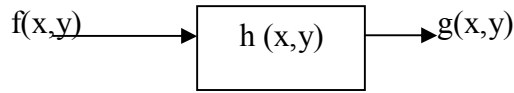


עיבוד וניתוח תמונות – נקודות עיקריות

מבוסס על הרצאותיו של פרופ' יואב שכנר

אותות ומערכות בדי מימד



מערכת לינארית:

$$H\{\alpha_1 f_1(x,y) + \alpha_2 f_2(x,y)\} = \alpha_1 H\{f_1(x,y)\} + \alpha_2 H\{f_2(x,y)\}$$

מערכת חסרת זכרון = נקודתית = תלויה בערכי f (ואולי עוד פונקציות) רק בנקודה (x,y) : $g(x,y) = \Phi(b(x,y), f(x,y))$
 מערכת קבועה במקום:

$$H\{f(x,y)\} = g(x,y) \Leftrightarrow H\{f(x-\alpha, y-\beta)\} = g(x-\alpha, y-\beta)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-\alpha, y-\beta) \delta(x,y) dx dy = f(\alpha, \beta) \quad \text{הגדרת דלתא דו מימדית:}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x-\alpha, y) \delta(x) dx = f(\alpha, y) \quad \text{("דלתא קווית")}$$

תגובה להלם של מערכת לינארית: $h(x,y;\alpha,\beta)$

$$H\{f(x,y)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha,\beta) h(x,y;\alpha,\beta) dx dy \quad \text{חישוב מוצא של מערכת לינארית - אינטגרל הסופרפוזיציה:}$$

חישוב מוצא של מערכת LSI - מערכת לינארית קבועה במקום - אינטגרל הקונבולוציה:

$$H\{f(x,y)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha,\beta) h(x-\alpha, y-\beta) dx dy = f(x,y) * h(x,y)$$

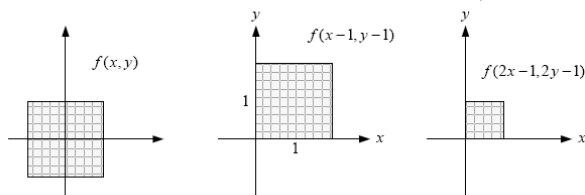
ספרביליות של מערכת לינארית: $h(x,y;\alpha,\beta) \equiv h_1(x,\alpha) h_2(y,\beta)$ ואם האות ספרבילי אפשר לקבל 2 אינטגרלים חד מימדיים ואפשר לשנות את סדר הפעולות.

מערכות מיוחדות:

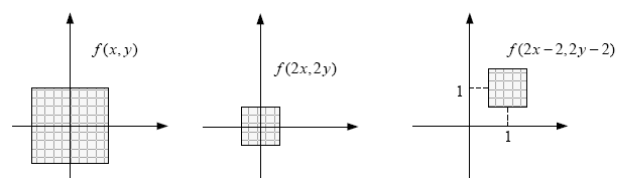
1. הזזה: $g(x,y) = f(x-x_0, y-y_0)$

2. זום (עבור C חיובי): $g(x,y) = f(cx, cy)$ לשים לב, זו מערכת לינארית אך תלויה במקום

לדוגמה, עבור: $c=2$, $(x_0, y_0) = (1,1)$ ו- $f(x,y) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1, |y| \leq 1 \\ 0, & \text{else} \end{cases}$
 הזזת הכניסה ולאחר מכן הפעלת האופרטור:



הפעלת האופרטור ולאחר מכן ביצוע ההזזה:



3. חזאי (צופה מה יהיה הפיקסל הבא – שימושי בעיקר בדחיסה):

| | | | |
|---|---|---|--|
| | C | A | |
| B | X | | |

$$X = \begin{cases} \min(A, B) & , C \geq \max(A, B) \\ \max(A, B) & , C \leq \min(A, B) \\ A + B - C & , \text{Otherwise} \end{cases}$$

לשים לב: מערכת קבועה במקום אך לא לינארית

התמרת פורייה 2D

$$F(u, v) = F\{f(x, y)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-j2\pi(ux+vy)} dx dy$$

הגדרת ההתמרה - הרגילה וההופכית:

$$f(x, y) = F^{-1}\{F(u, v)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(u, v) e^{j2\pi(ux+vy)} du dv$$

דוגמא קלאסית:

תגובת תדר = התמרת פורייה של התגובה להלם, אות הרמוני = אות עצמי של מערכת LSI:

$$e^{j2\pi(u_0x+v_0y)} \xrightarrow{h(x,y)} H(u_0, v_0) e^{j2\pi(u_0x+v_0y)}$$

התמרות פורייה ידועות:

| $f(x, y)$ | $F(\xi_1, \xi_2)$ |
|---|---|
| $\delta(x, y)$ | 1 |
| $\delta(x \pm x_0, y \pm y_0)$ | $\exp(\pm j2\pi x_0 \xi_1) \exp(\pm j2\pi y_0 \xi_2)$ |
| $\exp(\pm j2\pi x \eta_1) \exp(\pm j2\pi y \eta_2)$ | $\delta(\xi_1 \mp \eta_1, \xi_2 \mp \eta_2)$ |
| $\exp[-\pi(x^2 + y^2)]$ | $\exp[-\pi(\xi_1^2 + \xi_2^2)]$ |
| $\text{rect}(x, y)$ | $\text{sinc}(\xi_1, \xi_2)$ |
| $\text{tri}(x, y)$ | $\text{sinc}^2(\xi_1, \xi_2)$ |
| $\text{comb}(x, y)$ | $\text{comb}(\xi_1, \xi_2)$ |

פונקציות עיקריות:

| Function | Definition | Function | Definition |
|-------------------------|--|------------------|---|
| <i>Dirac delta</i> | $\delta(x) = 0, x \neq 0$ | <i>Rectangle</i> | $\text{rect}(x) = \begin{cases} 1, & x \leq 1/2 \\ 0, & x > 1/2 \end{cases}$ |
| | $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \delta(x) dx = 1$ | <i>Signum</i> | $\text{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$ |
| <i>Sifting property</i> | $\int_{-\infty}^{\infty} f(x') \delta(x - x') dx' = f(x)$ | <i>Sinc</i> | $\text{sinc}(x) = \frac{\sin \pi x}{\pi x}$ |
| <i>Scaling property</i> | $\delta(ax) = \frac{\delta(x)}{ a }$ | <i>Comb</i> | $\text{comb}(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - n)$ |
| <i>Kronecker delta</i> | $\delta(n) = \begin{cases} 0, & n \neq 0 \\ 1, & n = 0 \end{cases}$ | <i>Triangle</i> | $\text{tri}(x) = \begin{cases} 1 - x , & x \leq 1 \\ 0, & x > 1 \end{cases}$ |
| <i>Sifting property</i> | $\sum_{m=-\infty}^{\infty} f(m) \delta(n - m) = f(n)$ | | |

$$F(\theta_1, \theta_2) = F_D\{f[m, n]\} = \sum_n \sum_m f[m, n] e^{-j(\theta_1 m + \theta_2 n)}$$

$$f[m, n] = F_D^{-1}\{F(\theta_1, \theta_2)\} = \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(\theta_1, \theta_2) e^{j(\theta_1 m + \theta_2 n)} d\theta_1 d\theta_2$$

התמרת פורייה לאות בדיד (מקבילה ל-DTFT במב"ס):

אותות ומערכות בזמן בדיד

$$A = \{a[m,n]\} = \begin{bmatrix} a[1,1] & a[1,2] & \dots & a[1,n] \\ a[2,1] & a[2,2] & \dots & a[2,n] \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ a[m,1] & a[m,2] & \dots & a[m,n] \end{bmatrix} \quad \text{ייצוג אות ע"י מטריצה:}$$

סידורים אפשריים:

$$A = \begin{bmatrix} a[1,1] \\ \dots \\ a[m,1] \\ a[1,2] \\ \dots \\ a[m,2] \\ \dots \\ a[m,n] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{column 1} \\ \text{column 2} \\ \dots \\ \text{column n} \end{bmatrix} \quad \text{COLUMN STACK סידור עמודות:}$$

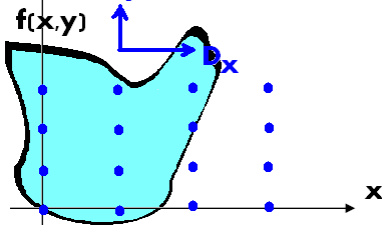
$$A = \begin{bmatrix} a[1,1] \\ \dots \\ a[1,n] \\ a[2,1] \\ \dots \\ a[2,n] \\ \dots \\ a[m,n] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{row 1} \\ \text{row 2} \\ \dots \\ \text{row m} \end{bmatrix} \quad \text{ROW STACKING סידור שורות:}$$

$$a[i,j] = a[i+1,j+1] \Rightarrow A = \begin{bmatrix} a & b & c & \dots & \dots \\ d & a & b & \ddots & \dots \\ \vdots & d & a & \ddots & c \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & b \\ \vdots & \ddots & \ddots & d & a \end{bmatrix} \quad \text{מטריצת טופליץ – כל האלכסונים זהים:}$$

$$h(m,n) = \begin{bmatrix} h[0] & h[1] & h[2] & h[3] \\ h[3] & h[0] & h[1] & h[2] \\ h[2] & h[3] & h[0] & h[1] \\ h[1] & h[2] & h[3] & h[0] \end{bmatrix} \quad \text{מקרה פרטי: מטריצה סיבובית (Circular) } a_{(i,j)} = a_{(i-j) \bmod N} \text{ דוגמא עבור } N=4$$

הגדרת רכבת הלמים = מסרק: $comb(x, y, Dx, Dy) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - mDx, y - nDy)$
 נשתמש בנוסחאת ההתמרה:

התמרת פורייה שלה: $F\{comb(x, y, Dx, Dy)\}(u, v) = \frac{1}{Dx} \frac{1}{Dy} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(u - \frac{m}{Dx}, v - \frac{n}{Dy}\right) = \frac{1}{DxDy} comb\left(u, v, \frac{1}{Dx}, \frac{1}{Dy}\right)$
 לכן, קיימת דואליות של רכבת הלמים במקום ובתדר (עד כדי קבועים)



דגימה מלבנית = כפל ברכבת הלמים זו מימדת: $f[m, n] = f(m \cdot Dx, nk \cdot Dy)$

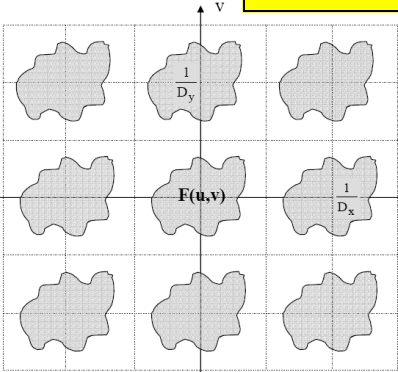
ובמישור התדר: $F(u, v) * \frac{1}{DxDy} comb\left(u, v, \frac{1}{Dx}, \frac{1}{Dy}\right) = \frac{1}{DxDy} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F\left(u - \frac{m}{Dx}, v - \frac{n}{Dy}\right)$

התמרת פורייה משתכפלת לאינסוף והמרווחים הם $Du = \frac{1}{Dx}, Dv = \frac{1}{Dy}$

בהנחה כי: $F(u, v) = 0, \forall |u| > U, |v| > V$ אזי

תנאי נייקויסט למניעת ALIASING (חפיפות שכפולים בתחום התדר)

(ניתן לעשות סינון ANTI ALIASING מקדים ע"י LPF) $U < \frac{1}{2Dx}, V < \frac{1}{2Dy}$



סריג דגימה מלבני מוכלל לדגימה מוכללת: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix}}_U \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$

נגדיר תא יחידה = תא הכולל נקודת דגימה יחידה במישור הדגימה (המקום)

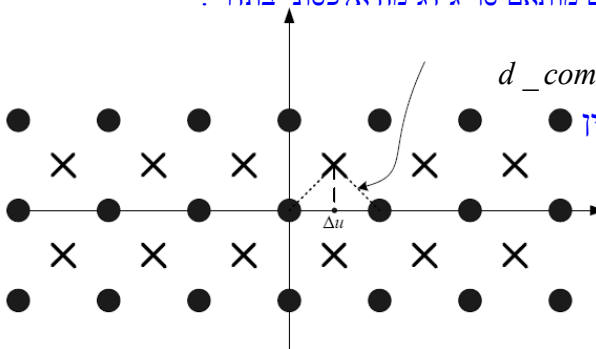
והאות הדגום: $f_s(\underline{x}) = f(\underline{x}) \cdot comb(\underline{x}, \underline{U})$ ובמישור התדר: $F_s(\underline{u}) = \frac{1}{|\det \underline{U}|} F(\underline{u}) * comb(\underline{u}, \underline{U}^{-T}) = \frac{1}{|\det \underline{U}|} \sum_n F(\underline{u} - \underline{U}^{-T} \underline{n})$

הגדרת נצילות תא יחידה: $\eta = \frac{S_{support}}{|\det \underline{U}^{-T}|}$ (כמובן שתמיד תהיה קטנה או שווה ל-1) כש \underline{U}^{-T} היא המטריצה ההופכית transpose של מטריצת הדגימה במקום. נוסחא להפיכת מטריצה 2x2:

$A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

נשים לב: לתא יחידה מתאים סריג דגימה אחד ויחיד אבל לא להיפך! לסריג דגימה יכולים להיות מספר תאי יחידה (כמו שראינו בתרגיל בית מס' 3). גם מטריצת דגימה גוררת סריג דגימה יחיד.

סריג אלכסוני = דואליות במקום ובתדר: לסריג דגימה אלכסוני במקום מותאם סריג דגימה אלכסוני בתדר: ניתן לבנותו בצורת סופר פוזיציה של שתי פונקציות מסרק במקום:



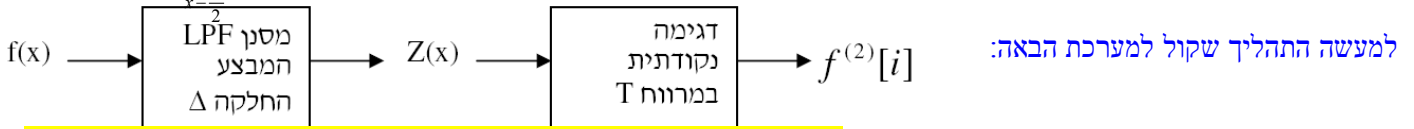
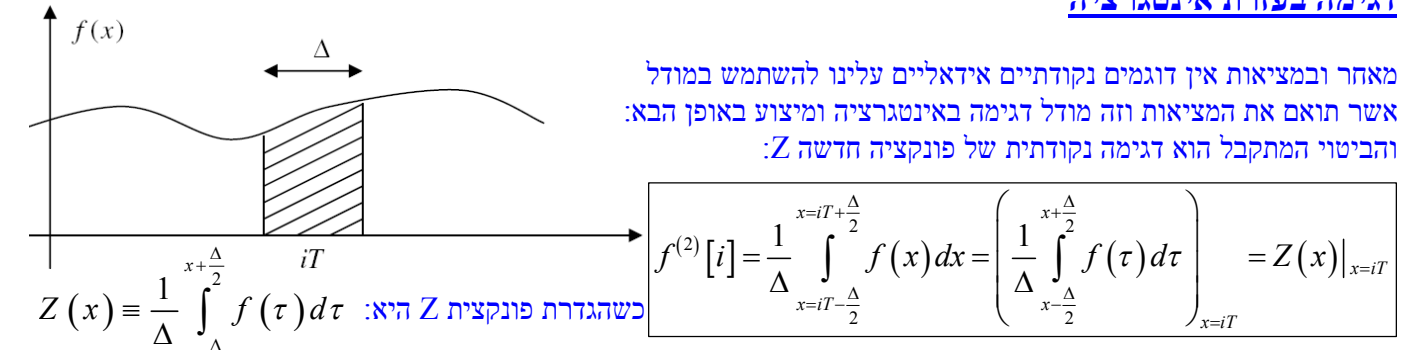
$d_comb_{\Delta u, \Delta v}(u, v) = comb_{2\Delta u, 2\Delta v}(u, v) + comb_{2\Delta u, 2\Delta v}(u - \Delta u, v - \Delta v)$

ולכן מהדואליות (שראינו קודם), בתחום התדר – ופיתוח לא ממש מעניין מתרגול מספר 5:

$F^{-1}\{d_comb_{\Delta u, \Delta v}(u, v)\} = \frac{1}{2\Delta u \Delta v} d_comb_{(2\Delta u)^{-1}, (2\Delta v)^{-1}}(x, y)$

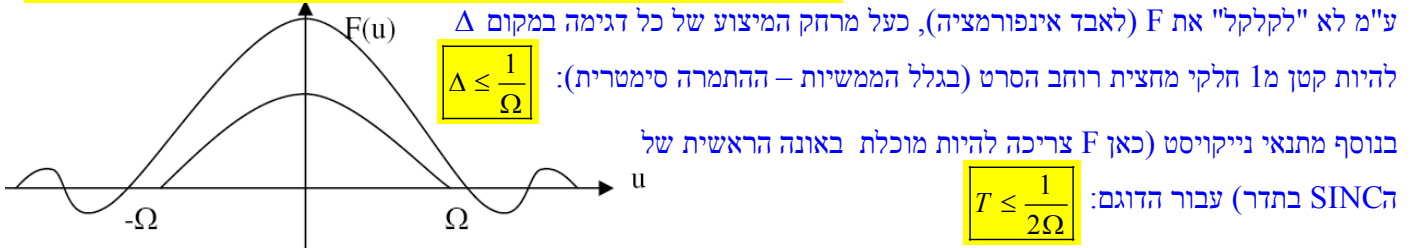
דגימה בעזרת אינטגרציה

מאחר ובמציאות אין דוגמים נקודתיים אידאליים עלינו להשתמש במודל אשר תואם את המציאות וזה מודל דגימה באינטגרציה ומיצוע באופן הבא: והביטוי המתקבל הוא דגימה נקודתית של פונקציה חדשה Z:



כלומר Z הוא F לאחר החלקה (מסנן LPF מלבני):

$$Z(u) = H(u)F(u) \quad ; \quad h(x) = \frac{1}{\Delta} \text{rect}\left(\frac{x}{\Delta}\right) \leftrightarrow H(u) = \text{sinc}(\Delta u)$$



נשים לב כי נרצה Δ קטן מספיק כדי להתקרב לדגימת הלמים, אבל לא קטן מדי כיוון שאז נקבל רעש מוגבר. בכדי לשחזר נרצה להשתמש ב $F(u) = \frac{1}{H(u)} Z(u)$ מסנן, שאינו יציב! עבור $H=0$ המסנן לא מוגדר ועבור ערכים קטנים נקבל

שוב הגבר של הרעש. הפתרון הוא לבנות מסנן מקורב ע"י פיתוח טיילור:

$$H(u) = \text{sinc}(\Delta u) = \frac{\sin(\pi\Delta u)}{\pi\Delta u} = \frac{\pi\Delta u - \frac{(\pi\Delta u)^3}{3!} + \dots}{\pi\Delta u} \Rightarrow H^{-1}(u) \approx 1 + \frac{\pi^2 \Delta^2}{6} u^2$$

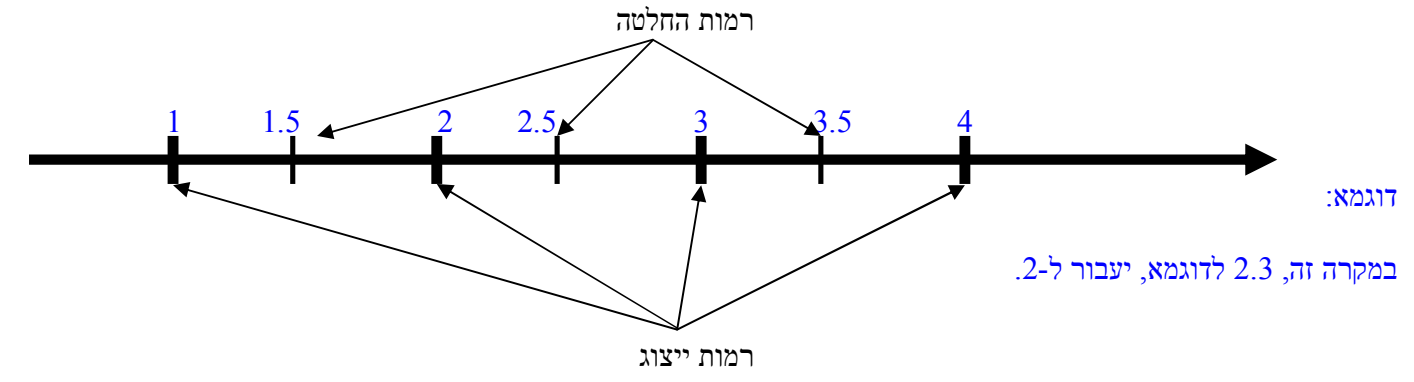
נשים לב כי ku^2 הוא מסנן לנגזרת שניה.

ובמקרה הדו מימדי – מסיכת השחרור היא:

$$H^{-1}(u) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{\pi^2 \Delta^2}{24T^2} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}}_{\text{Laplacian}} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\pi^2 \Delta^2}{24T^2} & 0 \\ -\frac{\pi^2 \Delta^2}{24T^2} & 1 + \frac{\pi^2 \Delta^2}{6T^2} & -\frac{\pi^2 \Delta^2}{24T^2} \\ 0 & -\frac{\pi^2 \Delta^2}{24T^2} & 0 \end{bmatrix}$$

קוונטיזציה

מאחר ויש לנו זכרון סופי ע"מ לייצג תמונה במחשב עלינו: א. לדגום לפיקסלים בדידים ובנוסף: ב. עבור כל פיקסל עלינו לקבוע את ייצוגו בהינתן מספר הרמות הסופי האפשרי עבור כל פיקסל.



נכתב ע"י: עדי פוקס

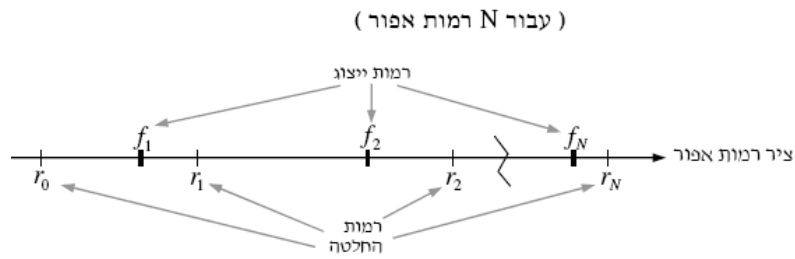
הגדרת קוונטיזציה כללית:

$$\left\{ r_k \right\}_{k=0}^{N+1}$$

N+1 רמות החלטה

$$\left\{ f_k \right\}_{k=1}^N$$

N רמות ייצוג



- r_N, r_0 ימוקמו ברמות האפור הראשונה והאחרונה בהתאמה.
- כעת כל הגוונים בתחום $[r_{k-1}, r_k]$ ימופו לרמת אפור f_k

דוגמא פרטית: קוונטיזציה אחיד

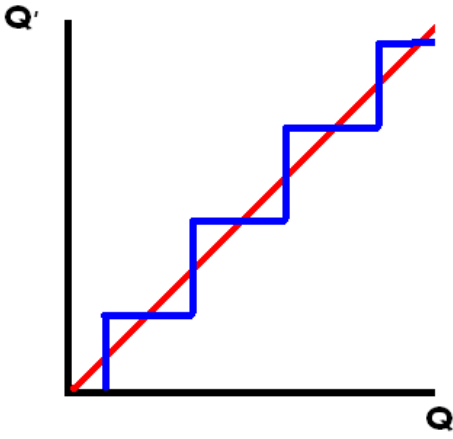
הגדרה: $q = f_k - f_{k-1} = r_k - r_{k-1} = Const$. מרווח הקוונטיזציה.

ואז מתקיים: $r_k = \frac{f_k + f_{k+1}}{2}$

נחשב את השגיאה: מאחר והקוונטיזציה אחיד – השגיאה אחידה $-\frac{q}{2} \leq \varepsilon \leq \frac{q}{2}$. ברור כי תוחלת השגיאה היא אפס.

$$\int_{-\frac{q}{2}}^{\frac{q}{2}} \varepsilon^2 p(\varepsilon) d\varepsilon = \int_{-\frac{q}{2}}^{\frac{q}{2}} \varepsilon^2 \frac{1}{4q} d\varepsilon = \frac{q^2}{12}$$

קוונטיזציה מקס לוי (מרשה פונקציה מדרגות לא אחידה)



נגדיר עיוות כלשהו בקוונטיזציה: $d(u, u') \Rightarrow$ עיוות בד"כ יוגדר כפונקציה אי שלילית.

העיוות הכולל הוא: $D = E\{d(u, u')\} = \int_{r_0}^{r_N} d(u, u') p_u(u) du$ כלומר מכניסים את העיוות וממשקלים לפי צפיפות ההסתברות של u – התמונה המקורית לפני הקוונטיזציה. לכן ע"מ לחשב עבור כל הרמות נפלוק את האינטגרל לסכומים באופן הבא:

$$\int_{r_0}^{r_N} d(u, u') p_u(u) du = \sum_{k=1}^N \int_{r_{k-1}}^{r_k} d(u, f_k) p_u(u) du$$

כעת, מטעמי נוחות נגדיר את העיוות הרצוי: **שגיאה ריבועית ממוצעת MSE=Mean Square Error**. $d(u, u') = (u - u')^2$.

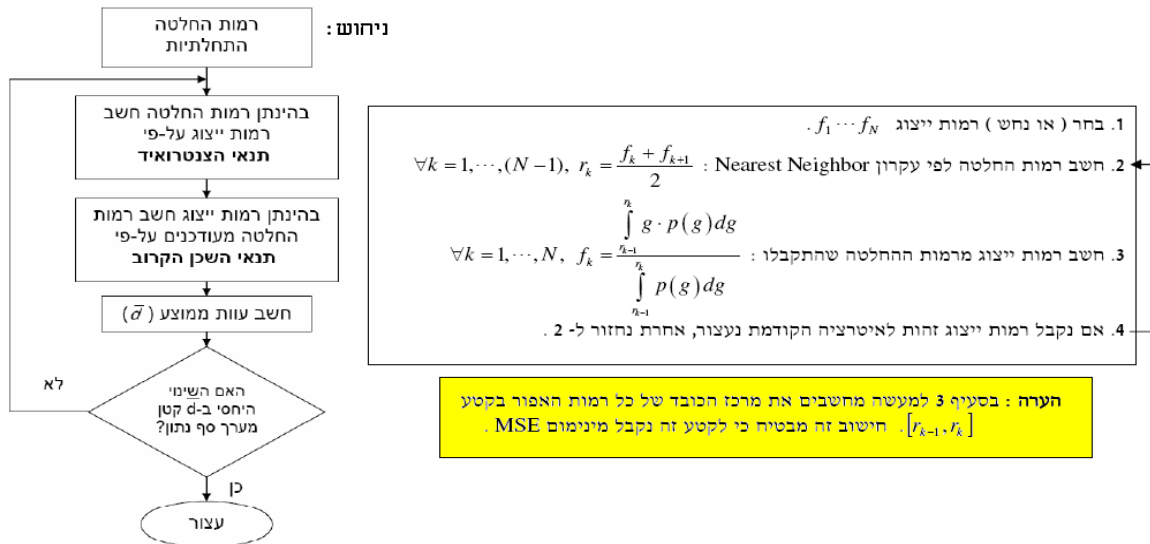
ולכן: $D = \sum_{k=1}^N \int_{r_{k-1}}^{r_k} (u - f_k)^2 p_u(u) du$ כעת, מאחר וקל לגזור את העיוות, נגזור אותו העיוות על מנת לקבל מינימום. נדרוש:

$$\frac{\partial}{\partial r_k} \Big|_{k=1, \dots, N} = \frac{\partial}{\partial f_k} \Big|_{k=1, \dots, N-1} = 0$$

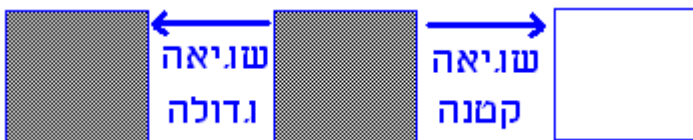
| | |
|---|--|
| $f_k = \frac{\int_{r_{k-1}}^{r_k} u p_u(u) du}{\int_{r_{k-1}}^{r_k} p_u(u) du}$ | <p>1. תנאי השכן הקרוב (Nearest Neighbor): $r_k = \frac{f_k + f_{k+1}}{2}$</p> <p>2. תנאי הצנטרואיד ("מרכז הכובד"): $f_k = \frac{\int_{r_{k-1}}^{r_k} u p_u(u) du}{\int_{r_{k-1}}^{r_k} p_u(u) du}$</p> |
|---|--|

$$MSE = \frac{1}{MN} \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N (f[m, n] - \tilde{f}[m, n])^2$$

הגדרת השגיאה הריבועית עבור תמונה בדידה:

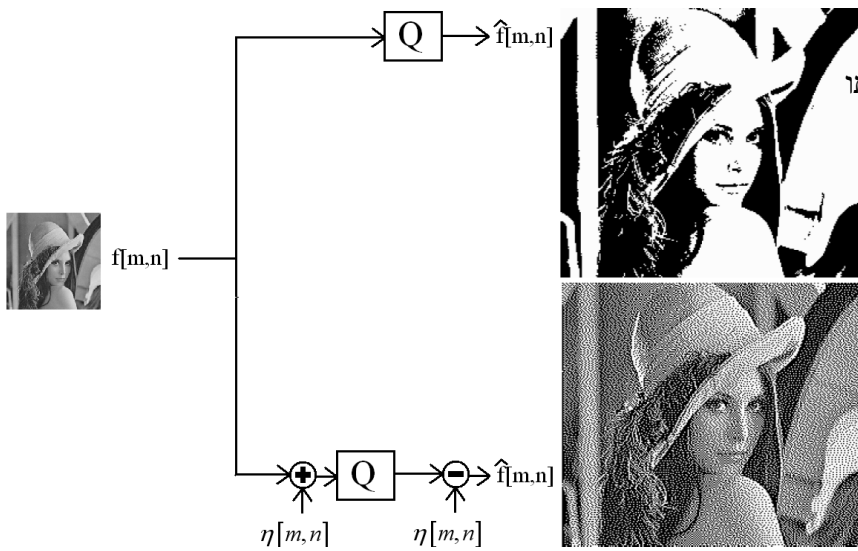


***הערה:** האלגוריתם הוא נומרי שמתכנס ל-MSE - אך יתכן ונתכנס למינימום המקומי ולא הכללי



עוד נקודה: ברור כי עיוות שגיאה ריבועיות אינו תמיד מדד טוב לטיב התמונה בעין האנושית. לדוגמא: תמונה של: $(0, 255, 0, 255, \dots)$ תיראה כמו $(255, 0, 255, 0, \dots)$ בגלל שהזזה של פיקסל אחד לא משנה הרבה בעין אבל במונחים של עיוות MSE השגיאה בין שתי התמונות היא מקסימלית בעוד שבהשוואה של אחת התמונות לתמונת אפסים השגיאה הריבועית קטנה יותר (למרות שבעין של צופה יש דמיון קטן יותר).

הדבר מביא אותנו לנושא בעיית הקוונטורים בקוונטיזציה ופתרונה ע"י Dithering:



כשמבצעים קוונטיזציה לתמונות יתכן וניתקל בתופעה של יצירה איזורים שלמים שיקבלו את אותה רמה. איזורים אלה ייראו כ"כתמים" בעל אותו צבע והמעברים ביניהם יראו חדים (היווצרות "קוונטורים"). שיטה להיפטר מתופעת הקוונטורים היא הוספת רעש מקדים לתמונה לפני הקוונטיזציה והסרתו אחריה (הרעש ידוע) "**Dithering**".

בדוגמא: קוונטיזציה ל-2 רמות, העליונה בלי רעש מקדים והתחתונה עם הרעש והסרתו - dithered. נשים לב כי רעש טוב הוא: $\eta[m,n] \sim Uni\left[-\frac{D}{2}, \frac{D}{2}\right]$

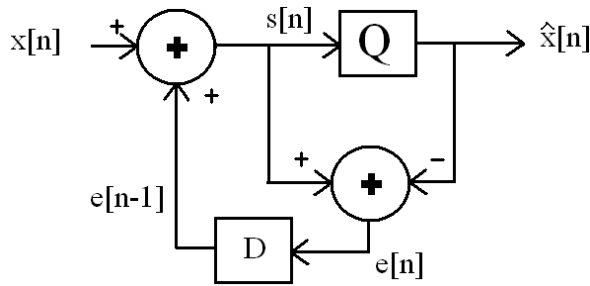
כש D הוא מסדר גודל של שגיאת הקוונטיזציה q

דוגמא מספרית: קוונטיזצור עיגול לשלמים
שגיאת הקוונטיזציה q היא $\pm 1/2$ לכן נבחר רעש: $\eta[m,n] \sim Uni\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

| | | | | | | |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|--------------------|
| 4 | 4 | 4 | 4 | 5 | 5 | קוונטיזציה בלי רעש |
| 4.2 | 4.2 | 4.3 | 4.4 | 4.5 | 4.6 | תמונה מקורית |
| 4 | 4 | 4 | 5 | 4 | 5 | קוונטיזציה עם רעש |

הערה: ברור שאם נבצע קוונטיזציה עם רעש ונשלח את התמונה ברשת לא נרצה לשלוח לאדם בנוסף את כל תמונת הרעש כי זה יהיה בזבזני - הפתרון לכך הוא שרעש נוצר ע"י מחשב בהינתן "פרמטר מזל" שמוגרל (SEED) הזרך ההסכנית ביותר היא לשמור רק את ה-SEED וכך המשתמש בצד השני של הרשת יוכל ליצור את אותו רעש בדיוק ולהסיר אותו.

בעיית השגיאה המצטברת בקוונטיזציה ופתרונה ע"י פעפוע שגיאה - Error diffusion



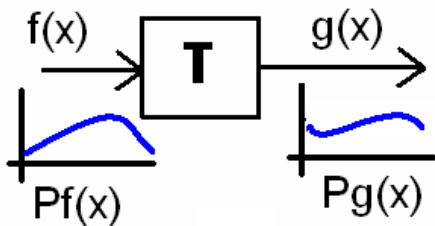
עבור קוונטיזציה כללית רגילה אם יתקבל רצף של פיקסלים בעלי אותה רמה שאינה אחת מרמות הייצוג השגיאה של הקוונטיזציה תלך ותצטבר. פתרון לכך הוא **פעפוע שגיאה**: מערכת השומרת את השגיאה מהפיקסל האחרון (למשל!) ומוסיפה אותה לפיקסל הנוכחי, כך לשגיאה תהיה השפעה ולא תצטבר.

דוגמא מספרית קוונטיזציה לשלמים:

| | | | | | | | |
|-----|------|-----|------|-----|-----|------|---------------------|
| 4.4 | 4.4 | 4.4 | 4.4 | 4.4 | 4.4 | 4.4 | אות מקורי |
| 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | קוונטיזציה כללית |
| 0.4 | 0.4 | 0.4 | 0.4 | 0.4 | 0.4 | 0.4 | שגיאה |
| 4.4 | 4.8 | 4.2 | 4.6 | 4 | 4.4 | 4.8 | S |
| 4 | 5 | 4 | 5 | 4 | 4 | 5 | קוונטיזציה עם פעפוע |
| 0.4 | -0.2 | 0.2 | -0.4 | 0 | 0.4 | -0.2 | שגיאה |

פעולות נקודה והיסטוגרמה (בד"כ פעולות לא לינאריות)

פעולות נקודה הינן פעולות "חסרות זיכרון" כלומר, אם באופן כללי פעולה על פיקסל תלויה בפיקסלים אחרים בתמונה (לדוגמא פיקסלים שכנים) פעולת נקודה תלויה **אך ורק** בפיקסל שעליו היא פועלת ולכן ניתן לייצג פעולה כזו ע"י LookUp Table = LUT שהיא למעשה נותנת את המוצא באופן חז"ע בהינתן רמת האפור של הפיקסל.



עישוב היסטוגרמה (רמות אפור)

נחפש טרנספורמציה LUT מונוטונית עולה כך שנשאף לקבל במוצא את התמונה עם היסטוגרמה אחרת. מהי T? נגדיר את פונקציות צפיפויות ההסתברות (PDF):

$$F_f(x) = P\{f \leq x\} = \int_{-\infty}^x P_f(\tau) d\tau, \quad F_g(x) = P\{g \leq x\} = \int_{-\infty}^x P_g(\tau) d\tau$$

ונפתח: $F_f(x) = P\{f \leq x\} \stackrel{\text{monotonically inclining}}{=} P\{T(f) \leq T(x)\} = P\{g \leq T(x)\} = F_g(T(x))$

לכן: $T(x) = F_g^{-1}(F_f(x))$

מתיחת היסטוגרמה הוא למעשה עישוב היסטוגרמה T עבור היסטוגרמה Pg אחידה.

$P_f(x) = 2x; 0 < x < 1 \Rightarrow F_f(x) = x^2$

דוגמאות:

$P_g(x) = 1; 0 < x < 1 \Rightarrow F_g(x) = x \Rightarrow F_g^{-1}(x) = x \Rightarrow T(x) = F_g^{-1}(F_f(x)) = x^2$

$P_f(x) = 2x; 0 < x < 1 \Rightarrow F_f(x) = x^2$

$P_g(x) = \frac{1}{5}; 0 < x < 5 \Rightarrow F_g(x) = \frac{x}{5} \Rightarrow F_g^{-1}(x) = 5x \Rightarrow T(x) = F_g^{-1}(F_f(x)) = 5x^2$

דוגמא לעיצוב הסטוגרמה במקרה הבדיד (תמונה עם 20 פיקסלים): ע"י LUT נניח כי המקור הוא f ואנחנו רוצים את g שלב ראשון: נחשב את PDF של ההסטוגרמה המקורית

| | | | | | | | | |
|-------|---|---|---|----|----|----|----|----|
| x | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| h(f) | 1 | 2 | 3 | 4 | 4 | 3 | 2 | 1 |
| Hf(x) | 1 | 3 | 6 | 10 | 14 | 17 | 19 | 20 |

שלב שני: נחשב את PDF של ההסטוגרמה הרצויה

| | | | | | | | | |
|-------|---|---|---|----|----|----|----|----|
| X | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| h(g) | 4 | 3 | 2 | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| Hg(x) | 4 | 7 | 9 | 10 | 11 | 13 | 16 | 20 |

שלב שלישי: בהינתן ה-PDFים: נחשב את LUT הרצוי (נסמן בצבע מה עובר למה)

| | | | | | | | | |
|-------|---|---|---|----|----|----|----|----|
| X | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| Hf(x) | 1 | 3 | 6 | 10 | 14 | 17 | 19 | 20 |
| Hg(x) | 4 | 7 | 9 | 10 | 11 | 13 | 16 | 20 |

לכן, ה-LUT הסופי ייראה כך:

| | | | | | | | | |
|------|---|---|---|---|---|---|---|---|
| X | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| T(x) | 1 | 1 | 2 | 4 | 6 | 7 | 8 | 8 |

הערות: 1. בניית LUT להסטוגרמה אחידה לא תמיד ייתן לנו תמונה בעלת הסטוגרמה אחידה. הסיבה לכך היא הרמות הבדידות שמאלצות אותנו להקצות רמות החלטה נוקשות (חלוקה לא כ"כ עדינה, מעבר חד מרמה לרמה)

2. במקרים מסויימים תמונה בעלת הסטוגרמה אחידה לא תיראה טוב יותר, דוגמא של תמונה בעלת מספר איזורים שונים שלכל אחד מאפיינים משלו (דוגמא: שמיים וחול, או התמונה של הסוס הלבן על הרקע השחור מהתרגיל הרטוב) במקרים כאלה עלינו לעשות היסטוגרמה בנפרד על איזורים בתמונה.

פעולות היסטוגרמה נוספות

Gamma Correction - שיפור בהירות :

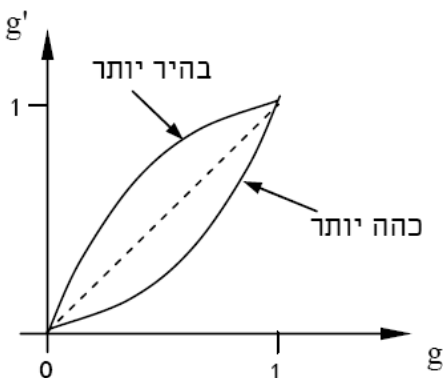
הפעלה של הפונקציה: $g' = g^\gamma$

עבור $\gamma > 1$ התמונה כהה יותר = חשיפה קצרה

(רוב התחום המקורי עובר לתחום צר יותר בטווח הכהה בתמונה החדשה)

עבור $\gamma < 1$ התמונה בהירה יותר = חשיפה ארוכה

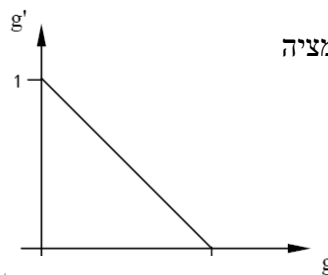
(רוב התחום המקורי עובר לתחום צר יותר בטווח הבהיר בתמונה החדשה)



Negative - הפיכת רמות התמונה:

בהינתן היסטוגרמה בעלת N רמות הטרנספורמציה

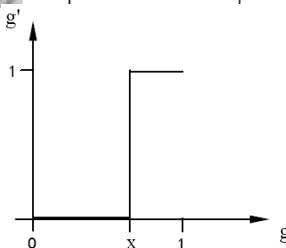
$$T(x) = N - x$$

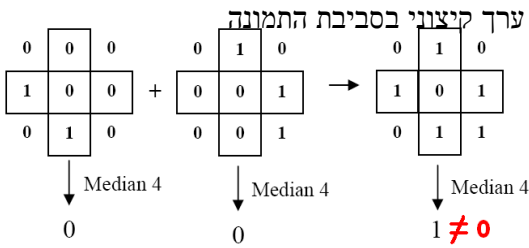


Thresholding = סף = בינאריזציה

המטרה: לייצג תמונה בכמות פחותה של ביטים (ביט יחיד לפיקסל, בהמשך נראה כי לעיתים יש דרכים חסכוניות אף יותר לייצוג תמונה)

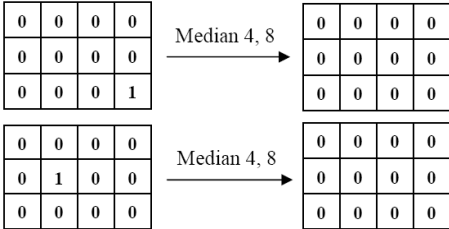
$$T(x) = \begin{cases} 0 & x < X \\ 1 & x \geq X \end{cases}$$





בניגוד לטשטוש מסנן חציון משמר שפות

הפעולה לא הפיכה, דוגמא נגדית - 2 תוצאות עם אותו מקור:



פעולות מרחביות בסיסיות – סינון לינארי וקבוע במקום מסיכה

הגדרה: $g[m, n] = f[m, n] * h[m, n]$ נקרא "גרעין הקונבולוציה" וניתן לקבל את המסיכה המתאימה לו ע"י הפיכה של שמאל לימין ולמעלה ללמטה, כלומר: $w[k, l] = h[-k, -l]$

מסננים ידועים

מסנן מיצוע (סינון שפות): $h[m, n] = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

מסכה I לחידוד שפות: $h_{HPF}[m, n] = \delta[m, n] - h_{LPF}[m, n] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 8 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

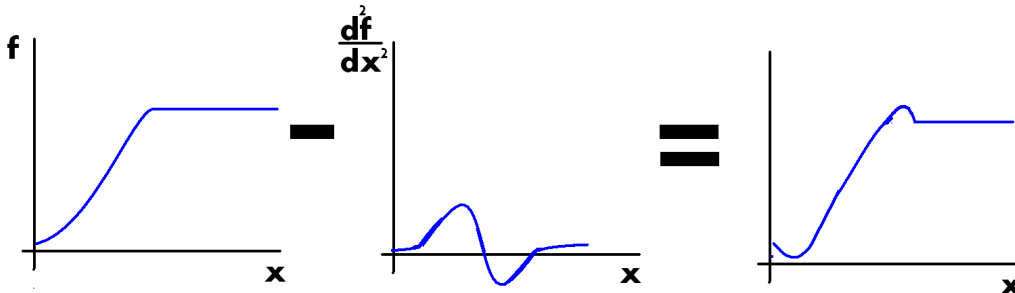
הגדרת נגזרת אחורית: $f[m, n] - f[m, n-1]$ נגזרת קדמית: $f[m, n+1] - f[m, n]$
 מקובל להגדיר נגזרת כמוצג של השתיים (במישור התדר מדובר בHPF, כי אנחנו מבליטים תדרים גבוהים):

ולכן הגדרת מסיכת מסנן נגזרת: $h[n] = \frac{1}{2} [1 \ 0 \ -1]$

באותו אופן נגדיר נגזרת שניה: $\frac{d^2 f}{dx^2} = f[m, n+1] - 2f[m, n] + f[m, n-1]$

ולכן נגדיר בדו-מימד לפלסיאן כסכום של שתי הנגזרות הכפולות, בכל מימד ונקבל את מסיכת הלפליסיאן: $h[m, n] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

אופרטור הלפליסיאן הוא מסנן לחידוד שינויים בעזרתו ניתן לחדד שפות. דוגמא גרפית:

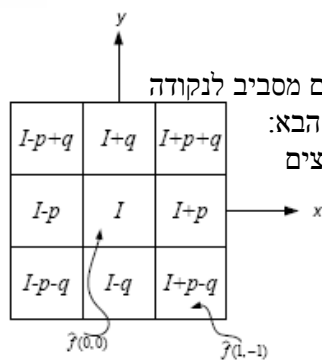
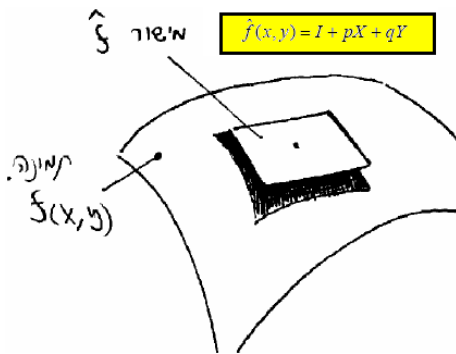


לכן נגדיר מסכה 2 לחידוד שפות – UNSHARP MASK: $f[m, n] - \alpha \nabla^2 f[m, n] \Rightarrow h_{HPF}[m, n] = \begin{bmatrix} 0 & -\alpha & 0 \\ -\alpha & 1+4\alpha & -\alpha \\ 0 & -\alpha & 0 \end{bmatrix}$

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

מסנן ROBERTS (מסנן שערך הנגזרות): מסנן לגילוי שפות

קירוב (מקומי) של תמונה ע"י מישור



נאלץ את השוויון הבא לפי תמונה מקומית של 9 פיקסלים מסביב לנקודה שבה נפתח את המישור, ניתן לפתח את המטריצה באופן הבא: נשים לב שבגלל שאנחנו מחפשים 3 נעלמים ויש 9 אילוצים אנחנו לא יכולים לפתור זאת באופן ישיר כי מטריצת המערכת לא ריבועית:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I \\ p \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f[-1,1] \\ f[-1,0] \\ f[-1,-1] \\ f[0,-1] \\ f[0,0] \\ f[0,1] \\ f[1,1] \\ f[1,0] \\ f[1,-1] \end{bmatrix} = \underline{\underline{M}} \cdot \underline{\underline{X}} = \underline{\underline{F}}$$

הפתרון: מזעור השגיאה הריבועית $\{ \|M \cdot X - F\|^2 = \varepsilon^2 \}$ arg min ע"י שימוש

במטריצת pseudo-inverse כלומר נכפיל את שני האגפים ב $\underline{\underline{M}}^T$ ונקבל:

$$\underline{\underline{X}} = (\underline{\underline{M}}^T \underline{\underline{M}})^{-1} \underline{\underline{M}}^T \underline{\underline{F}} \quad \text{והתוצאה היא: } (\underline{\underline{M}}^T \underline{\underline{M}}) \cdot \underline{\underline{X}} = \underline{\underline{M}}^T \underline{\underline{F}}$$

$$\frac{1}{6} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

את מסנן PREWIT (מסנן נגזרות)

הנחה נוספת, כפי שהניח SOBEL, היא שהפיקסלים האלכסוניים משפיעים פחות מהפיקסלים המרכזיים,

$$\frac{1}{8} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

לכן הוגדר מסנן SOBEL (מסנן נגזרות עם משקול יתר לפיקסלים צדדיים):

בהשוואה למסנן ROBERTS מסנן SOBEL אמנם דורש 6 פעולות חיבור וכפל לעומת 2 אך הוא חסין יותר לרעש – אם נניח

$$\begin{bmatrix} n_1 & n_4 & n_7 \\ n_2 & n_5 & n_8 \\ n_3 & n_6 & n_9 \end{bmatrix}$$

רעש נורמלי מפולג $N(0, \sigma^2)$: אזי אם נביט בקטע תמונת הרעש:

$$ROBERTS: \text{var} \{ P_{with\ noise} - P_{without\ noise} \} = E \left[\frac{n_8 - n_2}{2} \right]^2 = \frac{1}{4} (\sigma^2 + \sigma^2)$$

$$SOBEL: \text{var} \{ P_{with\ noise} - P_{without\ noise} \} = E \left[\frac{-n_1 - 2n_2 - n_3 + n_7 + 2n_8 + n_9}{8} \right]^2 = \frac{1}{64} (\sigma^2 + 4\sigma^2 + \sigma^2 + \sigma^2 + 4\sigma^2 + \sigma^2) = \frac{3}{16} \sigma^2$$

השגיאה הנובעת מרעש גאוסי קטנה יותר כשמתמשים במסנן SOBEL (מסנן PREWIT הכי חסין, יניב $\frac{\sigma^2}{6}$).

עוד מסנן שהודגם בהרצאות הוא מסנן שאינו קבוע במקום אלא "מסתגל", מטרתו היא שיפור ניצול התחום הדימני ע"י שינוי התוחלת ומתיחת השונות. נניח שההיסטוגרמה היא בקירוב גאוסית ונגדיר את מסנן WALLIS (Z גורם נרמול):

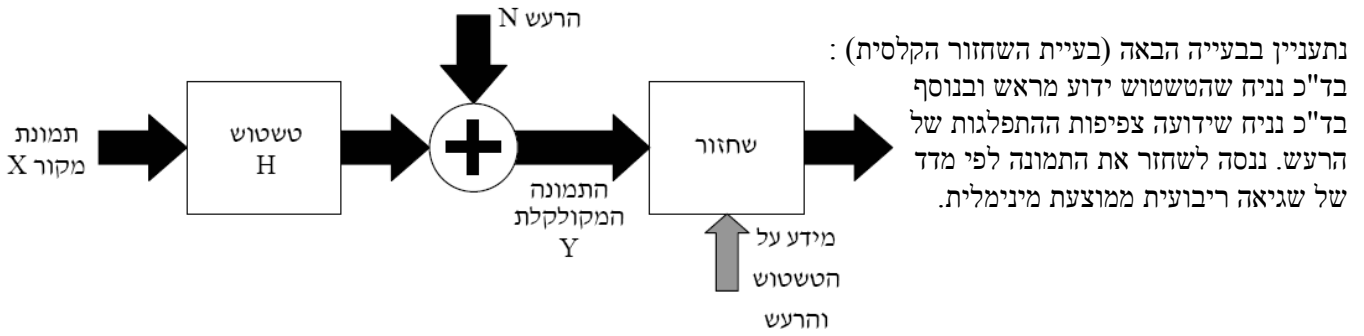
$$G_\sigma = Z^{-1} \cdot e^{-\frac{m^2+n^2}{2\sigma^2}}, \quad Z = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N e^{-\frac{m^2+n^2}{2\sigma^2}}$$

ובנוסף נצטרך לחשב שונות עבור כל השכנים של כל פיקסל, לכן נתחום את המסנן ונניח הסטוגרמות לוקליות גאוסיות.

$$S_{in}[m,n] = (f[m,n] - M_{in}[m,n])^2 * G_\sigma[m,n] \quad \text{ושונות מקומית: } M_{in}[m,n] = f[m,n] * G_\sigma[m,n]$$

ולבסוף אם נרצה להגדיר תוחלת ושונות מקומיות חדשות $(M_{out}[m,n], S_{out}[m,n])$ נשתמש בנוסחאות התקנון:

$$f_{new}[m,n] = (f[m,n] - M_{in}[m,n]) \cdot \frac{\sqrt{S_{out}[m,n]}}{\sqrt{S_{in}[m,n]}} + M_{out}[m,n]$$



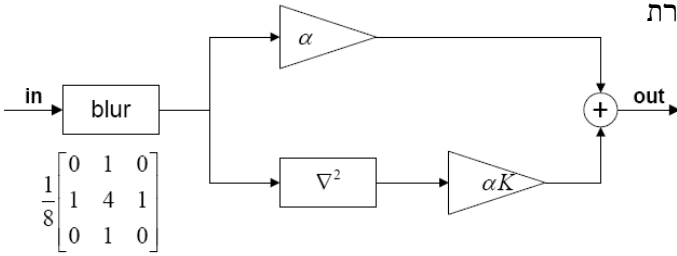
דוגמא (ללא הרעשה): תמונה המטושטשת ע"י המסנן BLUR (מודל עיוות תמונה הנובע מהמערכת האופטית)

נרצה לשחזר ע"י מערכת Unsharp Masking מהצורה המתוארת

בצירוף. עלינו למצוא: 1. α שישמר את התמונה המקורית

2. K שימזער את השגיאה הריבועית

פתרון: נפתח ביטוי עבור מטריצת המערכת (כולל הטשטוש):



$$H[m, n] = \frac{\alpha}{8} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \frac{\alpha K}{8} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} * \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}}_{\text{Laplacian}} = \frac{\alpha}{8} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \alpha K \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{8} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{8} & 0 & 1\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{8} \\ 0 & -\frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{8} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{\alpha K}{8} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\alpha K}{4} & \frac{\alpha}{8} & -\frac{\alpha K}{4} & 0 \\ \frac{\alpha K}{8} & \frac{\alpha}{8} & \frac{3\alpha K}{2} + \frac{4\alpha}{8} & \frac{\alpha}{8} & -\frac{\alpha K}{8} \\ 0 & -\frac{\alpha K}{4} & \frac{\alpha}{8} & -\frac{\alpha K}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\alpha K}{8} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

לכן מטריצת המערכת היא:

ע"מ לקבוע את α נשים לב ששני המסננים (הלפלסיאן והטשטוש) לא משנים את הממוצע (משקלם 1 סה"כ), לכן $\alpha=1$

ע"מ למצוא את K נניח כי התמרת פורייה של התמונה קבועה נציב $\alpha=1$ ונחשב את ריבועי אברי מטריצת השגיאה:

$$\varepsilon[m, n] = H[m, n] - \delta[m, n]$$

נקבל לבסוף ביטוי ריבועי ב K לשגיאה, אותו נגזור ונמצא את K האופטימלי: $K_{opt} = 0.3$

אם נחזור לבעיית השחזור הקלאסית של שחזור מטשטוש והרעשה. נגדיר מערכת שחזור de-convolution שמקבלת את התמונה המורעשת והמטושטשת: $\underline{Y} = \underline{H} \cdot \underline{X} + \underline{N}$ (נניח סידור row-stack למשל) ועליה להוציא תמונה משוחזרת "מוצלחת" $\hat{\underline{X}}$ לשם כך נגדיר צפיפויות הסתברות PDF:

- 1. Prior של X** $P_X(\underline{X})$ = ההסתברות לקבלת התמונה המקורית מתוך אוסף התמונות האפשרי = זה מבטא מידע מוקדם כלשהו שיש על התמונה (לא סביר להניח שצילמנו "פיל ורוד בחלל")
- 2. הסתברות מותנית של Y בהנתן X** $P_{Y|X}(\underline{Y}|\underline{X})$
- 3. הסתברות מותנית של X בהנתן Y** $P_{X|Y}(\underline{X}|\underline{Y})$ = **a-posteriori של X** מאוסף ההגדרות הללו ניתן להגדיר שני משערכים:

1. משערך סבירות מירבית (Maximum Likelihood): $\hat{\underline{X}}_{ML} = \arg \max_{\underline{X}} \{P_{Y|X}(\underline{Y}|\underline{X})\}$

כאשר לא ידוע לנו כלום על X, נשתמש בו בתור פרמטר ונבנה בעזרתו את פונקציית צפיפות ההסתברות המותנית

2. משערך סבירות סופית מירבית (Maximum A-Posteriori): $\hat{\underline{X}}_{MAP} = \arg \max_{\underline{X}} \{P_X(\underline{X})P_{Y|X}(\underline{Y}|\underline{X})\} = \arg \max_{\underline{X}} \{P_{X|Y}(\underline{X}|\underline{Y})\}$

Bayes+
P(Y) is deterministic
since Y is Known

במשערך זה נשתמש כשיש לנו מידע מסויים כלשהו על התמונה המקורית X, נתייחס ל X כמשתנה אקראי עם פילוג ידוע ונביא למקסימום את ההסתברות המותנית לקבלת המשתנה האקראי X.

חישוב משערך סבירות מירבית \underline{X}_{ML}

נניח והרעש הוא רעש לבן גאוס: $P_{\underline{N}}(\underline{n}) = C \cdot e^{-\left(\frac{\underline{n}^T \underline{n}}{2\sigma_N^2}\right)}$ כעת מאחר ופילוג הרעש ידוע, ניתן לגזור מתוכו את ההסתברות המותנית של Y בהינתן הפרמטר X (שוב, אנחנו לא יודעים כלום על הפילוג של התמונה אנחנו משתמשים בה בתור פרמטר מתימטי כי אנחנו יודעים את הטשטוש והרעשה). החישוב נעשה באופן הבא:

$$P_{Y|X}(\underline{Y}|\underline{X}) = P_{\underline{N}}(\underline{Y} - \underline{H} \cdot \underline{X}) = C \cdot e^{-\left(\frac{(\underline{Y} - \underline{H} \cdot \underline{X})^T (\underline{Y} - \underline{H} \cdot \underline{X})}{2\sigma_N^2}\right)}$$

לכן מאחר והאקספוננט הוא פונקציה מונוטונית אנחנו מחפשים את $\min \left\{ (\underline{Y} - \underline{H} \cdot \underline{X})^T (\underline{Y} - \underline{H} \cdot \underline{X}) \right\} = \min \left\| \underline{Y} - \underline{H} \cdot \underline{X} \right\|^2$ כלומר, X שיתן אחרי הטשטוש את הקירוב הטוב ביותר למדידה Y (במובן הנורמה הריבועית), נגזור ע"מ למצוא את המינימום:

$$\frac{\partial}{\partial \underline{x}} \left\| \underline{Y} - \underline{H} \cdot \underline{X} \right\|^2 = \frac{\partial}{\partial \underline{x}} (\underline{Y} - \underline{H} \cdot \underline{X})^T (\underline{Y} - \underline{H} \cdot \underline{X}) = -2 \underline{H}^T (\underline{Y} - \underline{H} \cdot \underline{X}) \underset{minimum}{=} 0$$

$$\Rightarrow (\underline{H}^T \underline{H}) \hat{\underline{X}}_{ML} = \underline{H}^T \cdot \underline{Y} \Rightarrow \hat{\underline{X}}_{ML} = (\underline{H}^T \underline{H})^{-1} \underline{H}^T \cdot \underline{Y}$$

נשים לב כי השתמשנו במטריצת pseudo-inverse מאחר והמסכה H המתאימה לגרעין הטשטוש אינה ריבועית במקרה הכללי.

בעיה: מה אם המטריצה $\underline{H}^T \underline{H}$ אינה הפיכה? **פתרון:** ביצוע רגולריזציה, נשתמש בביטוי הבא:

$$\hat{\underline{X}}_{ML} = (\underline{H}^T \underline{H} + \epsilon^2 \underline{I})^{-1} \underline{H}^T \cdot \underline{Y}$$

נוסיף הרעשה מינימלית (ϵ^2 קטן) כדי שנקבל בערך את אותה תוצאה ונאלץ את המטריצה להיות הפיכה

חישוב משערך סבירות סופית מירבית \underline{X}_{MAP}

המידע הנוסף על X: מתוך הנחה כי תמונות בעלות גזרות גבוהות לא סבירות, נניח כי פילוג הנגזרות בתמונה גאוסית כלומר:

כרגיל, נוכל לעבוד איתו... לכן באותו אופן שחישבנו עבור ML נפתח כאן:

$$P_{\underline{X}}(\underline{D}_{\underline{X}}) = C \cdot e^{-\left(\frac{\underline{D}_{\underline{X}}^T \underline{D}_{\underline{X}}}{2\sigma_D^2}\right)}$$

אבל

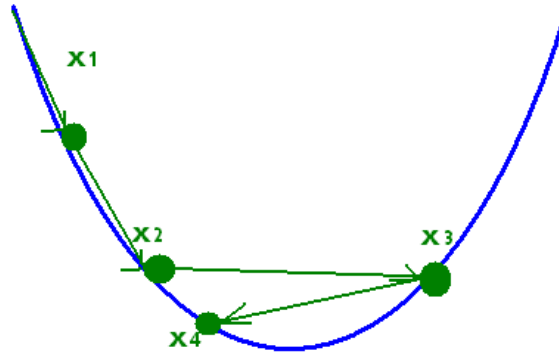
$$\hat{\underline{X}}_{MAP} = \arg \max_{\underline{X}} \left\{ C \cdot e^{-\left(\frac{(\underline{Y} - \underline{H} \cdot \underline{X})^T (\underline{Y} - \underline{H} \cdot \underline{X})}{2\sigma_N^2}\right)} \cdot e^{-\left(\frac{(\underline{D}_{\underline{X}})^T (\underline{D}_{\underline{X}})}{2\sigma_D^2}\right)} \right\} = \arg \min_{\underline{X}} \left\{ \left\| \underline{Y} - \underline{H} \cdot \underline{X} \right\|^2 + \frac{\sigma_N^2}{\sigma_D^2} \left\| \underline{D}_{\underline{X}} \right\|^2 \right\} \Rightarrow -2 \underline{H}^T \underline{H} (\underline{Y} - \underline{H} \cdot \underline{X}) + 2 \frac{\sigma_N^2}{\sigma_D^2} \underline{D}^T \underline{D}_{\underline{X}} = 0$$

ונקבל: $\hat{\underline{X}}_{MAP} = \left[\underline{H}^T \underline{H} + \frac{\sigma_N^2}{\sigma_D^2} \underline{D}^T \underline{D} \right]^{-1} \underline{H}^T \underline{Y}$ כאן אין צורך ברגולריזציה כי היא כבר נוספה באיבר הנגזרות.

בעיה בתהליכי חישוב המשערכים כפי שהוצעו: הפיכת מטריצות היא פעולה שדורשת כוח חישובי רב ויקר (לעיתים גם מעבר ליכולות המחשוב בימינו) לכן ע"מ לפתור את הבעיה ניתן לבצע את השחזור בדרך איטרטיבית ע"י

אלגוריתם Steepest Descetn

אלגוריתם (כללי! לווה דווקא עבור בעיית השחזור) איטרטיבי ההולך לכיוון הירידה החזקה ביותר של הביטוי אותו אנחנו רוצים למזער ומחשב את כיוון הירידה בכל פעם מחדש, כך שבאופן כללי אנו בונים סדרה של Xים לפי הכלל:



$$\hat{X}_{k+1} = \hat{X}_k - \mu \frac{\partial J}{\partial X}$$

כש- μ גודל הצעד ו-J הוא הביטוי למזער, במקרה של שחזור MAP:

$$J = (\underline{Y} - \underline{H}\underline{X})^T (\underline{Y} - \underline{H}\underline{X}) + \frac{\sigma_N^2}{\sigma_D^2} [\underline{D}x]^T [\underline{D}x]$$

$$\hat{X}_{k+1} = \hat{X}_k - \mu \underbrace{\left[H^T (H \hat{X}_k - \underline{Y}) + \frac{\sigma_N^2}{\sigma_D^2} D^T D x \right]}_{\frac{\partial J}{\partial Xk}}$$

מעבר ממטריצת גרעין (מסכה) למטריצת פעולה (עבור סידור ROW STACK של N שורות וM עמודות)

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a_5 & a_6 & \underbrace{0 \dots 0}_{M-2 \text{ zeros}} & a_7 & a_8 & a_9 & \underbrace{0 \dots 0}_{\text{all rest of the zeros}} \\ a_4 & a_5 & a_6 & \underbrace{0 \dots 0}_{M-3 \text{ zeros}} & a_7 & & \dots \\ 0 & a_4 & a_5 & a_6 & \underbrace{0 \dots 0}_{M-3 \text{ zeros}} & & \dots \\ N-4 \text{ zeros} & & \vdots & & \vdots & & \\ a_3 & \underbrace{0 \dots 0}_{M-3 \text{ zeros}} & a_4 & & & & \\ \vdots & & \vdots & & & & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ \dots \\ \dots \\ x[NM-1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y[0] \\ y[1] \\ \dots \\ \dots \\ y[NM-1] \end{bmatrix}$$

$NM \times NM$ $NM \text{ row stack}$ $NM \text{ row stack}$

הסבר: הכי פשוט לזכור a_5 מכפיל את הפיקסל הנוכחי, a_6 פיקסל אחד מימין וכך הלאה – מאחר והסידור הוא ROW STACK a_7 מכפיל פיקסל משמאל-למטה ובגלל שכל שורה באורה M עלינו לרפד במספר אפסים מתאים כדי לא להכפין את הפיקסלים של שאר השורה.

חוקי נגזרות של מטריצות ו-וקטורים

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{a}^T \mathbf{x} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{x}^T \mathbf{a} = \mathbf{a}$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = (\mathbf{A}^T + \mathbf{A}) \mathbf{x}$$

$$\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \mathbf{y}}$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{A}^T \mathbf{x} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{x}^T \mathbf{A} = \mathbf{A}$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} (\mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{b})^T (\mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{b}) = 2\mathbf{A}^T (\mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{b})$$

Note that generally $\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \mathbf{x}} \neq \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \mathbf{y}} \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}}$

x, y, a, b are scalars

$\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{a}, \mathbf{b}$ are vectors

$\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{A}, \mathbf{B}$ are matrices

$\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}}$ is a vector whose i -th element is $\frac{\partial y_i}{\partial \mathbf{x}}$

$\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}_i}$ is a vector whose i -th element is $\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial x_i}$

$\frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial \mathbf{x}}$ is a matrix whose (i, j) -th element is $\frac{\partial y_{i,j}}{\partial \mathbf{x}}$

$\frac{\partial \mathbf{y}^T}{\partial \mathbf{x}}$ is a matrix whose (i, j) -th element is $\frac{\partial y_j}{\partial x_i}$

$\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{X}}$ is a matrix whose (i, j) -th element is $\frac{\partial y}{\partial x_{i,j}}$

דוגמא למשערכים ושחזור בתחום התדר: