טורי פורייה והתמרות אינטגרליות

גיל וולף

4 במאי 2008

תוכן עניינים

1 מבוא

הגדרה 1.1 יהיו $f_1,\dots,f_n \in W$ (W מרחב וקטורי). אם $f_1,...,f_n$ בלתי תלוים לינארית (linearly independent) אז:

$$a_1f_1+\ldots+a_nf_n=0 \Longleftrightarrow a_1=\ldots=a_n=0$$

הגדרה 1.2 יהיו $f_1,\dots,f_n \in W$. אם כל $f \in W$ ניתן לכתיבה כצ"ל (צירוף לינארי) של $f_1,\dots,f_n \in W$ אז $f_1,\dots,f_n$ נקראים קבוצה פורשת של W.

הגדרה 1.3 הקבוצה $\{f_1,\dots,f_n\}$ נקראת בסיס (basis) של W אם היא גם קבוצה פורשת וגם בת"ל ואז אומרים ש־ $dim(W)=n$.

1.1 מכפלה פנימית

הגדרה 1.4 מכפלה פנימית (inner product) היא חוק המעביר כל זוג של איברים ב־W לסקלר. $\langle\cdot,\cdot\rangle : W\times W \longrightarrow \mathbb{C}$ לכל $f,g\in W$ קיים הסקלר $\langle f,g\rangle$ המקיים:

1. $\langle f,f\rangle \geq 0$
2. $\langle f,f\rangle=0 \Longleftrightarrow f=0$
3. $\langle af+bg,h\rangle = a\langle f,h\rangle + b\langle g,h\rangle$
4. $\langle f,g\rangle = \overline{\langle g,f\rangle}$

הערה 1.5 תכונות הנובעות מההגדרה:

1. $\langle f,ag+bh\rangle = \overline{a}\langle f,g\rangle + \overline{b}\langle f,h\rangle$
2. $\langle af,af\rangle = |a|^2\langle f,f\rangle$
3. $\langle 0,f\rangle = 0$

משפט 1.6 (אי־שיוויון קושי שוורץ) W מרחב לינארי על מ"פ $\langle\cdot,\cdot\rangle$ אז:

$$|\langle f,g\rangle|^2 \leq \langle f,f\rangle\cdot\langle g,g\rangle$$

1.2 נורמה

הגדרה 1.7 W מרחב לינארי. נורמה היא חוק המעביר כל איבר ב־ W לסקלר חיובי ב־ $\mathbb{R}$ כלומר $||\cdot|| : W \longrightarrow \mathbb{R}_+$ ומקיימת:

1. $||f|| \geq 0$, ו־ $||f|| = 0$ אמ"ם $f = 0$
2. לכל $a \in \mathbb{C}$, $f \in W$ $||af|| = |a| \cdot ||f||$
3. אי־שיוויון המשולש: $||f + g|| \leq ||f|| + ||g||$

משפט 1.8 $\sqrt{\langle f, f\rangle}$ היא נורמה. נורמה שמוגדרת באמצעות שורש של מ"פ נקראת נורמה מושרית. שימו לב: לא כל נורמה היא נורמה מושרית

1.3 מערכות אורתוגונליות ואורתונורמליות

הגדרה 1.9 $f, g \in W$ נקראים אורתוגונליים (א"ג) אם $\langle f, g\rangle = 0$ ו־ $f \neq 0, g \neq 0$

הגדרה 1.10 נתונים $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in W$ (n סופי או אינסופי) אז:

1. נגיד ש־ $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ מערכת א"ג אם כל זוג מקיים $\langle \varphi_i, \varphi_j\rangle = 0$ לכל $i \neq j$
2. נגיד ש־ $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ מערכת אורתונורמלית (א"נ) אם:
   - $\langle \varphi_i, \varphi_j\rangle = 0$ לכל $i \neq j$ (כלומר המערכת א"ג)
   - $\langle \varphi_i, \varphi_i\rangle = 1$ לכל i.
   - עבור מערכת א"נ ניתן לסמן:

$$\langle \varphi_i, \varphi_j\rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$$

טענה 1.11 אם $\{\varphi_1, \ldots \varphi_n\}$ מערכת א"ג או א"נ אז $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ בת"ל (עבור n סופי)

טענה 1.12 נניח ש־ $\{\varphi_1, \ldots \varphi_n\}$ מערכת א"נ ונניח ש־ $f = \sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_i$

1. $a_i = \langle f, \varphi_i\rangle$
2. $||f||^2 = \sum_{i=1}^{n} |a_i|^2$

תהליך גרם־שמידט: נתון $f_1,\dots,f_n$ בת"ל, ונרצה לבנות $\varphi_1,\dots,\varphi_n$ א"נ כך ש־ $Span\{\varphi_1,\dots,\varphi_n\} = Span\{f_1,\dots,f_n\}$

$$\varphi_1 = \frac{f_1}{||f_1||}$$

$$\varphi_2 = \frac{f_2 - \langle f_2,\varphi_1\rangle \varphi_1}{||f_2 - \langle f_2,\varphi_1\rangle \varphi_1||}$$

$$\vdots$$

$$\varphi_k = \frac{f_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle f_i,\varphi_i\rangle \varphi_i}{||f_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle f_i,\varphi_i\rangle \varphi_i||}$$

קירוב טוב ביותר: $v^* \in W$ נקרא קירוב טוב ביותר (best approximation) אם $||f-v^*|| = inf\{||f-v|| : v \in W\}$. לכל $f \in W$ קיים הקירוב הטוב ביותר (קט"ב): $\varphi_f = \sum_{i=1}^{n} \langle f,\varphi_i\rangle \varphi_i$, כאשר $\{\varphi_1,\dots,\varphi_n\}$ מערכת א"נ. המרחק בין f ל־v^* הוא $\|f-v^*\|$

אי שיוויון בסל (Bessel):

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |\langle f,\varphi_i\rangle|^2\right)^{1/2} \leq ||f||$$

1.4 מערכות א"ג וא"נ אינסופיות

נניח $dim(W)=\infty$ ונניח $\{\varphi_1,\varphi_2,\dots\}$ מערכת א"נ עם אינסוף איברים

אי שיוויון בסל (Bessel):

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} |\langle f,\varphi_i\rangle|^2\right)^{1/2} \leq ||f||$$

שיוויון פרסבל (Parseval): (זהו מקרה פרטי של אי שיוויון בסל בו מתקיים השוויון)

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} |\langle f,\varphi_i\rangle|^2\right)^{1/2} = ||f||$$

משפט 1.13 **(הלמה של רימן־לבג)** לכל $f \in W$ מתקיים $\lim_{n\to\infty} \langle f, \varphi_n \rangle = 0$

הגדרה 1.14 הסדרה $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת (או מתכנסת בנורמה) ל־g, $g \in W$ אם $\lim_{n\to\infty} ||g - g_n|| = 0$

הגדרה 1.15 יהיו $g, g_n \in W$ נאמר ש־$\sum_{i=1}^{\infty} a_i g_i$ מתכנס בנורמה ל־g ונכתוב $g = \sum_{i=1}^{\infty} a_i g_i$ אם $\lim_{n\to\infty} ||g - \sum_{i=1}^{n} a_i g_i|| = 0$

הגדרה 1.16 מערכת א"נ אינסופית נקראת סגורה (closed) אם לכל $f \in W$ מתקיים $\lim_{n\to\infty} ||f - \sum_{i=1}^{n} \langle f, \varphi_i \rangle \varphi_i|| = 0$

טענה 1.17 המערכת הא"נ האינסופית הנ"ל סגורה אם לכל $f \in W$ מתקיים שיוויון פרסבל:

$$||f|| = \left(\sum_{i=1}^{\infty} | \langle f, \varphi_i \rangle |^2 \right)^{1/2}$$

הגדרה 1.18 המערכת הא"נ האינסופית הנ"ל נקראת שלמה אם ה־$f \in W$ היחיד שמקיים $\langle f, \varphi_i \rangle = 0$ הוא $f = 0$. מתברר ששלמות חלשה יותר מסגירות, כלומר:

טענה 1.19 אם $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots\}$ סגורה אז היא שלמה

2 טורי פורייה ותכונותיהם

הגדרה 2.1 E הוא המרחב של הפונקציות הרציפות למקוטעין שמקבלות משתנים ממשיים ומחזירות ערכים קומפלקסיים בקטע $[-\pi, \pi]$

משפט 2.2 הפונקציות $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \dots \right\}$ מהוות מרחב א"נ ב־E עם המ"פ $\langle f, g \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} dx$

משפט 2.3 הפונקציות $\left\{ \frac{e^{inx}}{\sqrt{2}} \right\}_{n=-\infty}^{\infty}$ מהוות מערכת א"נ ב־E עם המ"פ $\langle f, g \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} dx$

הערה 2.4 $\langle f, f \rangle = 0$ אמ"ם $f = 0$ חוץ אולי ממספר סופי של נקודות

2.1 טור פורייה ממשי

הגדרה 2.5 נתון $f \in E$. הטור

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

נקרא טור פורייה של f כאשר

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx \quad n = 1, 2, 3 \ldots$$

ונרשום

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

הערה 2.6

1. הסימן $\sim$ בא במקום שיוויון כי אנו לא יודעים אם הטור מכנס במידה שווה או לא
2. $\frac{a_0}{2}$ בא כי $a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$ ואנו יודעים שאמור להופיע $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$
3. f מוגדרת בקטע $[-\pi, \pi]$. הטור מוגדר לכל $\mathbb{R}$ והוא מחזורי 2π

משפט 2.7 (שיוויון פרסבל): לכל $f \in E$ מתקיים:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 + |b_n|^2$$

טענה 2.8 כל פונקציה מהצורה $f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{M} A_n \cos nx + B_n \sin nx$ נקראת פולינום טריגונומטרי והטור פורייה שלה הוא עצמה

2.2 פונקציות זוגיות ואי־זוגיות

הגדרה 2.9 $f(x)$ זוגית אם $f(-x) = f(x)$

הגדרה 2.10 $f(x)$ אי־זוגית אם $f(-x) = -f(x)$

משפט 2.11 אם f זוגית אז $\forall n,\ b_n = 0$

משפט 2.12 אם f אי־זוגית אז $\forall n,\ a_n = 0$

הערה 2.13 כל פונקציה ניתנת לכתיבה כסכום פונקציה זוגית ופונקציה אי־זוגית

$$f(x) = \underbrace{\frac{f(x)+f(-x)}{2}}_{even} + \underbrace{\frac{f(x)-f(-x)}{2}}_{odd}$$

2.3 טור פורייה קומפלקסי

משפט 2.14 נתונה המכפלה הפנימית $\langle f,g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}dx$. הפונקציות $\{e^{inx}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ מהוות מערכת א"נ ב־E עם המ"פ הנ"ל

הגדרה 2.15 הטור

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

כאשר

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx \ \ \forall n \in \mathbb{Z}$$

נקרא טור פורייה קומפלקסי של $f(x)$ ומסמנים

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

הטור הרגיל (ממשי) והטור הקומפלקסי הם אותו דבר

משפט 2.16 (שיוויון פרסבל):

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2$$

2.4 התכנסות נקודתית, במ"ש ומשפט דיריכלה

הגדרה 2.17 E' הוא מרחב הפונקציות בתוך E כך שבכל נקודה ב־$(-\pi,\pi)$ קיימת נגזרת מימין ונגזרת משמאל ובנקודות הקצה $\pm\pi$ קיימת נגזרת חד צדדית מתאימה ($f \in E' \Longleftrightarrow f' \in E$)

משפט 2.18 (משפט דיריכלה): אם $f \in E'$ אז לכל $x \in (-\pi,\pi)$ הטור של f מתכנס ל־ $\frac{f(x+)+f(x-)}{2}$ כאשר $f(x-)$ הוא הגבול משמאל ו־ $f(x+)$ הוא הגבול מימין. בנקודות $x = \pm\pi$ הטור מתכנס ל־ $\frac{f((-\pi)+)+f(\pi-)}{2}$

הגדרה 2.19 סדרה של פונקציות $\{f_m\}_{m=1}^{\infty}$ מתכנסת נקודתית ל־f בקטע $[a,b]$ אם לכל $x \in [a,b]$ מתקיים $\lim_{m\to\infty} f_m(x) = f(x)$

הגדרה 2.20 סדרה של פונקציות $\{f_m\}_{m=1}^{\infty}$ מתכנסת במ"ש ל־f בקטע $[a,b]$ אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $M(\varepsilon)$ כך שלכל $m > M$ מתקיים $|f_m(x) - f(x)| < \varepsilon$ לכל $x \in [a,b]$. אם טור פורייה של f מתכנס במ"ש (במידה שווה) ל־f נסמן שיוויון: $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$

משפט 2.21 אם f רציפה ב־$[-\pi,\pi]$ ו־$f(-\pi) = f(\pi)$ ו־$f' \in E$ אז הטור פורייה של f מתכנס במ"ש ל־f בקטע $[-\pi,\pi]$

משפט 2.22 (מבחן M של ויירשטראס): אם $\{g_m\}$ סדרת פונקציות כך שמתקיים $|g_m| < C_m$ לכל x ולכל m ו־ $\sum_{m=1}^{\infty} C_m < \infty$ אז $\sum_{m=1}^{k} g_m$ מתכנס במ"ש ל־$\sum_{m=1}^{\infty} g_m$

2.5 גזירה ואינטגרציה

משפט 2.23 אם $f \in E'$, f רציפה ב־$[-\pi,\pi]$ ו־$f(-\pi) = f(\pi)$ אז ניתן לגזור איבר איבר כלומר

$$f'(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} -na_n \sin nx + nb_n \cos nx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} inc_n e^{inx}$$

משפט 2.24 אם $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$ אז

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{x} f(t)dt &= \frac{a_0(x+\pi)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{a_n}{n} \sin nx - \frac{b_n}{n}(\cos nx - \cos n\pi)\right] \\ &= \sum_{n=-\infty,\neq 0}^{\infty} \frac{c_n}{in}\left(e^{inx} - e^{in\pi}\right)\end{aligned}$$

2.6 טורי סינוס, טורי קוסינוס וטורי פורייה בקטעים שונים

הגדרה 2.25 נניח f מוגדרת בקטע $[0,\pi]$

- הרחבה זוגית:

$$\hat{f}(x) = \begin{cases} f(x), & 0 \le x \le \pi \\ f(-x), & -\pi \le x < 0 \end{cases}$$

- הרחבה אי־זוגית:

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & 0 < x \leq \pi \\ 0, & x = 0 \\ -f(-x), & -\pi \leq x < 0 \end{cases}$$

הגדרה 2.26 טור קוסינוס של f בקטע $[0,\pi]$ הוא טור פורייה של הפונקציה $\hat{f}(x)$. לחלופין ניתן לאמר שהטור $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ כאשר $a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx dx$ הוא טור קוסינוס של f בקטע $[0,\pi]$

הגדרה 2.27 טור סינוס של f בקטע $[0,\pi]$ הוא טור פורייה של הפונקציה $\tilde{f}(x)$. לחלופין ניתן לאמר שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$ כאשר $b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx dx$ הוא טור סינוס של f בקטע $[0,\pi]$

הגדרה 2.28 טור פורייה של פונקציה f בקטע $[a,b]$ הוא

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2n\pi}{b-a}x\right) + b_n \sin\left(\frac{2n\pi}{b-a}x\right)$$

$$a_n = \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\cos\left(\frac{2n\pi}{b-a}x\right)dx$$

$$b_n = \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\sin\left(\frac{2n\pi}{b-a}x\right)dx$$

2.7 קשר בין טור ממשי לטור קומפלקסי, ופרסבל מוכלל

- $a_0 = 2c_0$
- $a_n = c_n + c_{-n}$
- $b_n = i(c_n - c_{-n})$
- $c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n)$
- $c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n)$

משפט 2.29 (פרסבל מוכלל): אם
$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$ ו־
$g(x) \sim \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos nx + B_n \sin nx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{inx}$ אז

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}dx = \frac{a_0\overline{A_0}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\overline{A_n} + b_n\overline{B_n}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\overline{C_n}$$

3 התמרת פורייה

3.1 הגדרה ותכונות

הגדרה 3.1 נסמן ב־G את מרחב הפונקציות הרציפות למקוטעין ואינטגרביליות בהחלט שמקבלות משתנים ממשיים ומחזירות ערכים קומפלקסיים ומוגדרות על כל $\mathbb{R}$.

הגדרה 3.2 התמרת פורייה (Fourier) **של פונקציה** $f(x)$ **תסומן** $F(\omega)$ **(ולפעמים גם** $\hat{f}(\omega)$**) לכל** $f \in G$ **נגדיר:**

$$F(\omega) = \mathcal{F}\left[f(x)\right](\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx$$

תכונות ונוסחאות

1. $\mathcal{F}\left[af(x)+bg(x)\right](\omega) = aF(\omega)+bG(\omega)$ **(לינאריות)**
2. אם $f(x)$ ממשית אז $\overline{F(\omega)} = F(-\omega)$
3. אם $f(x)$ ממשית וזוגית אז $F(\omega)$ ממשית וזוגית
4. אם $f(x)$ ממשית ואי־זוגית אז $F(\omega)$ מדומה טהורה ואי־זוגית
5. $\mathcal{F}\left[f(ax+b)\right](\omega) = \frac{1}{|a|}e^{i\omega\frac{b}{a}}F(\frac{\omega}{a})$
6. $\mathcal{F}\left[e^{iax}f(x)\right](\omega) = F(\omega-a)$ **("סיבוב בזמן = הזזה בתדר")**
7. נוסחאות המודולציה:
   - $\mathcal{F}\left[f(x)\cos ax\right](\omega) = \frac{1}{2}\left(F(\omega-a)+F(\omega+a)\right)$
   - $\mathcal{F}\left[f(x)\sin ax\right](\omega) = \frac{1}{2i}\left(F(\omega-a)-F(\omega+a)\right)$
8. נוסחת הנגזרת:
   - $\mathcal{F}\left[f'(x)\right](\omega) = i\omega F(\omega)$
   - $\mathcal{F}\left[f^{(n)}(x)\right](\omega) = (i\omega)^n F(\omega)$
9. $\mathcal{F}\left[xf(x)\right](\omega) = i\frac{d}{d\omega}F(\omega)$ **(נוסחת המומנט)**
10. התמרות נפוצות:
    - $\chi_a(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{\sin a\omega}{\pi\omega}$ כאשר $\chi_a(x) = \begin{cases} 1, & x \in [-a,a] \\ 0, & x \notin [-a,a] \end{cases}$
    - $e^{-|x|} \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{\pi(1+\omega^2)}$
    - $e^{-\frac{1}{2}x^2} \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\omega^2}$

משפט 3.3

1. $F(\omega)$ מוגדרת לכל $\omega \in \mathbb{R}$
2. $F(\omega)$ רציפה
3. $\lim_{\omega\to\pm\infty} F(\omega) = 0$
4. $F(\omega)$ אינה בהכרח אינטגרבילית בהחלט

3.2 התמרה הפוכה ומשפט פלנשרל

משפט 3.4 (התמרה הפוכה): אם $f(x)$ רציפה אז:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega x}d\omega$$

באופן כללי:

$$\frac{f(x+)+f(x-)}{2} = \lim_{M\to\infty}\int_{-M}^{M} F(\omega)e^{i\omega x}dx$$

משפט 3.5 (התמרה כפולה): $\mathcal{F}\left[\mathcal{F}\left[f(x)\right]\right](x) = \frac{1}{2\pi}f(-x)$

משפט 3.6 (נוסחת פלנשרל):

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|f(x)\right|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty}\left|F(\omega)\right|^2 d\omega$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}dx = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\overline{G(\omega)}d\omega$$

3.3 קונבולוציה

הגדרה 3.7 כאשר האינטגרל הבא קיים, הוא הקונבולוציה (convolution):

$$(f*g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)dy$$

משפט 3.8

1. $(f*g)(x) = (g*f)(x)$
2. אם f, g אינטגרביליות בהחלט אז $(f*g)(x)$ קיים ואינטגרבילי בהחלט
3. $\mathcal{F}\left[f*g\right](\omega) = 2\pi F(\omega)G(\omega)$

4 התמרת לפלס

הגדרה 4.1 עבור $f(t)\in G[0,\infty)$ נגדיר את התמרת לפלס (Laplace):

$$\mathcal{L}\left[f(t)\right](s)=\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

לכל s עבורו האינטגרל קיים

משפט 4.2 אם $|f(t)|<Ke^{at}$ לכל $t>0$ אז $\mathcal{L}\left[f(t)\right](s)$ קיים לכל $s>a$

תכונות ונוסחאות

1. $\mathcal{L}\left[af(t)+bg(t)\right](s)=a\mathcal{L}\left[f(t)\right](s)+b\mathcal{L}\left[g(t)\right](s)$ (לינאריות)
2. אם אומרים ש $f(t)=0$ לכל $t<0$ אז $\mathcal{L}\left[f(t)\right](s)=2\pi\mathcal{F}\left[f(x)\right](-is)$
3. נוסחת הנגזרת:
   - $\mathcal{L}\left[f'(t)\right](s)=s\mathcal{L}\left[f(t)\right](s)-f(0)$
   - $\mathcal{L}\left[f^{(n)}(t)\right](s)=s^n\mathcal{L}\left[f(t)\right](s)-f^{(n-1)}(0)-sf^{(n-2)}(0)-\ldots-s^{n-1}f(0)$
4. נוסחאות המומנט:
   - $\mathcal{L}\left[tf(t)\right](s)=-\frac{d}{ds}\mathcal{L}\left[f(t)\right](s)$
   - $\mathcal{L}\left[t^nf(t)\right](s)=(-1)^n\frac{d^n}{ds^n}\mathcal{L}\left[f(t)\right](s)$
5. $\mathcal{L}\left[e^{at}f(t)\right](s)=\mathcal{L}\left[f(t)\right](s-a)$
6. $\mathcal{L}\left[u_c(t)f(t-c)\right](s)=e^{-cs}\mathcal{L}\left[f(t)\right](s)$
7. $\mathcal{L}\left[f(at)\right](s)=\frac{1}{a}\mathcal{L}\left[f(t)\right]\left(\frac{s}{a}\right)$
8. $\lim_{s\to\infty}\mathcal{L}\left[f(t)\right](s)=0$
9. התמרות נפוצות:
   - $u(t)\xrightarrow{\mathcal{L}}\frac{1}{s},\ s>0$
   - $e^{at}\xrightarrow{\mathcal{L}}\frac{1}{s-a},\ s>a$
   - $\sin at\xrightarrow{\mathcal{L}}\frac{a}{s^2+a^2},\ s>0$
   - $\cos at\xrightarrow{\mathcal{L}}\frac{s}{s^2+a^2},\ s>0$
   - $t^n\xrightarrow{\mathcal{L}}\frac{n!}{s^{n+1}},\ s>0$
   - $u_c(t)\xrightarrow{\mathcal{L}}\frac{e^{-cs}}{s},\ s>0$

4.1 פונקציית הביסייד ופונקציית דלתא של דירק

פונקציית הביסייד (Heaviside): לכל $c \geq 0$ נגדיר:

$$u_c(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < c \\ 1, & c \leq t \end{cases}$$

כאשר רשום $u(t)$ הכוונה $c = 0$

פונקציית דלתא של דירק (Dirac-Delta): הפונקציה $\delta_c(x) = \delta(x-c)$ אינה פונקציה רגילה, אבל היא כן פונקציה מוכללת. היא מוגדרת באמצעות התכונה:

$$\int_a^b \delta(x-c)f(x)dx = \begin{cases} f(c), & c \in (a,b) \\ 0, & c \notin [a,b] \end{cases}$$

מכאן עולה הקשר $\int_{-\infty}^t \delta(s-c)ds = u_c(t)$ **וגם** $\mathcal{L}\left[\delta_c\right](s) = e^{-cs}$

4.2 קונבולוציה

$$(f*g)(t) = \int_0^t f(y)g(t-y)dy$$

$$\mathcal{L}\left[f*g\right](s) = \mathcal{L}\left[f\right](s) \cdot \mathcal{L}\left[g\right](s)$$

4.3 התמרה הפוכה

ע"מ לחשב התמרה הפוכה יש להביא את הפונקציה הנתונה למצב מוכר (התמרות נפוצות). ניתן להשתמש בפירוק לשברים של פונקציות רציונליות:

פירוק לשברים של פונקציות רציונליות נתון $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ כאשר $P(x)$ ו־ $Q(x)$ פולינומים ו־ $deg(Q) \geq deg(P)$ אזי נרשום את Q באופן הבא:
$Q(x) = \prod_i (x-x_i)^{k_i}(a_ix^2+b_ix+c_i)$ כאשר לפרבולות $a_ix^2+b_ix+c_i$ אין שורשים ממשיים. כל איבר מהצורה $(x-x_i)^{k_i}$ ייתרום איבר מהצורה
$\frac{A_{i1}}{x-x_i} + \frac{A_{i2}}{(x-x_i)^2} + \ldots + \frac{A_{ik_i}}{(x-x_i)^{k_i}}$ וכל איבר מהצורה $(a_ix^2+b_ix+c_i)$ ייתרום $\frac{C_ix+D_i}{a_ix^2+b_ix+c_i}$. בסה"כ נקבל:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_i \left[\frac{A_{i1}}{x-x_i} + \frac{A_{i2}}{(x-x_i)^2} + \ldots + \frac{A_{ik_i}}{(x-x_i)^{k_i}} + \frac{C_ix+D_i}{a_ix^2+b_ix+c_i}\right]$$

באגף ימין נבצע מכנה משותף לקבלת $Q(x)$ במכנה, ונדרוש שהביטוי שנקבל במונה יהיה $P(x)$ מהשוואת מקדמים נקבל משוואות שפתרונן יניב את כל הנעלמים A, C, D, ההתמרה ההפוכה של אגף ימין היא פשוטה יחסית