

$g(x,y)$ – אילוץ.

λ - כופלי לגרנג'.

L – לגרנג'יאן.

דג':

על המשטח $xyz^2 = 2$
מצא נקודה הקרובה ביותר לראשית ($(x,y,z) > 0$).

הפיתרון:
פונקציית המטרה:
$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$$
והאילוץ:
$$xyz^2 - 2 = 0$$

$$L = x^2 + y^2 + z^2 - \lambda(xyz^2 - 2)$$

$$\begin{cases} L_x = 2x - \lambda yz^2 = 0 \ \backslash * x \\ L_y = 2y - \lambda xz^2 = 0 \backslash * y \\ L_z = 2z - 2\lambda xyz = 0 \backslash * z \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x^2 = \lambda xyz^2 = 2\lambda \\ 2y^2 = \lambda xyz^2 = 2\lambda \\ 2z^2 = 2\lambda xyz^2 = 4\lambda \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \sqrt{|\lambda|} \\ y = \sqrt{|\lambda|} \\ z = \sqrt{2|\lambda|} \end{cases}$$

כלומר:

$$\begin{cases} z = \sqrt{2}x \\ x = y \end{cases}$$

נכניס זאת באילוץ:

$$x * x * \left(x\sqrt{2}\right)^2 = 2$$

ומקבלים:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x = 1} \\ \mathbf{y = 1} \\ \mathbf{z = \sqrt{2}} \end{cases}$$

והמרחק המינימלי:

$$d_{min} = \sqrt{1^2 + 1^2 + \sqrt{2}^2} = \sqrt{4} = \mathbf{2}$$

<u>מקסימום ומינימום על קבוצה סגורה וחסומה</u>

מחפשים נקודות חשודות:
1. נקודות בהן אין נ.ח (למשל $z(x,y) = |x^2 y|$).
2. כל הנקודות הקריטיות, כלומר בהן $z_x' = z_y' = 0$.

3. נקודות שפה.
4. בדיקת פינות.

את הנקודות שאני מוצא אני מציב בפונקציה המקורית כדי למצוא את הערך המינימלי ואו המקסימלי.

<u>חזרה לחישוב אינטגרלים של חדו"א 1</u>

<u>אינטגרציה בחלקים</u>

$$\int_a^b \mathbf{u(x)\dot{v}(x)\,dx = u(x)v(x)|_a^b - \int_a^b \dot{u}(x)v(x)\,dx}$$

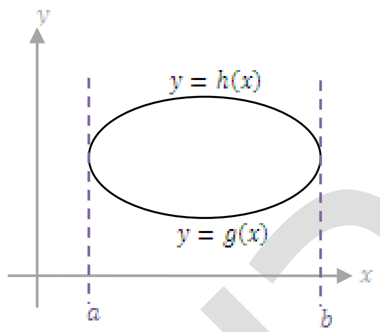
<u>אינטגרציה ע"י הצבה</u>

$$\int_a^b \mathbf{f(x)\,dx} = \int_\propto^\beta \mathbf{f[g(t)]\dot{g}(t)dt}$$

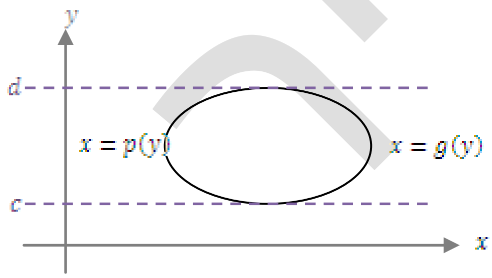
$$\begin{cases} x = g(t) \\ dx = \dot{g}(t)dt \end{cases}$$

$$\begin{cases} \propto = g^{-1}(a) \\ \beta = g^{-1}(b) \end{cases}$$

<u>האינטגרל הכפול בפונקציה נשנה</u>



$$\iint_D f(x,y)dA = \int_{x=a}^{b}\left[\int_{y=g(x)}^{y=h(x)} f(x,y)dy\right]dx = \iint_D f(x,y)dxdy$$



<u>שינוי סדר האינטגרציה</u>

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_{y=c}^{d} dy \int_{x=p(y)}^{x=g(y)} f(x,y)dx$$

<u>קואורדינאטות אליפטיות</u>

אם התחום D אליפסה

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1$$

אז נעבור לקואורדינאטות אליפטיות:

$$\begin{cases} x = ar\cos\theta \\ y = br\sin\theta \end{cases}$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=r^2$$

$0 \le r \le 0$

והיעקוביאן: $J = abr$

<u>דג'</u>

חשב על האליפסה:

$$\iint_D (x^2+y^2)\,dx$$

$$\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}\le 1$$

$$\begin{cases} a=3 \\ b=2 \end{cases}$$

$$J = 3*2*r = 6r$$

$$\int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta \int_{r=0}^{1} 6r((3r\cos\theta)^2+(2r\sin\theta)^2)\,dr = 6\int_{\theta=0}^{2\pi}(9\cos\theta^2+4\sin\theta^2)d\theta \int_{r=0}^{1} r^3 dr$$

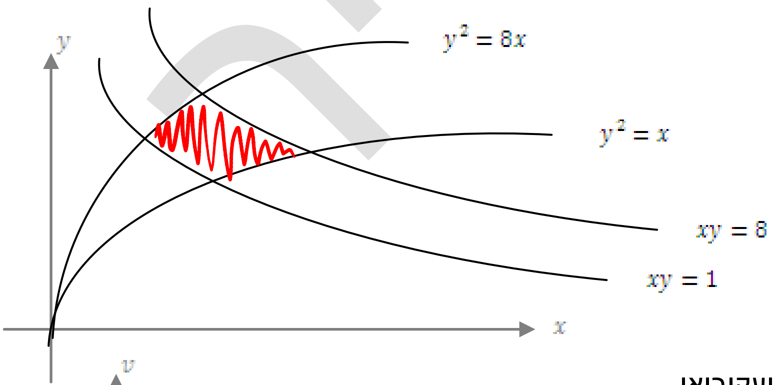
$$= 6\int_{\theta=0}^{2\pi}\left(9*\frac{1+\cos 2\theta}{2}+4*\frac{1-\cos 2\theta}{2}\right)d\theta * \frac{r^4}{4}\Big|_{r=0}^{1} = 6*2\pi*\frac{1}{4}$$

$$= 3\pi$$

<u>מעבר לקאורדינטות אחרות (u,v)</u>

(דג')

חשב את השטח החסום בין הקווים $xy=1$, $xy=8$, $y^2=8x$, $y^2=x$ (ברביע הראשון).



$A = \iint_D 1*dxdy$

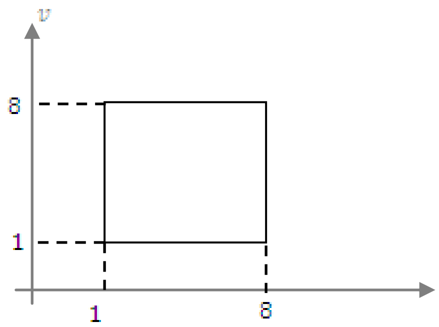
נעבור למשתנים:

$$\begin{cases} u = xy \\ v = \frac{y^2}{x} \end{cases}$$

אז:

$1 \le u \le 8$

$1 \le v \le 8$



חישוב היעקוביאן (אני מחשב בעצם את היעקוביאן הפוך, כי זה יותר קל, ואז אני בסוף הופך אותו בחזרה).

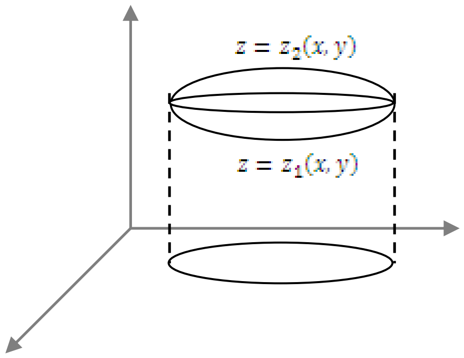
$$J^{-1} = \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & x \\ -\frac{y^2}{x^2} & \frac{2y}{x} \end{vmatrix} = \frac{3y^2}{x} = 3v$$

$J = \frac{1}{3v}$

ובכן:

$$\iint_D 1 * dxdy = \int_{u=1}^{8} \mathrm{du} \int_{v=1}^{8} \frac{1}{3v} \mathrm{dv} = \mathrm{u} * \frac{1}{3} \ln \mathrm{v} = \frac{7}{3} \ln 8$$

אינטגרל משולש



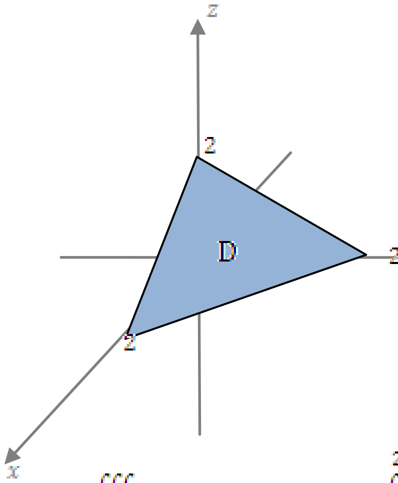
האינטגרל המשולש יהיה:

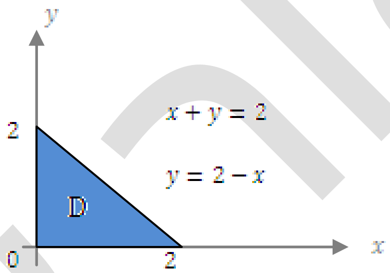
$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz$$

$$\iint_D dxdy \int_{z=z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz$$

<u>דג'</u>

חשב $\iiint_V \frac{dv}{(1+x+y+z)^3}$ על הפירמידה $x+y+z=2 \Leftarrow z=2-y-x$





$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \int_{x=0}^{2} dx \int_{y=0}^{2-x} dy \int_{z=0}^{2-x-y} \frac{dz}{(1+x+y+z)^3}$$

$$= \int_{x=0}^{2} dx \int_{y=0}^{2-x} dy \left(-\frac{1}{2(1+x+y+z)^2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\int_{x=0}^{2} dx \int_{y=0}^{2-x} dy \left(\frac{1}{(1+x+y)^2} - \frac{1}{3^2}\right) = \cdots$$

<u>חישוב מסה</u>

אפשר להניח שצפיפות המסה ליח' שטח הוא 1.

המסה של כל D היא:

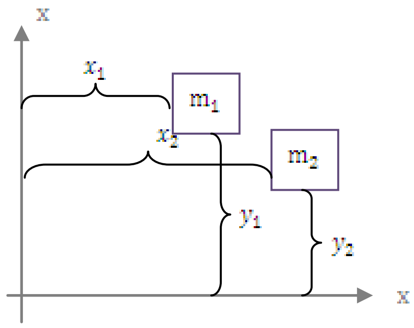
$$\iint 1 * DA = \iint dm$$

נניח שצפיפות המסה היא $\rho(x,y)$, אז מסת התחום היא:

$$\iint_D \rho(x,y)dA = M$$

<u>מומנט אינרציה</u>

מומנט אינרציה של המערכת סביב ציר מסויים:

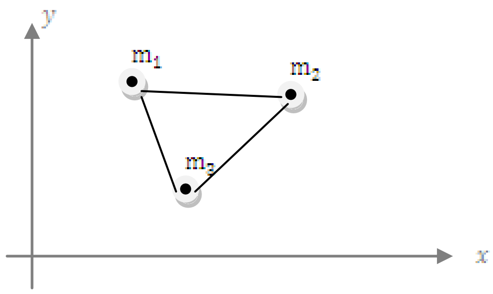


$$Z_x=\iint 1*dA*y^2dxdy$$

או כאשר קיימת פונקציית הצפיפות:

$$Z_y=\iint \rho(x,y)x^2dxdy$$

<u>מרכז כובד</u>

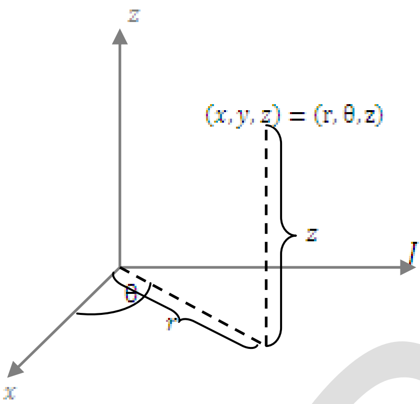


$$\bar{x}=\frac{\sum_{k=1}^{3}m_kx_k}{\sum_{k=1}^{3}m_k}=\frac{\iint 1*x*dxdy}{\iint 1*dxdy}$$

$$\bar{y}=\frac{\sum_{k=1}^{3}m_ky_k}{\sum_{k=1}^{3}m_k}=\frac{\iint 1*y*dxdy}{\iint 1*dxdy}$$

במידה ונתונה פונקציית הצפיפות $\rho(x,y)$ אז צריך להחליף את "1" בפונקציית הצפיפות הנתונה.

<u>קואורדינטות גליליות</u>

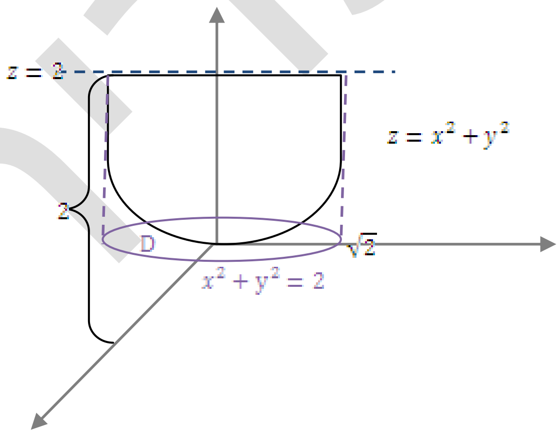


$$\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\\ z=z\end{cases}$$

$$J=\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)}=\begin{vmatrix}\cos\theta & r\sin\theta & 0\\ \sin\theta & r\cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=r$$

בהגדרתו θ נע בין הערכים הבאים: $0\le\theta\le 2\pi$

דג'



חשב $\iiint_V xdv$

על הגוף: $\begin{cases}x^2+y^2\le z\le 2\\ x\ge 0\,,y\ge 0\end{cases}$

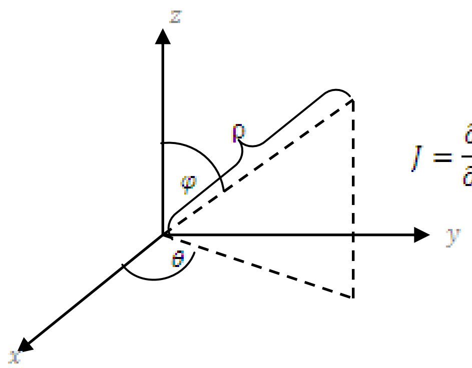
$$I=\iint_D xdxdy\int_{x^2+y^2}^{2}dz$$

ובגליליות:

$$I=\int_{\theta=0}^{\pi/2} d\theta \int_{r=0}^{\sqrt{2}} r dr \int_{z=r^2}^{2} r\cos\theta\, dz=\int_{\theta=0}^{\pi/2}\cos\theta\, d\theta \int_{r=0}^{\sqrt{2}} r^2 dr \int_{z=r^2}^{2} dz$$

$$=\sin\theta\,\Big|_0^{\pi/2}\int_{r=0}^{\sqrt{2}} r^2(2-r^2)dz$$

<u>קואורדינטות כדוריות</u>



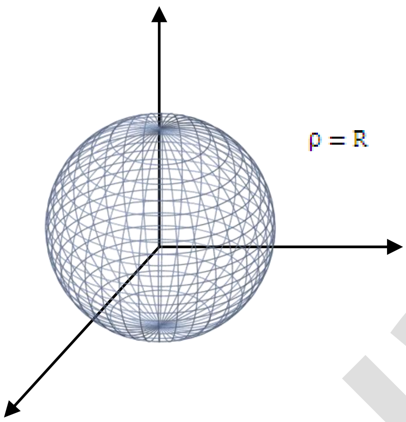
$$\begin{cases} x=\rho\cos\theta\sin\varphi \\ y=\rho\sin\theta\sin\varphi \\ z=\rho\cos\varphi \end{cases}$$

$$J=\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\varphi,\theta)}=\begin{vmatrix}\cos\theta\sin\varphi & \rho\cos\theta\sin\varphi & -\rho\sin\varphi\sin\theta \\ \sin\theta\sin\varphi & \rho\cos\theta\sin\varphi & \rho\sin\varphi\cos\theta \\ \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0\end{vmatrix}=\rho^2\sin\varphi$$

בתחומים הבאים:

$$\begin{cases} 0\le\theta\le 2\pi \\ 0\le\varphi\le\pi \end{cases}$$

דג'



חשב $I=\iiint_v \exp(x^2+y^2+z^2)^{3/2}$ על הכדור הקנוני ברדיוס R נתון.

$\rho^2=x^2+y^2+z^2$

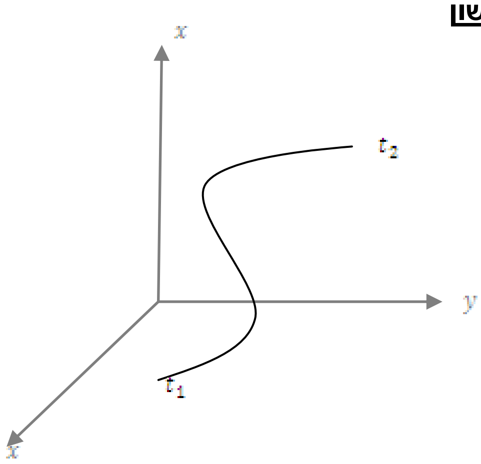
$$I=\int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta \int_{\varphi=0}^{\pi}\sin\varphi\, d\varphi \int_{\rho=0}^{R}\rho^2(\exp\rho^2)^{\frac{3}{2}}d\rho=$$

ρ^3

$$=2\pi(\cos 0-\cos\pi)\underbrace{\int_{\rho=0}^{R}\rho^2\exp\rho^3\, d\rho}_{\frac{1}{3}e^{\rho^3}}=\frac{4}{3}\pi\left(e^{\rho^3}-1\right)$$

לפי הצבה
$t=\rho^3$

<u>אינטגרלים קווים מסוג ראשון</u>



עקום במרחב:

$$\begin{cases} \overrightarrow{r_{(t)}} = [x_{(t)}, y_{(t)}, z_{(t)}] \\ t_1 < t < t_2 \end{cases}$$

$$\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \to L = \dot{r}_{(t)}|_{t=t_0} = [\dot{x}_{(t)}, \dot{y}_{(t)}, \dot{z}_{(t)}]$$

ובחן עבור עקום $z = z(t)$, $y = y(t)$ ו- $x = x(t)$, הווקטור $[\dot{x}_{(t)}, \dot{y}_{(t)}, \dot{z}_{(t)}]$ מבטא את כיוון המשיר בנק' המתאימה ל- t.

תהי $w = f(x,y,z)$ פ' דיפרנציאבילית ויהיה L עקום מהצורה $\overrightarrow{r_{(t)}} = [x_{(t)}, y_{(t)}, z_{(t)}]$, $t_1 \le t \le t_2$

ניקח את העקום ונחלק אותו ל- n חלקים קטנים, ניקח שרירותית (x_k, y_k, z_k) ונסתכל על הסכום:

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k, z_k) dl_k \xrightarrow[n\to\infty]{} L = \int_L \mathbf{f(x,y,z)d\ell}$$

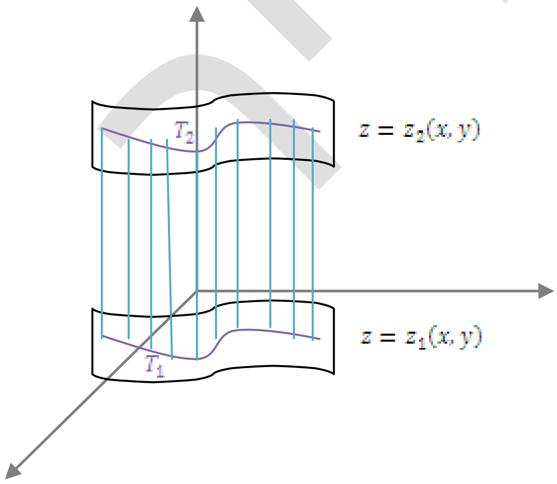
- אם $f \equiv 1$ אז זהו אורך העקום.
- אם $f(x,y,z)$ מבטא צפיפות מסה ליח' אורך של התיל, אז האינטגרל מראה את מסת התיל כולו.

$$d\ell = \sqrt{\dot{x}_{(t)}^{\,2} + \dot{y}_{(t)}^{\,2}}\, dt$$

ולכן:

$$\int_L z(x,y) d\ell = \int_{t=t_1}^{t_2} z(x_{(t)}, y_{(t)}) \sqrt{\dot{x}_{(t)}^{\,2} + \dot{y}_{(t)}^{\,2}}\, dt$$

<u>הסבר נוסף למשמעות האינטגרל</u>

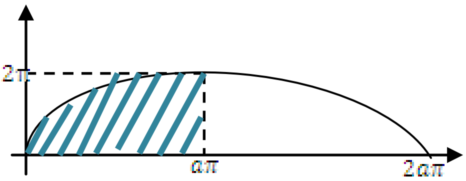


שטח הגדר האנכית בין שני המשטחים $(z_1 < z_2)$.

$$\int_L [z_2(x,y) - z_1(x,y)] d\ell$$

דג'

חשב $\int_L y^2 d\ell$ על העקום $L:\begin{cases}x=a(t-\sin t)\\ y=a(1-\cos t)\end{cases}$, $0\le t\le\pi$ $a>0$



$$\begin{cases}\dot{x}=a(1-\cos t)\\ \dot{y}=a\sin t\end{cases}$$

$$\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}=a\sqrt{(1-\cos t)^2+\sin t^2}=a\sqrt{2-2\cos t}$$

ולכן:

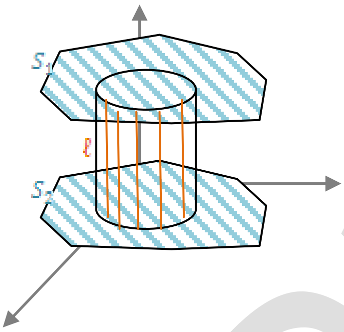
$$\int\limits_L y^2 d\ell=\int\limits_{t=-}^{\pi} a^2(1-\cos t)^2\sqrt{2-2\cos t}\,dt=a^2\sqrt{2}\int\limits_{t=0}^{\pi}(1-\cos t)^2\sqrt{1-\cos t}\,dt$$

$$=a^2\sqrt{2}\int\limits_{t=0}^{\pi}(1-\cos t)^{\frac{5}{2}}dt=\cdots\cdots$$

<u>חישוב שטח בעזרת אינטגל קווי מסוג ראשון</u>

(אפשר להשתמש בשיטה זו אמ"ם השטח שרוצים אנך לציר xy, או yz ואו zx)

דג'



חשב את שטח מעטפת הגליל הנמצא בין המישור:

$$\begin{cases}z+y+x=2\\ z=0\end{cases}$$

עם הגליל:

$$(x-1)^2+y^2=4$$

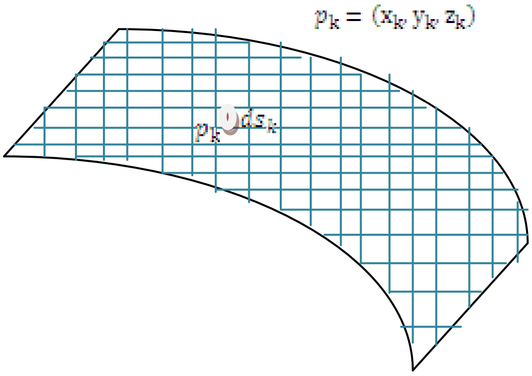
$$\begin{cases}x=1+2\cos\alpha\\ y=2\sin\alpha\end{cases}$$

$$\dot{r}_\alpha=(-2\sin\alpha,2\cos\alpha)=d\ell$$

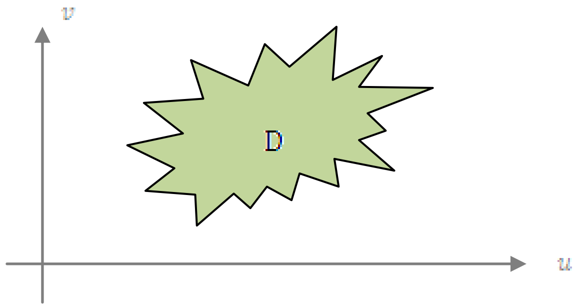
$$\int_0^{2\pi}(2-x-y-0)|\dot{r}_\alpha|d\alpha=\int_0^{2\pi}(2-(1+2\cos\alpha)-2\sin\alpha)2d\alpha=4\pi$$

אינטגרל משטחי מסוג ראשון

נתונה פ' $w = f(x,y,z)$ דיפרנציאבילית



$$\sum_{k=1}^{n} f(p_k)ds_k \xrightarrow{n\to\infty} \iint_S f(x,y,z)ds$$



עבור עקום:

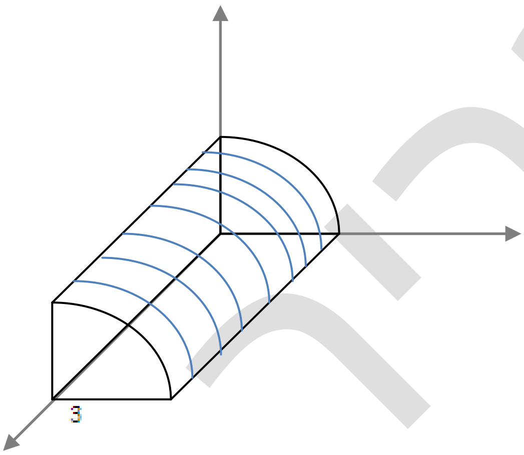
$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases}$$

$$ds = |\vec{r}_u \times \vec{r}_v|dudv$$

ולכן:

$$\iint_S f(x,y,z)ds = \iint_D f\left(x_{(u,v)}, y_{(u,v)}, z_{(u,v)}\right)|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|dudv$$

דג'



חשב $\iint_S y(x+z)ds$ על קטע הגליל $x^2 + z^2 = 4$

ובתחומים: $\begin{cases} y \geq 0 \\ z \geq 0 \\ 0 \leq x \leq 3 \end{cases}$

אפשר להשתמש בצגה הבאה של המשטח S:

$$\begin{cases} x = s \\ y = 2\cos t \\ z = 2\sin t \end{cases} \quad \begin{cases} 0 \leq s \leq 3 \\ 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\vec{r}_{(s,t)} = [s, 2\cos t, 2\sin t]$$

$$\vec{r}_s \times \vec{r}_z = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2\sin t & 2\cos t \end{vmatrix} = [0, -2\cos t, -2\sin t]$$

$$ds = |\vec{r}_s \times \vec{r}_z| = \sqrt{0^2 + 4\cos t^2 + 4\sin t^2} = 2dzds$$

לכן:

$$\iint_S y(x+z)ds = \int_{t=0}^{\pi/2} dz \int_{s=0}^{3} 2(2\cos t)(2+2\sin t)2ds = 4\int_{t=0}^{\pi/2} \cos t\, dt \int_{s=0}^{3} (s+2\sin t)ds$$

$$= 4\int_{t=0}^{\pi/2} \cos t\, dt\left(\frac{s^2}{2} + 2s * \sin t\right)\Bigg|_{s=0}^{3} = 4\int_{t=0}^{\pi/2} \cos t\left(\frac{9}{2} + 6\sin t\right)dt$$

$$= 18\int_{t=0}^{\pi/2} \cos t\, dt + 24\int_{t=0}^{\pi/2} \sin t \cos t\, dt = 18 \sin t\Big|_{t=0}^{\pi/2}$$

$$+ 24\int_{t=0}^{\pi/2} \frac{1}{2}\sin 2t\, dt = 18 + \frac{12}{2}(-\cos t)\Big|_{t=0}^{\pi/2} = 18 + 6(\cos 0 - \cos \pi)$$

$$= 18 + 12 = 30$$

<u>מקרה פרטי</u>

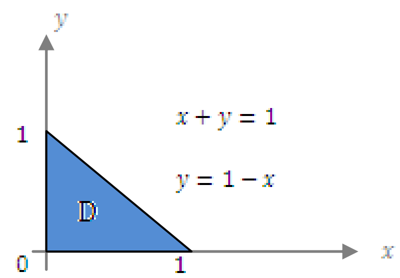
נתון המשטח S: $z = z(x,y)$ ו- $x, y \in D$

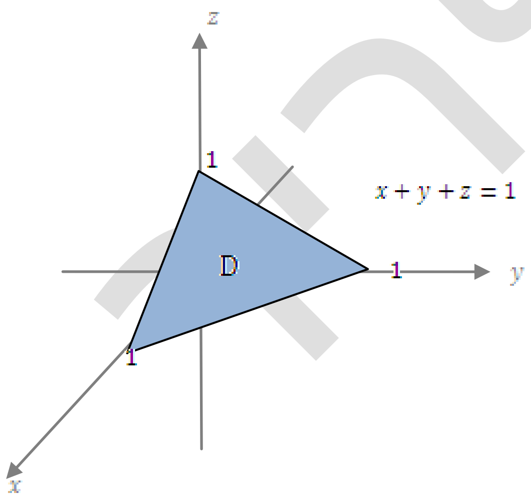
ופונקציה $w = f(x,y,z)$, אזיי:

$$\iint_S f(x,y,z)ds \int_D f(x,y,z_{(x,y)})\sqrt{\dot{z}_x{}^2 + \dot{z}_y{}^2 + 1}dxdy$$

דג'

חשב $\iint_S (1-x)yzds$ על המשולש שבציור:





ולפי הכלל:

$$z = 1 - x - y$$

$$\begin{cases} \dot{z}_x = -1 \\ \dot{z}_y = -1 \end{cases}$$

$$\sqrt{1 + \dot{z}_x{}^2 + \dot{z}_y{}^2} = \sqrt{1 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$$

$$\iint\limits_S (1-x)yz\,ds = \iint\limits_D (1-x)y(1-x-y)\sqrt{3}\,dxxy = \sqrt{3}\int\limits_{x=0}^{1}(1-x)dx\int\limits_{y=1}^{1-x} y(1-x-y)dy$$

$$= \sqrt{3}\int\limits_{x=0}^{1}(1-x)dx\int\limits_{y=1}^{1-x}[(1-x)y-y^2]dy$$

$$= \sqrt{3}\int\limits_{x=0}^{1}(1-x)dx\left[(1-x)\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{3}\right]_{y=0}^{1-x} = \sqrt{3}\int\limits_{x=0}^{1}(1-x)\left[\frac{1}{6}(1-x)^3\right]dx$$

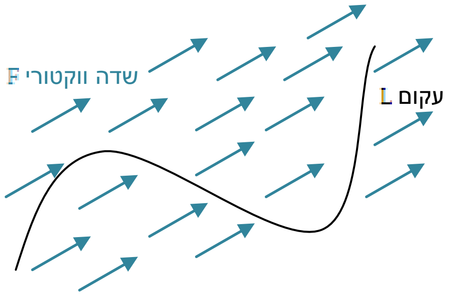
$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{(1-x)^5}{5}\Big|_{x=1}^{0} = \frac{\sqrt{3}}{30}$$

שדות ווקטורים

$$\vec{F}_{(x,y,z)} = \mathrm{P}_{(x,y,z)}\hat{\imath} + \mathrm{Q}_{(x,y,z)}\hat{\jmath} + \mathrm{R}_{(x,y,z)}\hat{k}$$

שדה "חסר מקורות" הוא שדה בעל ערכים קבועים, ז"א שלא משנה איפה מחשבים את השטף במרחב. בשביל לבדוק האם שדה $\vec{F}$ הוא "חסר מקורות" צריך לבדוק האם מתקיים $\mathrm{DIV}(\vec{\mathrm{F}}) = 0$.

אינטגרלים קווים מסוג שני



עבודה לאורך L $= \int_L \vec{F} \cdot \overrightarrow{dr}$

$$\begin{cases} \vec{F} = [\mathrm{P}, \mathrm{Q}, \mathrm{R}] \\ \overrightarrow{\mathrm{dr}} = [\mathrm{dx}, \mathrm{dy}, \mathrm{dz}] \end{cases}$$

ולכן:

$$\int_L \vec{F} \cdot \overrightarrow{dr} = \int_L Pdx + Qdr + Rdz$$

ז"א:

$$\mathrm{L}: \begin{cases} x = x(t) \\ \mathrm{y} = \mathrm{y}(t) \\ \mathrm{z} = \mathrm{z}(t) \end{cases} \qquad \begin{cases} dx = \dot{x}dt \\ \mathrm{dy} = \dot{\mathrm{y}}\mathrm{dt} \\ \mathrm{dz} = \dot{\mathrm{z}}\mathrm{dz} \end{cases} \qquad t_1 \leq t \leq t_2$$

$$\int_{t=t_1}^{t_2} \left[P\left(x_{(t)}, y_{(t)}, z_{(t)}\right)\dot{x} + Q\left(x_{(t)}, y_{(t)}, z_{(t)}\right)\dot{y} + R\left(x_{(t)}, y_{(t)}, z_{(t)}\right)\dot{z}\right]dt$$

דג'

חשב $\int_L \frac{\mathrm{x}^2-1}{y}\mathrm{dx} + \frac{1}{\mathrm{x}-1}\mathrm{dy}$ ← $\begin{cases} P = \frac{\mathrm{x}^2-1}{y} \\ \mathrm{Q} = \frac{1}{\mathrm{x}-1} \end{cases}$

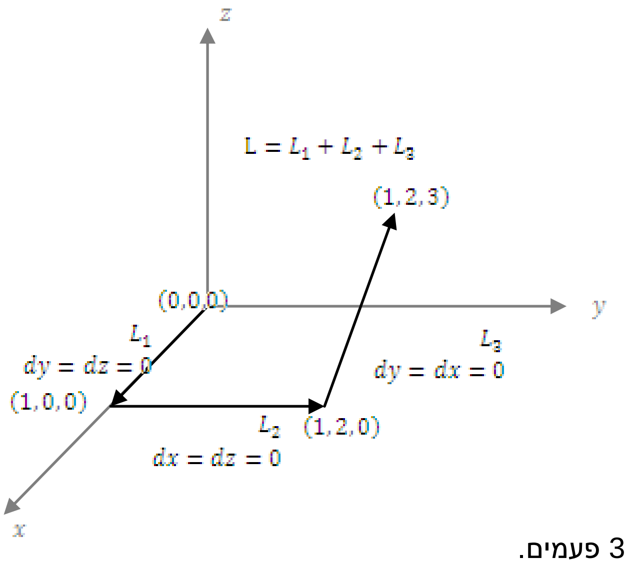
על העקום L: $\vec{\mathrm{r}}_{(\mathrm{t})} = \left[1 + \mathrm{t}^2, \frac{2}{3}\mathrm{t}^3\right]$ ← $\begin{cases} \vec{x}_{(t)} = 1 + \mathrm{t}^2 \\ \vec{y}_{(t)} = \frac{2}{3}\mathrm{t}^3 \end{cases}$

בתחום: $0 \leq \mathrm{t} \leq 1$

$$\begin{cases} \dot{x} = 2t \\ \dot{y} = 2t^2 \end{cases}$$

$$\int_L \frac{x^2-1}{y}dx + \frac{1}{x-1}dy = \int_{t=0}^{1}\left[\frac{(1-t^2)^2-1}{\frac{2}{3}t^2} * 2t + \frac{1}{1+t^2-1} * 2t^2\right]dt$$

$$= \int_{t=0}^{1}\frac{(2t^2+t^4)2t}{\frac{2}{3}t^2}dt + \int_{t=0}^{1}\frac{2t^2}{t^2}dt = 9$$



דג'

חשב $\int_L \vec{F} \cdot \overrightarrow{dr}$

על השדה הווקטורי:

$$\vec{F} = (3x^2yz + 2x)\hat{\imath} + 3xy^2(z+1)\hat{\jmath} + 4xyz^3\hat{k}$$

ועבור העקום המורכב מהקטעים הישרים:

$$(0,0,0) \to (1,0,0) \to (1,2,0) \to (1,2,3)$$

מכיוון שהעקום מחולק ל- 3 קטעים, אז עושים אינטגרל קווי 3 פעמים.

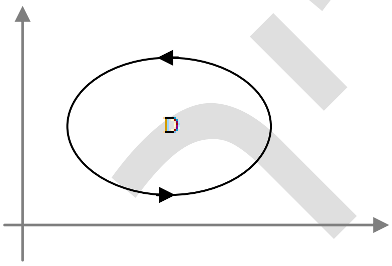
$$\int_L \vec{F} \cdot \overrightarrow{dr} = \int_{x=0}^{1} 2x\,dx = x^2\Big|_{x=0}^{1} = 1$$

$$\int_{L_2} \vec{F} \cdot \overrightarrow{dr} = \int_{y=0}^{2} 3 * 1 * 1 * y^2 dy = y^3\Big|_{y=0}^{2} = 8$$

$$\int_{L_3} \vec{F} \cdot \overrightarrow{dr} = \int_{z=0}^{3} 4 * 1 * 2 * z^3 dz = \frac{8 * z^4}{4}\Big|_{z=0}^{3} = 2 * 81 = 162$$

$$\int_L \boldsymbol{\vec{F} \cdot \overrightarrow{dr} = 171}$$

<u>**משפט גרין במישור**</u>



עקום סגור הוא בכיוון **חיובי** אם הוא סובב נגד כיוון השעון ובכיוון **שלילי** אם סובב בכיוון השעון.

אינטגל קווי מסוג שני על עקום סגור L בכיוון חיובי מסומן כך:

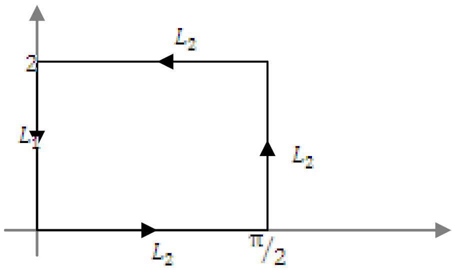
$$\wedge \quad \oint$$

<u>משפט גרין</u>

D תחום מישורי פשוט מוקף בעקום L. $\vec{F} = [P, Q]$ גזירה ברציפות (נגזרות חלקיות רציפות), אזיי:

$$\oint_L P dx + Q dy = \oint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$$

דג'



חשב $\int_L x^2 e^{-y} dx + y^3 \sin x\, dy$

על המלבן שבציור:

$$\begin{cases} 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \\ 0 \le y \le 2 \end{cases}$$

$$I = \iint_D (\dot{Q}_x - \dot{P}_y) dxdy = \iint_D y^3 \cos x\, dxdy + \iint_D x^2 e^{-y} dxdy$$

$$= \int_{y=0}^{2} y^3 dy \int_{x=0}^{\pi/2} \cos x\, dx + \int_{x=0}^{\pi/2} x^2 dx \int_{y=0}^{2} e^{-y} dy$$

$$= \frac{y^4}{4}\bigg|_{y=0}^{2} * \sin x\bigg|_{x=0}^{\pi/2} + \frac{x^3}{3}\bigg|_{x=0}^{\pi/2} * e^{-y}\bigg|_{y=0}^{2} = 4 + \frac{\pi^3}{24}(1 - e^{-2})$$

<u>שדה משמר (פוטנציאלי)</u>

<u>שדה משמר</u>

יהיה $\vec{F} = P(x,y)\hat{\imath} + Q(x,y)\hat{\jmath}$ שדה ווקטורי רציף בתחום D.

אם קיימת פ' $U(x,y)$ כך ש- $\vec{F} = \nabla U$ אזי נקרא לשדה זה משמר (פוטנציאלי) ולפונקציה U הפוטנציאל של שדה F.

מסקנות:

- $\vec{F}$ שדה רציף בתחום קשיר D הינו משמר אמ"ם יש לשדה פ' פוטנציאל.
- $\vec{F}$ שדה משמר אם קיימת $U_{(x,y)}$ המקיימות $du = Pdx + Qdy$.

<u>הגדרה</u>

תחום פשוט קשר הוא תחום ששפתו הוא קו סגור שאינו חותך את עצמו (ללא חורים)

<u>משפט</u>

אם $\vec{F}$ שדה רציף בעל נגזרות חלקיות רציפות בתחום פשוט קשר D, אזיי:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \leftrightarrow \oint_L \vec{F}\cdot\overrightarrow{dr} \leftrightarrow \int_A^B \vec{F}\cdot\overrightarrow{dr} = \begin{matrix}\text{לא תלוי במסלול}\\ \text{הנמצא ב } D \text{ } A,B\end{matrix} \leftrightarrow \begin{matrix}\text{קיימת } U_{(x,y)} \text{ סקלרית יחידה}\\ \text{עד כדי קבוע רציפה המקיימת}\end{matrix}$$

$$du = Pdx + Qdy$$

$$\rightarrow \int_A^B Pdx + Qdy = U(A) - U(B)$$

<u>מסקנה</u>

אם $\vec{F}$ מוגדר בתחום פשוט קשר D ושייך ל- C^1 אזיי הוא משמר אמ"ם $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$.

<u>הערה</u>

אם $\vec{F}$ שייך ל- C^1 בתחום D לא פשוט קשר, אזיי $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$, הוא תנאי הכרחי ש- $\vec{F}$ ישמר בתחום D, ז"א שאם תנאי זה מתקיים זה עדיין לא אומר ש-$\vec{F}$ משמר בתחום D.

<u>טענות</u>

- יהיה $\vec{F}$ רציף בתחום פשוט קשר D פרט לנק' M, אם בנוסף $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ אזיי כל האינטגרלים לאורך העקומים הסגורים כלשהם המקיפים את הנק' M מקבלים אותו ערך.
- $\mathrm{rot}\vec{F} = 0$ הוא תנאי הכרחי אך לא מספיק, יכול להיות שדה $\vec{F}$ ש- $\mathrm{rot}\vec{F} = 0$ אך אינו משמר בתחום הנתון.
- אם התחום לא פשוט קשר, $\vec{F}$ יכול לשמר בתחום D אם קיימת לו פ' פוטנציאל ואז לכל נק' יש סביב כדורית בתחום ההגדרה בה $\mathrm{rot}\vec{F} = 0$.
- אם $\vec{F}$ שדה המקיים $\vec{\nabla} \times \vec{F} \neq 0$ אזיי $\vec{F}$ לא משמר רק אם היא בעל נגזרות חלקיות רציפות.

<u>מציאת פונקציית פוטנציאל באופן כללי: U</u>

$$U_{(x,y,z)} = \int_{x_0}^{x} P_{(x,y,z)}dx + \int_{y_0}^{y} Q_{(x_0,y,z)}dy + \int_{z_0}^{z} R_{(x_0,y_0,z)}dz + C$$

$$\begin{cases} \dot{U}_x = P_{(x,y,z)} \\ \dot{U}_y = Q_{(x,y,z)} \\ \dot{U}_z = R_{(x,y,z)} \end{cases}$$

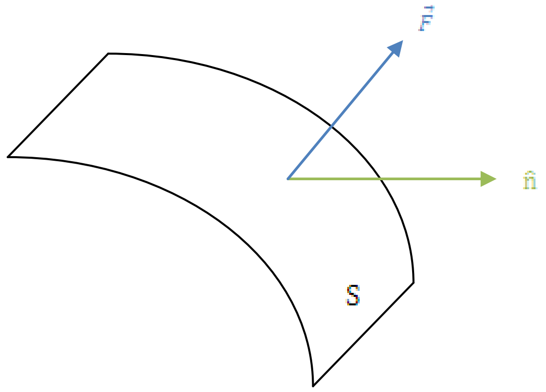
<u>הערה</u>

עם לשדה יש נק' סינגולרית, אז צריך קודם כל לבדוק האם מתקיים $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ (אם לא מתקיים, אזי השדה אינו משמר). אח"כ יש לבדוק סביב הנק' הסינגולרית במסלול הסגור האם מקבלים $\oint_L \vec{F} \cdot \overrightarrow{dr} = 0$.

הכי נוח זה לבחור מעגל ברדיוס 1 $\left(r: \begin{cases} x = \cos\theta \\ y = \sin\theta \end{cases}\right)$ ולהקיף הקפה מלאה $(0 \leq \theta \leq 2\pi)$.

<u>**אינטגרל משטחי מסוג שני**</u>

$$\iint_S \vec{F}\cdot\hat{n}ds$$



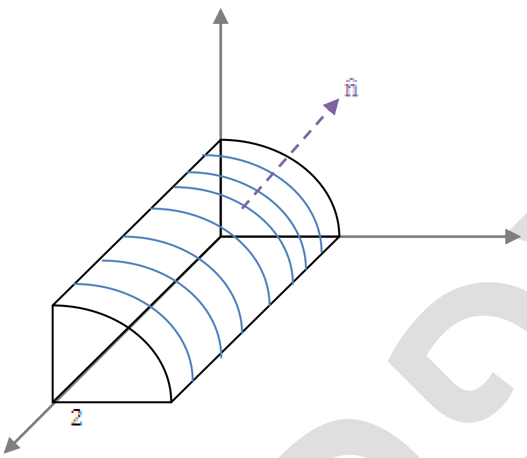
זהו בעצם השטף *(Flux)* של השדה דרך המשטח.

עבור ההצגה הפרמטרית:

$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases}$$

$$\vec{F}_{(u,v)} = [x_{(u,v)}, y_{(u,v)}, z_{(u,v)}]$$

$$\iint_S \vec{F}\cdot\hat{n}ds = \iint_{(u,v)} \vec{F}\left(x_{(u,v)}, y_{(u,v)}, z_{(u,v)}\right)\cdot(\dot{r}_u \times \dot{r}_v)dudv$$



דג'

חשב את השטף של השדה:

$$\vec{F} = e^{x^2}\hat{\imath} + xy^2z\hat{\jmath} + xyz^2\hat{k}$$

על המשטח:

$$\begin{cases} y^2 + z^2 = 9 \\ y,z \geq 0 \\ 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

הפרמטריזציה של המשטח:

$$\begin{cases} x = v \\ y = 3\cos u \\ z = 3\sin u \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 \leq v \leq 2 \\ 0 \leq u \leq {}^{\pi}/_{2} \end{cases}$$

$$\vec{r}_{(u,v)} = [v, 3\cos u, 3\sin u]$$

$$\dot{r}_u \times \dot{r}_v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & -3\sin u & 3\cos u \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = [0, 3\cos u, 3\sin u]$$

רכיב ה- z יצא חיובי, ולכן משתמשים בו. כי רוצים נורמל שיוצא החוצה.

$$\iint_S \vec{F}\cdot\hat{n}ds = \int_{u=0}^{\pi/2} du \int_{v=0}^{2} dv\left[e^{x^2}, xy^2z, xyz^2\right]\cdot[0{,}3\cos u\,, 3\sin u]$$

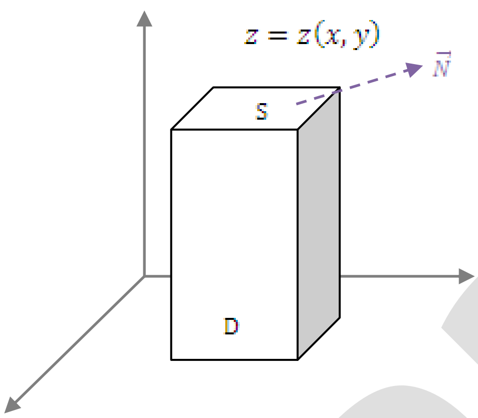
$$= \int_{u=0}^{\pi/2} du \int_{v=0}^{2} [v(3\cos u)^2 3\sin u * 3\cos u + v * 3\cos u\,(3\sin u)^2$$

$$* 3\sin u]dv = 81 \int_{v=0}^{2} vdv \int_{u=0}^{\pi/2} (\cos u^3 \sin u + \sin u^3 \cos u)du$$

$$= 81 \int_{v=0}^{2} vdv \int_{u=0}^{\pi/2} \cos u \sin u\,(\cos u^2 + \sin u^2)du$$

$$= 81 * \frac{v^2}{2}\Bigg|_{v=0}^{2} * \int_{u=0}^{\pi/2} \frac{1}{2}\sin 2u\, du = 162 * \frac{1}{4}\cos 2u\Bigg|_{u=0}^{\pi/2} = 81$$

<u>שימוש ב- (x,y) עצמם כפרמטרים</u>



$$\vec{r} = [x, y, z_{(x,y)}]$$

$$\vec{N} = \dot{r}_u \times \dot{r}_v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & \dot{z}_x \\ 0 & 1 & \dot{z}_y \end{vmatrix} = [-\dot{z}_x, -\dot{z}_y\,, 1]$$

ולכן:

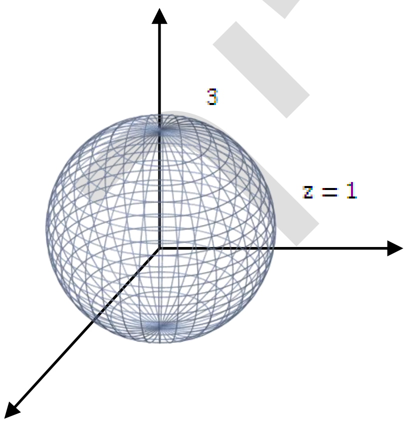
$$\iint_S \vec{F}\cdot\hat{n}ds = \iint_{(xy)} \vec{F}(x,y,z)\cdot[-\dot{z}_x, -\dot{z}_y, 1]dxdy$$

דג'

חשב את השטף של השדה:

$$\vec{F} = -y\hat{\imath} + x\hat{\jmath} + \frac{1}{1+x^2+y^2}\hat{k}$$

על הכיפה הכדורית (כלפי מעלה):

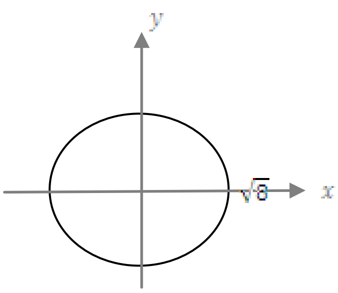


$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2 = 9 \\ z \geq 1 \end{cases}$$

$$Z = z(x,y) = \sqrt{9-x^2-y^2}$$

$$\vec{N} = [-\dot{z}_x, -\dot{z}_y, 1] = \left[\frac{-x}{\sqrt{9-x^2-y^2}}, \frac{y}{\sqrt{9-x^2-y^2}}, 1\right]$$

העיגול D:



$$x^2+y^2=8$$

$$\iint_S \vec{F}\cdot\hat{n}ds=\iint_D\left[-Y,X,\frac{1}{1+x^2+y^2}\right]\cdot\left[\frac{-x}{\sqrt{9-x^2-y^2}},\frac{y}{\sqrt{9-x^2-y^2}},1\right]dxdy$$

$$=\iint_D\left(\frac{-yx}{\sqrt{9-x^2-y^2}}+\frac{xy}{\sqrt{9-x^2-y^2}}+\frac{1}{1+x^2+y^2}\right)dxdy$$

$$=\int_{\theta=0}^{2\pi}d\theta\int_{r=0}^{\sqrt{8}}r*\frac{1}{1+r^2}dr=2\pi*\frac{1}{2}\ln(1+r^2)\Big|_{r=0}^{\sqrt{8}}=\pi\ln 9$$

דיוורגנט ורוטור של שדה ווקטורי

$$\vec{F} = P\hat{\imath} + Q\hat{\jmath} + R\hat{k}$$

$$DIV(\vec{F}) = \vec{\nabla}\cdot\vec{F} = \dot{P}_x + \dot{Q}_y + \dot{R}_z$$

$$\overrightarrow{ROT}(\vec{F}) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = (\dot{R}_y - \dot{Q}_z)\hat{\imath} + (\dot{P}_z - \dot{R}_x)\hat{\jmath} + (\dot{Q}_x - \dot{P}_y)\hat{k}$$

<u>הערות</u>

- $\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{F}) = 0$
- $\vec{\nabla}\times(\nabla f) = 0$
- אם $DIV(\vec{F})$, אז כל השטף בכיוון החוצה (או פנימה), על כל משטח סגור הוא אפס וזה אומר שהשטף שחודר לגוף שווה לשטף שיוצא ממנו.
  שדה כזה (שבו $DIV(\vec{F}) = 0$) נקרא שדה ללא מקורות וללא בורות.

משפט גאוס

יהיה V גוף פשוט חסום במרחב ע"י משטח S, יהיה $\vec{F}$ שדה ווקטורי.

$$\oiint_S \vec{F}\cdot\hat{n}ds = \iiint_V DIV(\vec{F})dv$$

הסימון $\oiint$ מראה שטף על משטח סגור S מבפנים החוצה.

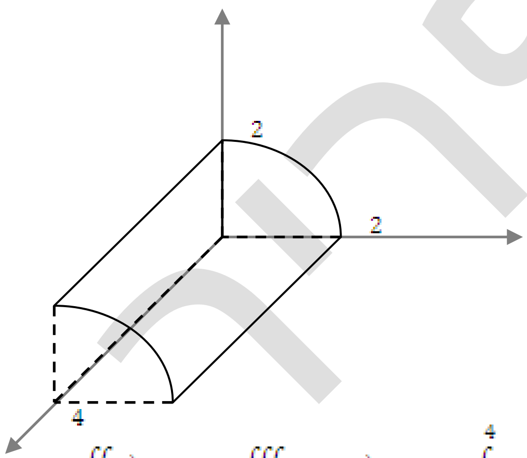
דג'

חשב את השטח של השדה:

$$\vec{F} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}$$

על שפת הגוף שבציור, מבפנים החוצה.

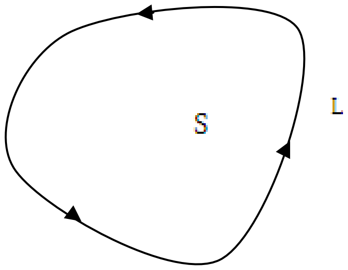
לפי גאוס:



$$\oiint_S \vec{F}\cdot\hat{n}ds = \iiint_V DIV(\vec{F})dv = \int_{x=0}^{4}dx\int_{y=0}^{2}dy\int_{z=0}^{\sqrt{4-y^2}}3dz = \cdots = 3 * \text{נפח הגליל} * \frac{1}{4}$$

$$= 3 * \frac{1}{4}\pi 2^2 * 4 = 12\pi$$

משפט סטוקס



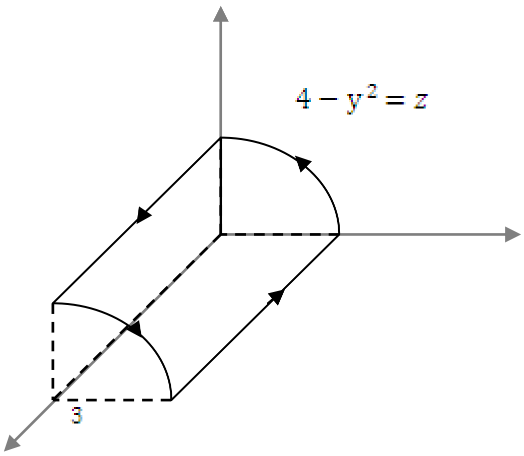
יהיה L תייל ועקום פשוט סגור במרחב המקיף משטח פתוח S.
כאשר הכיוון $\hat{n}$ נקבע לפי כלל היד הימנית (או הבורג הימני).
אז:

$$\oint_L \vec{F}\cdot\vec{dr} = \iint_S \mathrm{ROT}(\vec{F})\cdot\hat{n}ds$$

הערה

כאשר עושים לפי הגדרה אז צריך לנרמל את הנורמל (<= $\hat{n}$). אבל כאשר עושים לפי היטלים אז לא צריך לנרמל את הנורמל (<= $\vec{N}$).

דג'



$$\vec{F} = [xy, yz, zx]$$

$$S: \begin{cases} z = 4 - y^2 \\ y, z \geq 0 \\ 0 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

$$\mathrm{ROT}(\vec{F}) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xy & yz & zx \end{vmatrix} = [-y, -z, -x]$$

המשטח S:

$$\vec{r}_{(x,y)} = [x, y, 4 - y^2]$$

$$\vec{r}_x \times \vec{r}_y = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2y \end{vmatrix} = [0, 2y, 1] = \vec{N}$$

$$\iint_D \mathrm{ROT}(\vec{F})\cdot\vec{N}ds = \iint_D [-y, -z, -x]\cdot[0, 2y, 1]dydx = \iint_D (-2zy - x)dxdy$$

$$= -\iint_{D:\begin{cases}0\leq x\leq 3\\ 0\leq y\leq 2\end{cases}} [x + 2(4 - y^2)]dxdy$$

משפט

יהיה $\vec{F}$ שדה גזיר פעמיים ברציפות, אז $\iint_S \mathrm{ROT}(\vec{F})\cdot\hat{n}ds$ שווה לאפס עבור כל משטח סוג פשוט S.

<u>**שדה משמר במרחב**</u>

זהו שדה שבו כל אינטגרל $\int_{\mathrm{L}} \vec{\mathrm{F}} \cdot \mathrm{dv}$ שווה אפס על כל עקום סגור בשדה.

לפי משפט סטוקס ראינו שאם $\mathrm{ROT}(\vec{\mathrm{F}}) = \vec{0}$ אז $\vec{\mathrm{F}}$ משמר. מסתבר שגם ההפך, נכון לגבי תחומים פשוטים כלמור, אם לתחום פשוט השדה משמר אז הרוטור שלו לאפס.
מזה יוצא שהאינטגרל לאורך **קו פתוח** יהיה תלוי לא בקו עצמו, אלא בקבוצות הקצה.

מסתבר שגם כאן יש פונקציית פוטנציאל $\mathrm{V} = \mathrm{V}(x, y, z)$ כך ש-

$$\vec{\mathrm{F}} = [\mathrm{P}, \mathrm{Q}, \mathrm{R}] = ard\ V = [\grave{V}_x, \grave{V}_y, \grave{V}_z]$$

כלומר:

$$\int_{L_1} \vec{\mathrm{F}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{dr}} = \int_{\mathrm{L}_1} \mathrm{P}_{(\mathrm{x,y,z})} \mathrm{dx} + Q_{(\mathrm{x,y,z})} dy + R_{(\mathrm{x,y,z})} dz = \int_{\mathrm{L}_1} \grave{V}_x \mathrm{dx} + \grave{V}_y dy + \grave{V}_z dz = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \mathrm{dv}$$
$$= \mathrm{v(B)} - \mathrm{V(A)}$$