Version 1.0

משוואות דפרנציאליות רגילות /ח

104131

חורף 2007/2008

Or.Tzafrir@Gmail.com

תוכן עניינים

הגדרות בסיסיות

הגדרה – משוואה דיפרנציאלית רגילה מסדר n

$$f\left(x, y, \acute{y}, \cdots, y^{(n)}\right) = 0$$

הגדרה – משוואה דיפרנציאלית ליניארית מסדר n

$$a_{n(x)}y^{(n)} + a_{n-1(x)}y^{(n-1)} + \cdots + a_{1(x)}\acute{y} + a_{0(x)}y = g(x) \qquad (1)$$

הגדרה

- אם $\boldsymbol{g(x) \neq 0}$ אזיי המשוואה נקראת **לא הומוגנית.**
- אם $\boldsymbol{g(x) = 0}$ אזיי המשוואה נקראת **הומוגנית.**

המשוואה ההומוגנית שמתאימה למשוואה (1) היא:

$$a_{n(x)}y^{(n)} + a_{n-1(x)}y^{(n-1)} + \cdots + a_{1(x)}\acute{y} + a_{0(x)}y = 0 \qquad (2)$$

טענה

אם y_1, y_2 פיתרונות של (1), אזיי $(y_1 - y_2)$ הוא פיתרון של (2).

טענה

אם y_h פיתרון של (2) ו- y_p פיתרון של (1), אזיי $(y_p + y_h)$ הוא פיתרון כללי של (1).

סיכום טענות קודמות

פיתרון כללי של y שווה ל: $y = y_h + y_p$

y_h – פיתרון כללי של (2).

Y_p – פיתרון פרטי של (1).

פיתרון סינגולרי

פיתרון של מישדי"פ שאיננו חלק מהפיתרון הכללי.

כלומר לא קיים **קבוע** C כך שע"י הצבתו בפיתרון הכללי נקבל את הפיתרון הסינגולרי.

<u>שיטת ווריאציית פרמטר למציאת פיתרון פרטי של</u>(1)

<u>דג'</u>

$\grave{y} + y = e^x$ (1)

נסתכל על:

$\grave{y} = -y$ (2)

$$\frac{\grave{y}}{y} = -1$$

$$\ln|y| = -x + C_1$$

$$|y| = e^{-x+C_1} = e^{-x} * e^{C_1} = Ce^{-x}$$

כדי שנקבל גם y שלילי:

$$y_h = Ce^{-x}, \qquad C\epsilon\mathbb{R}$$

עכשיו משתמשים בשיטת ווריאציית פרמטר למציאת פיתרון פרטי של (1):

$$y_p = C_{(x)}e^{-x}$$

גוזרים ומציבים המשוואה הראשונית:

$$\grave{C}_{(x)}e^{-x} \cancel{- C_{(x)} * e^{-x}} + \cancel{C_{(x)} * e^{-x}} = e^x$$

(תמיד החלקים הנ"ל יצטמצמו)

$$\grave{C}_{(x)}e^{-x} = e^x$$

$$\grave{C}_{(x)} = e^{2x}$$

$$C_{(x)} = \frac{1}{2}e^{2x} + C$$

(אם לא כותבים C אזיי מקבלים פיתרון פרטי, אחרת מקבלים פיתרון כללי)

$$y_{(x)} = \left(\frac{1}{2}e^{2x} + C\right)e^{-x}$$

$$\boldsymbol{y_{(x)} = Ce^{-x} + \frac{1}{2}e^x}$$

שיטת גורם האינטגרציה

$\grave{y} + p_{(x)}y = g_{(x)} \quad /* \mu_{(x)}$

$\mu[\grave{y} + p_{(x)}y] = \mu g_{(x)}$

מקבלים ש:

$\boldsymbol{\mu = e^{+\int p_{(x)}dx}}$

$$\boldsymbol{y = \frac{1}{\mu}\left[\int \mu g dx + C\right]}, \qquad \boldsymbol{C} > 0$$

משפט קיום ויחידות עבור מד"ר לא ליניאריות

נתונה המשוואה הדיפרציאלית הבאה:

$$\acute{y} = \mathrm{f}_{(x,y)}$$

עם תנאי התחלה כאשר $f_{(x,y)}$ ו- $\frac{\partial \mathrm{f}_{(x,y)}}{\partial y}$ רציפות התחום מלבני מסויים:

$$\mathrm{D} = \{\alpha < x < \beta, \qquad \gamma < y < \delta\}$$

תהי $\mathrm{P} \in (x_0, \mathrm{y}_0)$ שם נתונים תנאי ההתחלה.

<u>טענה</u>

קיים למשוואה הדיפרציאלית הנ"ל ולתנאי ההתחלה פיתרון אחד ויחיד המוגדר ושייך ל-C^{-1}, כלומר בעל נגזרת ראשונה רציפה באיטרול מסויים Δ סביב x_0.

$$\Delta = (x_0 - h, x_0 + h)$$

כלומר פיתרון לוקאלי.

משוואת ברנולי

$$\tilde{B}: \qquad \acute{y} + P_{(x)}y = g_{(x)}y^n , \qquad (n \in \mathbb{R})$$

$$\acute{y} * y^{-n} + P_{(x)}y^{1-n} = g_{(x)}$$

הצבה: $V_{(x)} = y_{(x)}{}^{1-n}$

$$\acute{V} = (1-n)y^n\acute{y}$$

$$\frac{\acute{V}}{1-n} = y^{-n}\acute{y}$$

מציבים חזרה במשוואה המקורית(לאחר החילוק) ומקבלים:

$$\frac{\acute{V}}{1-n} + P_{(x)}V = g_{(x)}$$

דג'

$$\acute{y} = y^4 \cos x + y \tan x$$

($y = 0$ פיתרון)

$$y^{-4}\acute{y} = y^{-3}\tan x + \cos x$$

$$V = y^{-3}$$

$$\acute{V} = -3y^{-3}\acute{y}$$

$$-\frac{1}{3}\acute{V} = -V\tan x + \cos x$$

$$\acute{V} = -3V\tan x - 3\cos x$$

נפתור קודם משוואה הומוגנית:

$$\acute{V} = -3V\tan x$$

$$\frac{\acute{V}}{V} = -3\tan x$$

$$\ln|V| = +3\ln|\cos x| + C_1$$

$$\ln|V| - 3\ln|\cos x| = C_1$$

$$\ln\frac{|V|}{|\cos x|^3} = C_1$$

$$e^{c_1} = \frac{|V|}{|\cos x|^3}$$

$$C = \frac{V}{(\cos x)^3}$$

$$V = C_{(x)} * (\cos x)^3$$

<u>משוואות פרידות</u>

<u>הגדרה</u>

המשוואה הדיפרנציאלית הבאה:
$\grave{y} = f_{(x,y)}$

תקרא משוואה פרידה אם ניתן לכתוב את אגף ימין של המשוואה הדיפרנציאלית בצורה הבאה:

$$f_{(x,y)} = M_{(x)}N_{(y)}$$

את $f_{(x,y)}$ נכתוב באופן הבא:

$$f_{(x,y)} = M_{(x)}N_{(y)} = -\frac{f_{1(x)}}{f_{2(x)}} * \frac{g_{1(y)}}{g_{2(y)}}$$

נניח כי כל הפ' רציפות ומונה ומכנה לא מתאפסים יחד.
נסמן את התחום המשותף בו $f_{1(x)}$ ו- $f_{2(x)}$ רציפות ע"י: (α, β).

ואת התחום המשותף בו $g_{1(y)}$ ו- $g_{2(y)}$ רציפות ע"י: (γ, δ).

התחום המשותף בו כל הפ' רציפות נסמנו ע"י:

$$D = \begin{cases} \propto < x < \beta \\ \gamma < y < \delta \end{cases}$$

כאשר המונה מתאפס ($f_{1(x)}$ או $g_{1(y)}$) פירושו כי הפיתרון מקביל לציר ה- x.

כאשר המכנה מתאפס ($f_{2(x)}$ או $g_{2(y)}$) מתקבל ערך אינסופי לנגזרת, כלומר הקבלה לציר y.

כאשר המכנה מתאפס:
$$f_{2(x)} * g_{2(y)} = 0$$

במקום להסתכל על $\frac{dy}{dx}$ נסתכל על $\frac{dx}{dy}$ $\leftarrow$ $\frac{dx}{dy} = -\frac{f_{2(x)}g_{2(y)}}{f_{1(x)}g_{1(y)}}$

$$\grave{y} = \frac{dy}{dx} = -\frac{f_{1(x)}}{f_{2(x)}} * \frac{g_{1(y)}}{g_{2(y)}}$$

$$\frac{f_{1(x)}}{f_{2(x)}} + \frac{g_{2(y)}}{g_{1(y)}} * \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\int \frac{f_{1(x)}}{f_{2(x)}} dx + \int \frac{g_{2(y)}}{g_{1(y)}} dy = 0$$

$$\boldsymbol{\int \frac{f_{1(x)}}{f_{2(x)}} dx + \int \frac{g_{2(y)}}{g_{1(y)}} dy = C}$$

קיבלנו את הפיתרון הכללי המהווה משפחה חד פרמטרית $f_{(x,y)} = C$.

אנו חילקנו את המשוואה ב- $g_{1(y)}$ ו- $f_{2(x)}$, ולכן יש לבדוק חשש לפיתרון סינגולרית:

1. נניח כי $g_{1(y)} = 0$ עבור $y = \propto$ כלומר $g_{(\propto)} = 0$, ולכן $y = \propto$ חשוד כפיתרון סינגולרי.
2. נניח $f_{2(\beta)} = 0$ אזיי $x = \beta$ הוא חשוד כפיתרון סינגולרי.

<u>הכללה</u>

הכלל למשפחה שלמה של משוואות:

$$\grave{y} = \mathrm{f}_{(\mathrm{ax+by+c})}$$

כאשר a, b, c הם מספרים קבועים הפ' f נקראת הפ' של הישר.

הצבה:

$$ax + by + c = V_{(x)}$$

$$a + b\grave{y} = \grave{V}_{(x)}$$

$$\grave{y} = \frac{\grave{V} - a}{b}, \qquad (b \neq 0)$$

אולם: $\grave{y} = \mathrm{f}_{(\mathrm{ax+by+c})} = \mathrm{f}_{(\mathrm{V})}$

$$\frac{\grave{V} - a}{b} = f_{(\mathrm{V})}$$

$$\grave{V} = a + b * f_{(\mathrm{V})}$$

$$\frac{dV}{dx} = a + bf_{(V)}$$

$$\int \frac{dv}{a + bf_{(V)}} = \int dx + c$$

$$\int \frac{\boldsymbol{dv}}{\boldsymbol{a + bf_{(V)}}} - \mathbf{x} = \mathbf{C}$$

נותר לחפש פיתרונות סינגולרית.

משוואות מדויקות

הגדרה

משוואה מהצורה:

$$M_{(x,y)}\,dx + N_{(x,y)}\,dy = 0$$

נקראת מדוייקת אם קיימת פ' $f_{(x,y)}$ כך ש-

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\psi}{\partial x} = M_{(x,y)} \\ \dfrac{\partial\psi}{\partial y} = N_{(x,y)} \end{cases}$$

כמו כן, ניתן להוכיח ש-

$$\psi_{(x,y)} = C$$

קיבלנו משפחה חד פרמטרית של פיתרונות.

הפיתרון הכללי של מד"ר מדויקת הוא $\psi_{(x,y)} = C$ כאשר $\psi_{(x,y)}$ נקרא פונקצית פוטנציאל.

משפט

נתונה המשוואה:

$$M_{(x,y)}\,dx + N_{(x,y)}\,dy = 0$$

כאשר $M_{(x,y)}$ ו- $N_{(x,y)}$ רציפות ובעלות נגזרות ראשונות חלקיות רציפות.

טענה

תנאי הכרחי ומספיק לכך שהמשוואה הנ"ל (בתחילת המשפט) תהיה מדוייקת הוא:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

תנאי זה נקרא תנאי האינטגרביליות.

דג'

נתונה המשוואה המדוייקת:

$$(x^3 + y^3)dx + \left(f_{(x,y)} + 4x\right)dy = 0$$

כאשר: $f_{(x,x)} = 3x^3$

מצא: $f_{(x,y)} =?$ ופתור.

פיתרון:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

$$3y^2 = \acute{f_x} + 4$$

$$3y^2 - 4 = \acute{f_x}$$

$$f_{(x,y)} = 3y^2x - 4x + g_{(y)}$$

$$f_{(x,x)} = 3x^3 - 4x + g_{(x)} = 3x^3$$

$$\to g_{(x)} = 4x$$

$g_{(y)} = 4y$
$f_{(x,y)} = 3y^2x - 4x + 4y$
נציב $f_{(x,y)}$
$(x^3 + y^3)dx + (3y^2x + 4y)dy = 0$

$\psi_{(x,y)} = C$
$\frac{\partial\psi}{\partial x} = M_{(x,y)} = x^3 + y^3$
$\frac{\partial\psi}{\partial y} = N_{(x,y)} = 3y^2 + 4y$

מבצעים אינטגרציה לפי x ל- $\acute{\psi}_x$:
$\psi_{(x,y)} = \frac{x^4}{4} + y^3x + h_{(y)}$

גוזרים לפי y ואז משווים לגזירה הקודמת לפי y:
$\acute{\psi}_y = 3y^2x + \acute{h}_{(y)}$
$\acute{h}_{(y)} = 4y$
$h_{(y)} = 2y^2$
$\psi_{(x,y)} = \frac{x^4}{4} + y^3x + 2y^2 = C$

גורם האיטגרציה

נתונה המשוואה:

$$M_{(x,y)}dx + N_{(x,y)}dy = 0$$

ונניח כי מתקיים:

$$\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$$

כלומר המשוואה הדיפרנציאלית הנ"ל איננה מדוייקת.

הפ' $\mu_{(x,y)}$ נקראת גורם אינטגרציה (ג"א) של המשוואה הדיפרנציאלית, אם:

$$\mu_{(x,y)}M_{(x,y)}dx + \mu_{(x,y)}N_{(x,y)}dy = 0$$

היא מדוייקת.

שיטה למציאת ג"א:
$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu_{(x,y)}M_{(x,y)}\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left[\mu_{(x,y)}N_{(x,y)}\right]$$
$$\frac{\partial\mu}{\partial y}M + \mu\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial\mu}{\partial x}M + \mu\frac{\partial M}{\partial x}$$

<u>מקרים פרטיים:</u>

1. $\mu_{(x,y)} = \mu_{(x)}$

$$\mu\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial \mu}{\partial x}M+\mu\frac{\partial M}{\partial x}$$

$$\frac{\dot{\mu}_{(x)}}{\mu_{(x)}}=\frac{M_y-N_c}{N}$$

1.1. אם אגף **ימין תלוי ב-** $\boldsymbol{x}$ בלבלד:

$$\boldsymbol{\mu_{(x)}=e^{\int\frac{M_y-N_x}{N}dx}}$$

2.1. אם הביטוי באגף **ימין תלוי ב-** $\boldsymbol{y}$ בלבד:

$$\boldsymbol{\mu_{(y)}=e^{\int\frac{M_y-N_x}{-M}dy}}$$

2. ייתכן מאוד והמקרים הראשון והשני לא מתקיימים, ולכן נחפש ג"א מסוג אחר $\left(\mu=\mu_{(x,y)}\right)$:

<u>דג'</u>

מצא את פיתרון המשוואה

$$(y+xy^2)dx+(x-yx^2)dy=0$$

העובר דרך $(1,-1)$ ע"י מציאת ג"א מהצורה $\mu_{(x,y)}=\mu_{(x*y)}$ (חייבים לתת את הצורה של µ).

נסמן: $Z_{(x,y)}=x*y$

$$\begin{cases}\dot{Z}_x=y\\ \dot{Z}_y=x\end{cases}$$

$$\mu=\mu_{(Z)}$$

$$\dot{\mu}_x=\dot{\mu}*\dot{Z}_x=\dot{\mu}*y$$

$$\dot{\mu}_y=\dot{\mu}*\dot{Z}_y=\dot{\mu}*x$$

נכפיל את המשוואה ב- µ ונדרוש שתהיה מדוייקת:

$$\mu(y+xy^2)dx+\mu(x-yx^2)dy=0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\dot{\mu}x*(y+xy^2)+\mu*(1+2xy)$$

$$\frac{\partial N}{\partial x}=\dot{\mu}y*(x-yx^2)+\mu(1-2xy)$$

ונדרוש: $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$

$$\dot{\mu}x*(y+xy^2)+\mu*(1+2xy)=\dot{\mu}y*(x-yx^2)+\mu(1-2xy)$$

$$\dot{\mu}(2x^2y^2)=\mu(-4xy)$$

$$\frac{\dot{\mu}}{\mu}=-\frac{4xy}{2x^2y^2}=\frac{-2}{xy}=\frac{-2}{Z}$$

$$\ln\mu=-2\ln Z$$

$$\mu=Z^{-2}=\frac{1}{(xy)^2}$$

משפחות אורתוגונליות

איך מוצאים משפחה אורתוגונלית למשפחת עקומות נתונה?

א׳. חילוף הקבוע של המשפחה הנתונה.
ב׳. גזירת המשפחה הנתונה.
ג׳. הצבת הקבוע מ- א' ב- ב', ומציאת $\grave{y}$.
ד׳. מציאת $\grave{y}_{ort}$ ע"י הנוסחה $\grave{y}_{ort} = -\frac{1}{\grave{y}}$ (מקבלים מד"ר).
ה׳. מציאת המשפחה האורתוגונלית ע"י פיתרון המד"ר מ- ד'.

<u>דג'</u>

מצא את העקומה האורתוגונלית למשפחה הנתונה ע"י המשוואה:

$$x - e^{Cy} = 0$$

העוברת דרך (e, e).

א׳.

$$x = e^{Cy}$$
$$\ln x = Cy$$
$$C = \frac{\ln x}{y}$$

ב׳. נגזור:

$$1 - C\grave{y}e^{Cy} = 0$$

ג׳. נציב:

$$1 - \frac{\ln x}{y} * \grave{y}e^{\ln x} = 0$$
$$\grave{y} = \frac{y}{x \ln x}$$

ד׳.

$$\grave{y}_{ort} = -\frac{1}{\grave{y}} = \frac{-x \ln x}{y}$$

ה׳.

$$\frac{Dy}{dx} = \frac{-x \ln x}{y}$$
$$\int y dy = \int -x \ln x \, dx$$

בחלקים: $-\frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + \tilde{C}$

המשפחה האורתוגונלית: $y^2 = -x^2 \ln x + \frac{x^2}{2} + C$

ת"ה (e, e) למציאת C:

$$e^2 = -e^2 \ln e + \frac{e^2}{2} + C$$
$$C = \frac{3}{2}e^2$$

$$y = \pm\sqrt{-x^2\ln x + \frac{x^2}{2} + \frac{3}{2}e^2}$$

ולפי תנאי התחלה מקבלים:

$$y = \sqrt{-x^2\ln x + \frac{x^2}{2} + \frac{3}{2}e^2}$$

משוואות ליניאריות מסדר $n \geq 2$, צורה כללית

$$* \quad y^{(n)} + a_{n-1_{(x)}} y^{(n-1)} + \cdots a_{0_{(x)}} y = g_{(x)}$$

- אם $g_{(x)} \neq 0$, אזיי המשוואה אי הומוגנית.
- אם $g_{(x)} = 0$, אזיי המשוואה הומוגנית ופיתרונה y_p.

הפיתרון הכללי של * :

$$y_{(x)} = y_h + y_p$$

y_h - פיתרון כללי של המשוואה.

y_p – פיתרון פרטי של האי הומוגנית.

$$y_h = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_n y_n$$

$y_1, \cdots, y_n$ פיתרונות בת"ר, הפותרים את ההומוגנית $*_h$ ונקראת מערכת יסודית של פיתרונות.

כדי למצוא פיתרון פרטי יש צורך ב- n תנאי התחלה.

$$\begin{cases} y_{(x_0)} = k_0 \\ y'_{(x_0)} = k_1 \\ y''_{(x_0)} = k_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ y^{(n-1)}{}_{(x_0)} = k_{n-1} \end{cases}$$

- פיתרון של משוואה הומוגנית הוא הפרש של 2 פיתרונות פרטיים של האי הומוגנית.
- למד"ר הומוגנית תמיד הפיתרון הטריוויאלי $y \equiv 0$.

שיטת הורדת הסדר / שיטת דלאמבר

$$y'' + p_{(x)}y' + q_{(x)}y = g_{(x)}$$

$$y_h = C_1y_1 + C_2y_2$$

כאשר y_1, y_2 בת"ל ופותרים את את המשוואה ההומוגנית.

<u>שיטת דלאמבר</u>

אם y_1 (לא טריוויאלי) פיתרון של מד"ר הומוגנית מסדר2, נוכל למצוא את y_2 ע"י הצבה $y_2 = V_{(x)}y_1$, וע"י החלפת משתנים $z = V'$ ונקבל מד"ר מסדר 1.

נוסחא להורדת הסדר למציאת y_2:

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int p_{(x)}dx}}{{y_1}^2} dx$$

הערה: מתאים גם לאי הומוגנית.

<u>דג'</u>

נתונה המשוואה:

$$(1-x)y'' + xy' - y = x^2 - 2x + 2$$

ונתונים שניים מפיתרונותיה:

$$\begin{cases} y_1 = x^2 \\ y_2 = x^2 + e^x \end{cases}$$

א׳. מצא את הפיתרון הכללי.

ב׳. מצאו פיתרון המקיים: $\begin{cases} y'_{(0)} = 1 \\ y_{(0)} = 2 \end{cases}$

חיסור של שני הפיתרונות: $y_{1h} = e^x$

$$y_{(x)} = y_h + y_p = \left(C_1e^x + C_2y_{2_h}\right) + (x^2)$$

נציב פיתרון להומוגנית:

$$y_{2h} = V * y_{1h}$$

$$y_{2_h} = Ve^x$$

$$y' = e^x\left(V + V'\right)$$

$$y'' = e^x\left(V + 2V' + V''\right)$$

נציב בהומוגנית:

$$e^x(1-x)\left(V + 2V' + V''\right) + e^x * x * \left(V + V'\right) - Ve^x = 0$$

$$V''(1-x) + V'(2 - 2x + x) + \cancel{V(1 - x + x - 1)} = 0$$

$$V' = Z$$

$$Z'(1-x) + Z(2-x) = 0$$

$$\frac{\dot{Z}}{Z}=-\frac{x-2}{x-1}=-\left(\frac{x-1}{x-1}-\frac{1}{x-1}\right)=-1+\frac{1}{x-1}$$

$$\ln Z=-x+\ln(x-1)$$

$$Z=e^{-y}(x-1)$$

$$\acute{V}=e^{-x}(x-1)$$

בחלקים: $V_{(x)}=-\mathrm{x}\mathrm{e}^{-\mathrm{x}}$

$$y_{2_h}=V_{(x)}e^{x}=-x$$

$$y_{(x)}=C_1e^{x}+\tilde{C}_2x+x^2$$

$$\acute{y}=C_1e^{x}+C_2+2x$$

נציב ת"ה: $1=C_1+\mathrm{C}_2$

$$2=C_1$$

$$-1=C_2$$

$$y_{(x)}=2e^{x}-x+x^2$$

שיטת דאלמבר טובה גם לאי הומוגנית (במקרים נדירים, בלית ברירה).
היא מורידה סדר לאגף שמאל, ללא תלות באגף ימין.

<u>דג'</u>

$$x\acute{\acute{y}}-(2x+1)\acute{y}+(x+1)y=xe^{x}$$

נתון: $\mathrm{y}_1=\mathrm{e}^{\mathrm{x}}$ פיתרון של ההומוגנית המתאימה, מצא פיתרון כללי.

נציע פיתרון כללי מהצורה: $y=V_{(x)}e^{x}$

$$\acute{y}=\mathrm{e}^{\mathrm{x}}\left(\mathrm{V}+\acute{\mathrm{V}}\right)$$

$$\acute{\acute{y}}=e^{x}\left(V+2\acute{V}+\acute{\acute{V}}\right)$$

נציב את הפיתרון באי הומוגנית:

$$e^{x}\mathrm{x}\left(\mathrm{V}+2\acute{\mathrm{V}}+\acute{\acute{\mathrm{V}}}\right)-(2\mathrm{x}+1)\mathrm{e}^{\mathrm{x}}\left(\mathrm{V}+\acute{\mathrm{V}}\right)+(\mathrm{x}+1)\mathrm{e}^{\mathrm{x}}\mathrm{V}$$

$$\acute{\acute{V}}x-\acute{V}=x$$

$$Z=\acute{V}$$

$$\acute{Z}x-Z=x$$

$$\acute{Z}-\frac{1}{x}Z=1$$

נכפול בג"א:

$$\mu_{(\mathrm{x})}=\mathrm{e}^{\int-\mathrm{p}(\mathrm{x})\mathrm{dx}}=\mathrm{e}^{-\int\frac{1}{x}dx}=\frac{1}{\mathrm{x}}$$

$$\frac{1}{x}\acute{Z}-\frac{1}{x}Z=\frac{1}{x}$$

$$\left(\frac{1}{x}Z\right)^{\cdot} = \frac{1}{x}$$

$$\frac{Z}{x} = \ln x + C$$

$$\dot{V} = Z = x\ln x + Cx$$

$$V_{(x)} = \frac{x^2}{2}\ln x + \frac{x^2}{4} + \frac{C_1x^2}{2} + C_2$$

$$y_{(x)} = V_{(x)}e^x = e^x\left(\frac{x^2}{2}\ln x + \frac{x^2}{4} + \frac{C_1x^2}{2} + C_2\right)$$

$$y_{(x)} = y_p + C_1y_{2_h} + C_2y_{1_h} = \left(\frac{e^xx^2}{2}\ln x + \frac{e^xx^2}{4}\right) + \left(\frac{C_1e^xx^2}{2}\right) + (C_2e^x)$$

נכתב ע"י Or.Tzafrir@Gmail.com

משפט קיום ויחידות למד"ר מסדר $n \geq 2$

$$y^{(n)} + a_{n-1(x)}y^{(n-1)} + \cdots + a_{0(x)}y = g_{(x)}$$

אם $a_{i(x)}$ ו- $g_{(x)}$ רציפות ב- $(\propto, \beta)$ המכיל את x_0.

אז **קיים** פיתרון **יחיד**, המקיים את ת"ה:

$$\begin{cases} y_{(x_0)} = k_0 \\ \acute{y}_{(x_0)} = k_1 \\ \vdots \\ {y^{(n-1)}}_{(x_0)} = k_{n-1} \end{cases}$$

במקרה הזה לעומת עבור $n = 1$, יכול לקרות מצב שבו הפיתרונות יחתכו. זה לא יסתור את המשפט כי יכול להיות שאחד מת"ה לא יהיה שווה בין הפיתרונות (למשל$\acute{y}$), ואז המשפט עדיין מתקיים.

וורונסקיאן

הגדרה

יהי $y_1, \cdots, y_n$ פ' גזירות $n-1$ פעמים.

נגדיר את הוורונסקיאן שלהם:

$$W_{(y_1,\cdots,y_n)} = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ \acute{y}_1 & \acute{y}_2 & \cdots & \acute{y}_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

משפט

אם $y_1, \cdots, y_n$ פיתרונות של מד"ר ליניארית הומוגנית $(*)_h$.

המקיימות את משפט קיום ויחידות בתחום $a < x < b$.

אזיי:

$y_1, \cdots, y_n$ ת"ל אמ"מ $W_{(y_1,\cdots,y_n)}$ בנק' $a < x_0 < b$.

אם $W_{(x_0)} \neq 0$ ← $y_1, \cdots, y_n$ בת"ל ← מהוות מערכת יסודית של פיתרונות.

נוסחא נוספת לחישוב הוורונסקיאן

$W_{(y_1,\cdots,y_n)} = C * e^{-\int a_{n-1(x)}dx}$

דגשים

- אם הוורונסקיאן מתפאס בנק' אחת, אזיי הוא מתאפס בתחום כולו.
- הוורונסקיאן מהווה פ' רציפה בתחום קיום ויחידות, ולכן **שומר על סימנו**.

משוואות ליניאריות עם מקדמים קבועים

הומגניות

$$y^{(n)}+a_{n-1}y^{n-1}_{(x)}+\cdots a_1\acute{y}+a_0y=0\,,\qquad a_i\epsilon\mathbb{R}$$

והפיתרון ההומוגני הוא מהצורה:

$$y_h=C_1y_1+\cdots C_ny_n$$

$y_1,\cdots,y_n$ - מער' יסודית של פיתרונות.

והפ"א הוא מהצורה:

$$r^n+a_{n-1}r^{n-1}+\cdots+a_1r+a_0=0$$

וכך ניתן למצוא n שורשים $r_1,\cdots,r_n$, מהסוגים הבאים:

1. שורשים ממשים שונים.
2. שורשים מרוכבים.
3. שורשים מרובים (ריבוי S).

שורשים ממשים שונים

$r_1,\cdots,r_n$ שורשים, כאשר כל שורש r_i יתרנות e^{r_ix} לפיתרון.

<u>דג'</u>

$$y''-4y'-12y=0$$

$$r^2-4r-12=0$$
$$(r-6)(r+2)=0$$
$$r_1=6\ \rightarrow\ e^{6x}$$
$$r_2=-2\ \rightarrow\ e^{-2x}$$
$$y_h=C_1e^{6x}+C_2e^{-2x}$$

מכיוון שזוהי מער' יסודית של פיתרונות, נקבל שהוורונסקיאן שלה שונה מאפס:

$$W_{(y_1,y_2)}=\begin{vmatrix} e^{6x} & e^{-2x} \\ 6e^{6x} & -2e^{-2x}\end{vmatrix}=-8e^{4x}\neq0$$

שורשים מרוכבים

השורשים המרוכבים תמיד יופיעו בזוגות $\propto+i\beta$, כל זוג גזה יתרום 2 פיתרונות: $\begin{cases} e^{\alpha x}\cos(\beta x) \\ e^{\alpha x}\sin(\beta x)\end{cases}$

<u>דג'</u>

$$y''+2y'+5y=0$$

$$r^2+2r+5=0$$
$$r_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{16i^2}}{2}\rightarrow\begin{cases} r_1=-1+2i \\ r_2=-1-2i\end{cases}$$

$$y_h=C_1e^{-x}\cos(2x)+C_2e^{-x}\sin(2x)$$

שורשים מריבוי S

אם r הוא שורש מריבוי S, הוא יתרום S פיתרונות:
$y_1 + xy_1 + x^2y_1 + \cdots + x^{S-1}y_1$

<u>דג'</u>

$\ddot{y} - 4\dot{y} + 4y = 0$

$r^2 - 4r + 4 = 0$
$(r-2)^2 = 0$
$r = 2$ מריבוי 2.
$y_h = C_1e^{2x} + C_2xe^{2x}$

אי הומוגניות

$$y^{(n)}+a_{n-1}y^{n-1}_{(x)}+\cdots a_1\acute{y}+a_0y=g_{(x)}$$

הפיתרון הכללי הוא מהצורה:

$$y=y_h+y_p$$

y_h - נבנה פ"א ונמצא פיתרון ע"פ המקרים.

y_p - פיתרון פרטי לאי הומוגנית (בעזרת טבלת הניחושים).

<u>טבלה ניחושים:</u>

$g_{(x)}$	ניחוש עבור $y_{p\,(x)}$
$P_{n\,(x)}$ S - ריבוי של 0 בפ"א.	$x^S * Q_{n\,(x)}$
$e^{\propto x}P_{n\,(x)}$ S – ריבוי של $\propto$ בפ"א.	$x^s e^{\propto x}Q_{n(x)}$
$e^{\propto x}\sin(\beta x)\,P_{n\,(x)}$ או $e^{\propto x}\cos(\beta x)\,P_{n\,(x)}$ או קומבינציה בינהם S – ריבוי של $\propto+\beta i$ בפ"א.	$x^s e^{\propto x}\left[Q_{n\,(x)}\sin(\beta x)+P_{n\,(x)}\cos(\beta x)\right]$

<u>דג'</u>

$$y^{(4)}-y=e^{-x}$$

א'. נפתור את המשוואה ההומוגנית:

$$r^4-1=0$$

$$(r^2-1)(r^2+1)=0$$

$$r=\pm1,\pm i$$

הפיתרון של המשוואה ההומוגנית:

$$y_h=C_1e^x+C_2e^{-x}+C_3e^{0*x}\sin x+C_4e^{0*x}\cos x$$

ב'. "ננחש" פיתרון פרטי (y_p) ע"י הטבלה:

$$g_{(x)}=e^{-x}*1$$

$$\propto=-1$$

הריבוי של $\propto=-1$ בפ"א הוא $S=1$.

$$y_p=x^1e^{-x}*A$$

ג'. נציב את ההצעה במד"ר האי הומוגנית, ונשווה מקדמים על מנת למצוא את A:

$$\acute{y}=Ae^{-x}(1-x)$$

$$\dot{y} = Ae^{-x}(x-2)$$
$$y^{(3)} = Ae^{-x}(3-x)$$
$$y^{(4)} = Ae^{-x}(x-4)$$
נציב ונקבל:
$$Ae^{-x}(x-4-x) = e^{-x}$$
$$-4A = 1$$
$$A = -\frac{1}{4}$$
$$y_p = -\frac{1}{4}xe^{-x}$$

ד'. נחבר:
$$y = y_h + y_p$$
$$y = C_1e^x + C_2e^{-x} + C_3\sin x + C_4\cos x - \frac{1}{4}xe^{-x}$$

משוואות אוילר

$$x^n y^{(n)} - a_{n-1}x^{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_0 y = g_{(x)}$$

ע"י טרנספורמציה $x = e^t$ מקבלים משוואה עם מקדמים קבועים.

ונצפה לפיתרון: $y = y_h + y_p$

הומוגניות

עבור ביטוי מהצורה x^n נציע פ"א:
$r(r-1)(r-2)\cdots(r-n-1)$

מקרה 1: n שורשים ממשיים שונים
כל שורש ממשי r_i תורם פיתרון x^{r_i}.

מקרה 2: n שורשים שחלקם מרוכבים
יופיעו תמיד בזוגות $\propto \pm\beta$.
הפיתרונות שיתרום כל זוג: $\begin{cases} x^\alpha \cos(\beta \ln(x)) \\ x^\alpha \sin(\beta \ln(x)) \end{cases}$

מקרה 3: n שורשים שחלקם מרובים
כל שורש מריבוי S יתרום S פיתרונות: $y_1, \ln(x)\, y_1, (\ln x)^2 y_1, \cdots, (\ln x)^{S-1} y_1$

אי הומוגניות

שלבי פיתרון:
1. פותרים את ההומוגנית (ע"י פ"א).
2. מנחשים פיתרון פרטי:
1.2. מבצעים טרנפורמציה מ- $g_{(x)}$ ל- $\tilde{g}_{(t)}$, כאשר $x = e^t$ ו- $\ln x = t$.
2.2. ננחש פיתרון ל- $\tilde{g}_{(t)}$ כמו שמנחשים פיתרון למשוואה עם מקדמים קבועים (ע"פ הטבלה).
3.2. חוזרים למשתנה המקורי x (נקבל $y_{p\,(x)}$) ופותרים ע"י השוואת מקדמים.
3. $y = y_h + y_p$

<u>פיתרון משוואות ליניאריות אי הומוגניות בשיטת ווריאציית הפרמטר</u>

$$\begin{cases} \grave{C}_1 y_1 + \grave{C}_2 y_2 + \grave{C}_n y_n = 0 \\ \grave{C}_1 \grave{y}_1 + \grave{C}_2 \grave{y}_2 + \grave{C}_n \grave{y}_n = 0 \\ \vdots \\ \grave{C}_1 y_1^{(n-1)} + \grave{C}_2 y_2^{(n-1)} + \grave{C}_n y_n^{(n-1)} = g_{(x)} \end{cases}$$

$g_{(x)}$ - צריכה להיות של המשוואה המנורמלת.

<u>דג'</u>

נתונה המד"ר:

$$\grave{\grave{y}} + y = \frac{1}{\cos x} \quad , \qquad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$$

הומוגנית:

$$r^2 + 1 = 0$$

$$r = \pm i$$

$$y_h = C_1 \sin x + C_2 \cos x$$

אי הומוגנית:

נציע – $y_{p_{(x)}} = C_{1_{(x)}} \sin x + C_{2_{(x)}} \cos x$

על מנת למצוא $C_{1\,(x)}$ ו- $C_{2_{(x)}}$ נפתור את המערכת הבאה:

$$\begin{cases} \grave{C}_1 \sin x + \grave{C}_2 \cos x = 0 \\ \grave{C}_1 \cos x - \grave{C}_2 \sin x = \dfrac{1}{\cos x} \end{cases}$$

מקבלים:

$$\grave{C}_1 = 1 \;\rightarrow\; C_{1\,(x)} = x$$

$$\grave{C}_2 = -\frac{\sin x}{\cos x} \rightarrow\; C_{2_{(x)}} = \ln(\cos x)$$

$$y = y_h + y_p = C_1 \sin x + C_2 \cos x + x \sin x + (\ln(\cos x)) \cos x$$

מערכת משוואות

מער' משוואות:

$$\dot{\vec{x}}_{(t)} = \vec{A} * \vec{x}_{(t)} + \vec{B}_{(t)}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11(t)} & \cdots & a_{1n(t)} \\ a_{21(t)} & \cdots & a_{2n(t)} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1(t)} & \cdots & a_{nn(t)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1(t)} \\ x_{2(t)} \\ \vdots \\ x_{n(t)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{1(t)} \\ b_{2(t)} \\ \vdots \\ b_{n(t)} \end{pmatrix}$$

<u>דג'</u>

$$\begin{cases} \dot{x} = x + y + 2e^{-t} \\ \dot{y} = -2x + y + 6e^{-t} \end{cases}$$

כתיבה מטריצית:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{(t)} \\ y_{(t)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2e^{-t} \\ 6e^{-t} \end{pmatrix}$$

פיתרון מערכת משוואות בשיטת האלמינציה

<u>דג'</u>

$$\begin{cases} \dot{x} = 2y + 4e^5 \\ \dot{y} = x + y - 2e^5 \end{cases}$$

$$\dot{y} - y + 2e^t = x$$

$$\dot{x} = \ddot{y} - \dot{y} + 2e^t$$

$$\dot{x} = \dot{x}$$

$$\ddot{y} - \dot{y} - 2y = 2e^t$$

מקדמים קבועים ← $y_{(t)} = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-t} - e^t$

גוזרים את $y_{(t)}$, מציבים במשוואות הנוספות ומקבלים:

$$x_{(t)} = C_1 e^{2t} - 2C_2 e^{-t} + 2e^t$$

ובכתיב המטריצי:

$$\begin{pmatrix} x_{(t)} \\ y_{(t)} \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -2e^{-t} \\ e^{-t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2e^5 \\ -e^5 \end{pmatrix} = C_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-t} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + e^t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

פיתרון מערכת משוואות הומוגנית עם מקדמים קבועים

$$\dot{\vec{x}}_{(t)} = \vec{A} * \vec{x}_{(t)} + \cancel{\vec{B}_{(t)}}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11\,(t)} & \cdots & a_{1n\,(t)} \\ a_{21\,(t)} & \cdots & a_{2n\,(t)} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1\,(t)} & \cdots & a_{nn\,(t)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1\,(t)} \\ x_{2\,(t)} \\ \vdots \\ x_{n\,(t)} \end{pmatrix}, \qquad a_{ij} \in \mathbb{R}$$

<u>שלבי פיתרון</u>

1. מוצאים שורשים (ע"ע) λ_i לפ"א, ע"י חישוב $|A - \lambda I| = 0$.
2. לכל ע"ע λ_i מוצעים ו"ע V_i, ע"י פיתרון $(A - \lambda I)\vec{V} = \vec{0}$.

<u>נחלק למקרים:</u>

מקרה 1: n ע"ע ממשיים שונים

לכל ע"ע λ_i נמצא ו"ע V_i, והפיתרון מהצורה הבאה:

$$x = C_1 e^{\lambda_i t} V_1 + \cdots + C_n e^{\lambda_i t} V_n$$

<u>דג'</u>

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \vec{x}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2 + x_3 \\ \dot{x}_3 = x_2 + x_3 \end{cases}$$

נמצא ע"ע: $|A - \lambda I| = 0$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_{2,3} = 1 \pm \sqrt{2} \end{cases}$$

עבור $\lambda = 1$ נמצא ו"ע ע"י: $(A - 1 * I)\vec{V} = \vec{0}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} V_1 = -V_3 \\ V_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} -V_3 \\ 0 \\ V_3 \end{pmatrix} = -V_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ו"ע שמתאים ל- $\lambda = 1$ הוא למשל $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

באותו אופן עבור $\lambda = 1 + \sqrt{2}$ נקבל ו"ע $\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$.

עבור $\lambda = 1 - \sqrt{2}$ נקבל ו"ע $\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$x_{(t)} = C_1 e^{1*t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 e^{(1+\sqrt{2})t} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} + C_3 e^{(1-\sqrt{2})t} \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

מקרה 2: ע"ע מרוכבים

<u>דג'</u>

פתור:

$$\begin{cases} \dot{x}_{(t)} = 3x + 2y \\ \dot{y}_{(t)} = -2x + 3y \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

נמצא ע"ע ע"י פיתרון: $|A - \lambda I| = 0$.

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda = 3 \pm 2i$$

נבחר למשל $\lambda = 3 + 2i$ ונמצא עבורו ו"ע ע"י פיתרון: $(A - \lambda I)\bar{V} = 0$.

$$\begin{pmatrix} -2i & 2 \\ -2 & -2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$iV_1 = V_2$$

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ iV_2 \end{pmatrix} = V_1 \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

$$e^{(3+2i)t} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

$$e^{(\alpha+\beta i)t} = e^{\alpha t}(\cos(\beta t) + i\sin(\beta t))$$

$$e^{3t}(\cos(2t) + i\sin(2t)) \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = e^{3t} \begin{pmatrix} \cos(2t) + i\sin(2t) \\ i\cos(2t) - \sin(2t) \end{pmatrix}$$

$$= e^{3t} \begin{pmatrix} \cos(2t) \\ -\sin(2t) \end{pmatrix} + ie^{3t} \begin{pmatrix} \sin(2t) \\ \cos(2t) \end{pmatrix}$$

קיבלנו שהפיתרון הכללי:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 e^{3t} \begin{pmatrix} \cos(2t) \\ -\sin(2t) \end{pmatrix} + C_2 e^{3t} \begin{pmatrix} \sin(2t) \\ \cos(2t) \end{pmatrix}$$

מקרה 3: ע"ע מרובים

<u>דג'</u>

פתור:

$$\dot{\bar{x}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} \bar{x}$$

מציאת ע"י ע"י פיתרון $|A - \lambda I| = 0$.

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 2 & 1-\lambda & 2 \\ 3 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda = 4, 1, 1$$

עבור $\lambda = 4$ נמצא את הו"ע הבא: $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

עבור $\lambda = 1$, נמצא את הו"ע בדרך הבאה:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$-V_1 = V_3$$

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ -V_1 \end{pmatrix} = V_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + V_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

מכיוון שהריבוי של $\lambda = 1$ הוא $S = 2$ קיבלנו 2 ו"ע.

$$X_{(t)} = C_1 e^{4t} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2}{2} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} + C_2 e^{1*t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + C_3 e^{1*t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

מערכת משוואות אי הומוגניות עם מקדמים קבועים

$$\dot{x} = A\bar{x} + \bar{P}_{n(t)} * e^{\alpha t}$$

$$\bar{P}_{n(t)} = \bar{V}_n t^n + \bar{V}_{n-1} t^{n-1} + \cdots + \bar{V}_0$$

השוואת מקדמים

נציע:

$$\bar{x}_p = \bar{Q}_{n(t)} e^{\alpha t}$$

נציב המערכת המקורית ונשווה מקדמים.

תר'

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + 2x_2 + 16te^t \\ \dot{x}_2 = 2x_1 - 2x_2 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 16t \\ 0 \end{pmatrix} e^t$$

א׳. פיתרון הומוגנית

ע"ע: $|A - \lambda I| = 0$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda = -3, 2$$

עבור $\lambda = -3$ נקבל ו"ע $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

עבור $\lambda = 2$ נקבל ו"ע $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$x_{n(t)} = C_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-3t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

ב׳. נציע פיתרון פרטי לאי-הומוגנית

$\alpha = 1$ אינו ע"ע, ולכן נציע:

$$x_{p(t)} = \begin{pmatrix} A + Bt \\ C + Dt \end{pmatrix} e^t$$

$$\dot{x}_{p(t)} = e^t \begin{pmatrix} A + Bt + B \\ C + Dt + d \end{pmatrix}$$

נציב את ההצעה ונשווה מקדמים:

$$e^t \begin{pmatrix} A + Bt + B \\ C + Dt + d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} e^t \begin{pmatrix} A + Bt \\ C + Dt \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 16t \\ 0 \end{pmatrix} e^t$$

$$\begin{cases} A + Bt + B = A + Bt + 2C + 2Dt + 16t \\ C + Dt + D = 2A + 2Bt - 2C - 2Dt \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = -13 \\ B = -12 \\ C = -6 \\ D = -8 \end{cases}$$

$$x_{p(t)} = \begin{pmatrix} -13 - 12t \\ -6 - 8t \end{pmatrix} e^t$$

$$x_{(t)} = x_{h(t)} + x_{p(t)}$$

$$x_{(t)} = C_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-3t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -13 - 12t \\ -6 - 8t \end{pmatrix} e^t$$

<u>ווריאציית פרמטרים</u>

$$\dot{\bar{x}} = \bar{A}x + \bar{B}_{(t)}$$

א׳. מוצאים פיתרון למערכת ההומוגנית:

$$\bar{X}_h = C_1\bar{x}_1 + C_2\bar{x}_2 + \cdots + C_n\bar{x}_n$$

ב׳. מחפשים פיתרון מהצורה:

$$\bar{X}_p = C_{1(t)}\bar{x}_1 + C_{2(t)}\bar{x}_2 + \cdots + C_{n(t)}\bar{x}_n$$

נמצא $C_{i(t)}$ ע"י הדרישה:

$$\dot{C}_{1(t)}\bar{x}_1 + \dot{C}_{2(t)}\bar{x}_2 + \cdots + \dot{C}_{n(t)}\bar{x}_n = \bar{B}_{(t)}$$

<u>דג'</u>

נתונה המערכת: $\dot{\bar{X}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} e^t \\ (1+t)e^t \end{pmatrix}$

חשב $x_{1(t)} + x_{2(t)}$

פיתרון הומוגני ← ע"ע $\lambda = 1$, ריבוי $S = 2$.

מציאת ו"ע:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ו"ע ← $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

חסר ו"ע, אז נציע $e^t\begin{pmatrix} a_1t + a_0 \\ b_1t + b_0 \end{pmatrix}$

נגזור ונציב המשוואה המקורית:

$$e^t\begin{pmatrix} a_1t + a_0 + a_1 \\ b_1t + b_0 + b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} e^t \begin{pmatrix} a_1t + a_0 \\ b_1t + b_0 \end{pmatrix}$$

שורה ראשונה: $\begin{cases} t: a_1 = a_1 \\ 1: a_0 + a_1 = a_0 \to a_1 = 0 \end{cases}$

שורה שנייה: $\begin{cases} t: b_1 = a_1 + b_1 \to a_1 = 0 \\ 1: b_0 + b_1 = a_0 + b_0 \to b_1 = a_0 \end{cases}$

פיתרון הומוגנית:

$$X_h = e^t\begin{pmatrix} a_0 \\ a_0t + b_0 \end{pmatrix} = a_0e^t\begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} + b_0e^t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = C_1e^t\begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} + C_2e^t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

נציע פיתרון פרטי:

$$X_p = C_{1(t)}e^t\begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} + C_{2(t)}e^t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

נמצא C_1, C_2:

$$\dot{C}_{1(t)}e^t\begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} + \dot{C}_{2(t)}e^t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t \\ (1+t)e^t \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \text{שורה ראשונה}: \dot{C}_1 = 1 \to C_1 = t \\ \text{שורה שנייה}: \dot{C}_1t + \dot{C}_2 = (1+t) \to C_2 = t \end{cases}$$

נציב חזרה:

$$X_p = e^t\begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix} + e^t\begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix} = e^t\begin{pmatrix} t \\ t + t^2 \end{pmatrix}$$

$$X = X_h + X_p = C_1e^t\begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} + C_2e^t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + e^t\begin{pmatrix} t \\ t + t^2 \end{pmatrix}$$

<u>פיתרון משוואות ליניאריות בעזרת טורי חזקות</u>

$$P_{(x)}\ddot{y}+Q_{(x)}\dot{y}+R_{(x)}y=G_{(x)}$$

מוצאים פיתרון בעזרת הנוסחא:

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$$

מציבים במשוואה ומשווים מקדמים (הפ' P,Q,R,G עם לפתח סביב אותה נק' x_0).

<u>הגדרה</u> – נק' רגולרית

x_0 נקראת נק' רגולרית אם $P_{(x_0)}\neq 0$.

<u>דג'</u>

$$\ddot{y}-2x\dot{y}+\lambda y=0$$

למצוא פיתרון סביב נק': $x_0=0$.

$$\begin{cases}P_{(x)}=1\\ Q_{(x)}=-2x\\ R_{(x)}=\lambda\\ G_{(x)}=0\end{cases}$$

$P_{(x_0)}\neq 0$, לכן x_0 נק' רגולרית.

מחפשים פיתרון מהצורה $y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$

$$\dot{y}=\sum_{n=1}^{\infty}a_nnx^{n-1}$$

* מכיוון שהאיבר הראשון מתאפס בכל מקרה, נתחיל את האינדקס n מ- 1 במקום מ- 0.

$$\ddot{y}=\sum_{n=2}^{\infty}a_nn(n-1)x^{n-2}$$

מציבים במשוואה המקורית:

$$\sum_{n=2}^{\infty}a_nn(n-1)x^{n-2}-2\sum_{n=1}^{\infty}a_nnx^n+\lambda\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=0$$

המטרה שלנו:

א'. החזרה של x^{α} תהיה זהה בכולם, למשל x^n.

ב'. שהאינדקס ההתחלתי של כל הטורים יהיה זהה, למשל $n=0$.

עבור הטור השמאלי מגדירים $n-2=k$, ומקבלים:

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+2)(k+1)a_{k+2}x^k$$

משנים את הסימון של האינדקס מ- k ל- n, ועושים את אותו הדבר לשאר הטורים הבעייתיים.

$$\sum_{n=-}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - 2\sum_{n=0}^{\infty} na_n x^n + \lambda\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$\sum_{n-0}^{\infty}[(n+2)(n+1)a_{n+2} - (2n-\lambda)a_n]x^n = 0$$

$$\forall n \geq 0\,, (n+2)(n+1)a_{n+2} - (2n-\lambda)a_n$$

$$a_{n+2}\frac{(2n-\lambda)}{(n+2)(n+1)}a_n\,, \qquad n \geq 0$$

התמרות להפלס

פיתרון משוואה דיפרנציאלית ליניארית מסדר 2 במקדמים קבועים בעזרת התמרת *Laplace*.

טבלת התמרות:

הערות	התמרת לפלס	פונקציה	
$P > 0$	$\frac{1}{p}$	1	.1
$p > 0$ $n \in Z_{\perp}$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	t^n	.2
$p > 0$ $n \in Z_{\perp}$	$P^n Lf_{(t)} - P^{n-1}f_{(0)}$ $-P^{n-2}f^1_{(0)}$ $-P^{n-3}f^2_{(0)} \cdots - f^{n-1}_{(0)}$	$f^{(n)}_{(t)}$	.3
$p > a$	$\frac{1}{p-a}$	e^{at}	.4
$p > a$ $n \in Z_{\perp}$	$\frac{n!}{(p-a)^{n+1}}$	$t^n e^{at}$	.5
$z = x + iy, z\epsilon\mathbb{C}$ $p > real(z)$	$\frac{1}{p-z}$	e^{zt}	.6
$p > 0$	$\frac{p}{p^2+a^2}$	$\cos(at)$	.7
$p > 0$	$\frac{2ap}{(a^2+p^2)^2}$	$t * \sin(at)$	.8
$p > 0$	$\frac{p^2-a^2}{(p^2+a^2)^2}$	$t * \cos(at)$	.9
$a, b \in \mathbb{R}$ $p > a$	$\frac{b}{(p-a)^2+b^2}$	$e^{at}\sin(bt)$	.01
$a, b \in \mathbb{R}$ $p > a$	$\frac{p-a}{(p-a)^2+b^2}$	$e^{at}\cos(bt)$	.11
$p > 0$	$\frac{e^{-cp}}{p}$	$\mathcal{L}[U_c](p)$	.21
הערות	**טענה**		
$a \in \mathbb{R}$	$\mathcal{L}[e^{at}f_{(t)}](p) = \mathcal{L}[f_{(t)}](p-a)$		.31
$a \in \mathbb{R}$	$\mathcal{L}[f_{(at)}](p) = \frac{1}{a}\mathcal{L}[f_{(t)}]\left(\frac{p}{a}\right)$		.41
$n \in Z_{\perp}$	$\mathcal{L}[t^n f_{(t)}] = (-1)^n \frac{d^n}{dp^n}\mathcal{L}[f_{(t)}](p)$		.51

דג'

$$\ddot{y} + 4\dot{y} + 4y = t^2e^{-25}$$

$$\begin{cases} y_{(0)} = 0 \\ \dot{y}_{(0)} = 0 \end{cases}$$

פיתוח ההתמרות:

$$\mathcal{L}(\dot{f})(\mathrm{P}) = \mathrm{P}\mathcal{L}(\mathrm{f}) - \mathrm{f}_{(0)}$$
$$\mathcal{L}(\ddot{y})(P) = P^2\mathcal{L}(f)(P) - Pf_{(0)} - \dot{f}_{(0)}$$
$$\mathcal{L}(t^n) = \frac{n!}{P^{n+1}}$$
$$\mathcal{L}(t^n * e^{at}) = \frac{n!}{(P-a)^{n+1}} \rightarrow \mathcal{L}(t^2 e^{-2t}) = \frac{2}{(P+2)^3}$$

הצבת ההתמרות:

$$\mathrm{P}^2\mathcal{L}(y)(\mathrm{P}) - \mathrm{P}\mathrm{y}_{(0)} - \dot{y}_{(0)} + 4P\mathcal{L}(y) - 4y_{(0)} + 4\mathcal{L}(y) = \frac{2}{(P+2)^3}$$
$$\mathcal{L}(y)(P^2 + 4P + 4) = \mathcal{L}(\mathrm{y})(\mathrm{P}+2)^2 = \frac{2}{(\mathrm{P}+2)^3}$$
$$\mathcal{L}(\mathrm{y}) = \frac{2}{(\mathrm{P}+2)^5}$$
$$y = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{4!}{(P+2)^{4+1}} * \frac{1}{12}\right)$$
$$\mathcal{L}(t^4 * \mathrm{e}^{-2\mathrm{t}}) = \frac{4!}{(\mathrm{P}+2)^{4+1}}$$
$$y = \frac{1}{12} t^3 e^{-2t}$$