עידו שמיר
חורף 2009

תורת הקבוצות

מושגי יסוד בתורת הקבוצות

קבוצה – אוסף של אלמנטים הנקראים אברי הקבוצה.

- אין חשיבות לסדר האיברים בקבוצה.
- אין חשיבות לחזרות.

$$A = \{1,4,7,17,20\}$$

$$B = \left\{\frac{1}{2}, a, b, c\right\}$$

נאמר ש x שייך ל A ונסמן

$$x \in A$$

אם x הוא איבר בקבוצה A.

אם b לא איבר ב A אז נאמר ש b לא שייך ל A ונסמן:

$$x \notin A$$

הקבוצה הריקה

הקבוצה הריקה היא קבוצה ללא איברים (או קבוצה עם 0 איברים).

סימון:

$$\{\}, \emptyset$$

לא קבוצה ריקה:

$$\{\emptyset\}$$

שיוויון בין קבוצות

נאמר שקבוצות A, B שוות ונסמן $A = B$ אם ל A ול B אותם איברים.

$A = B$ אם לכל איבר x מתקיים:

$$x \in A \Leftrightarrow x \in B$$

גודל של קבוצה

(לא פורמאלי)

נאמר שקבוצה A היא סופית אם מספר האיברים בה הוא n עבור מספר טבעי n כלשהו.

עבור קבוצה A סופית נסמן ב $|A|$ את הגודל של A – מספר האיברים ב A.

תתי קבוצות

נאמר שקבוצה A היא תת קבוצה של קבוצה B אם כל איבר ב A הוא איבר ב B.

מתמטית:

$$\forall x \in A \Rightarrow x \in B$$

במילים: A תת קבוצה של B. A חלקית של B. A מוכלת ב B. B מכילה את A.

סימון:

$$A \subseteq B$$

ההבדל בין שייכות להכלה

$$x \in A \Leftrightarrow \{x\} \subseteq A$$

דוגמאות:

$$B = \{1, \{1\}, \{1,2\}\}$$

1 שייך ל B.

$\{1\}$ שייך ל B (הקבוצה נמצאת) ומוכלת ב B (האיבר 1 נמצא!)

$\{1,2\}$ שייך ל B ולא מוכל ב B.

תכונות של הכלה

1. לכל קבוצה A הקבוצה הריקה מוכלת ב A.

בקבוצה הריקה אין איברים ולכן אנחנו יכולים לטעון שכל איברי הקבוצה הריקה מקיימים כל טענה ובפרט מקיימים את הדרישה שהם שייכים ל A.

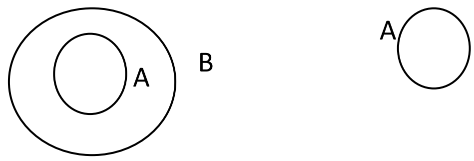
2. לכל קבוצה A: A מוכלת ב A (רפלקסיביות של ההכלה).
3. טרנזיטיביות של ההכלה:
אם A מוכלת ב B וגם B מוכלת ב C אז A מוכלת ב C.
4. $A = B$ אמ"מ A מוכלת ב B וגם B מוכלת ב A.

<u>הוכחת טענה 3</u>

דיאגרמת ון:

מתארים קבוצות בתור תחום סגור במישור.

A מוכלת ב B



<u>הנ"ל לא הוכחה!</u>

<u>הוכחה:</u>

צריך להראות: לכל איבר x אם x שייך ל A אז x שייך ל C.

יהיה x איבר ב A. מהנתון A מוכל ב B יודעים כי לכל איבר השייך ל A מתקיים שהוא גם שייך ל B ולכן x שייך ל B.

כעת x שייך ל B ומהנתון כי B מוכל ב C לכל איבר השייך ל B מתקיים שהוא שייך גם ל C ולכן x שיך ל C.

<u>הכלה ממש</u>

נאמר ש A מוכלת ממש ב B ונסמן:

$$A \subset B$$

אם A מוכל ב B וגם A שונה מ B.

<u>פעולות על קבוצות</u>

איחוד בין קבוצות:

בהינתן שתת קבוצות A ו B האיחוד של A וB מסומן על ידי:

$$A \cup B$$

והוא הקבוצה המוגדרת על ידי:

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ or } x \in B\}$$

המשמעות של **או**.

<u>תכונות האיחוד</u>

1. אם A מוכל ב B אז האיחוד שלהם הוא B.
2. קומוטטיביות: A איחוד $B = B$ איחוד A.
3. אסוציאטיביות: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
4. A איחוד $A = A$.
5. A איחוד (קבוצה ריקה) $= A$.
6. A מוכל ב (A איחוד B).

<u>פעולות על קבוצות</u>

חיתוך:

החיתוך של A ו B מסומן ע"י

$$A \cap B$$

והוא הקבוצה המוגדרת ע"י:

$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ and } x \in B\}$$

נאמר ש A ו B זרות אם החיתוך שלהם הוא הקבוצה הריקה.

<u>תכונות חיתוך</u>

1. אם A מוכלת ב B אז החיתוך הוא A.
2. קומוטטיביות: A חיתוך B = B חיתוך A.
3. אסוציאטיביות: (A חיתוך B) חיתוך C = A חיתוך (B חיתוך C).
4. A חיתוך A = A.
5. A חיתוך קבוצה ריקה = קבוצה ריקה.
6. A חיתוך B מוכל בתוך A.

<u>הפרש קבוצות</u>

ההפרש בין A ו B מסומן $A - B, A\backslash B$. והיא הקבוצה המוגדרת ע"י:

$$A\backslash B = \{x|x \in A \text{ and } x \notin B\}$$

מורידים מ A את כל האיברים ששייכים ל B.

מתקיים:

$$A - B = A \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$$

וגם:

$$A - B = \emptyset \Leftrightarrow A \subseteq B$$

<u>הפרש סימטרי</u>

ההפרש הסימטרי בין A ל B מסומן:

$$A \oplus B$$

ומוגדר על לידי:

$$A \oplus B = (A\backslash B) \cup (B\backslash A)$$

תכונות ההפרש הסימטרי:

1. ההפרש הסימטרי הוא האיחוד פחות החיתוך.
2. קומוטטיביות.
3. אסוציאטיביות.
4. A הפרש A הוא קבוצה ריקה.
5. A הפרש קבוצה ריקה הוא A.

<u>חוקי דה-מורגן</u>

1. אם A מוכלת ב B אז $B - (B - A) = A$
2. אם A מוכלת ב B ו B מוכלת ב C אז $C\backslash B$ מוכלת ב $C\backslash A$.
3. $$C(A \cup B) = (C\backslash A) \cap (C\backslash B)$$
   משלים:
   $$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$
4. $$C(A \cap B) = (C\backslash A) \cup (C\backslash B)$$

הוכחת 1:

מהו הקבוצה $B - (B - A)$

איבר x שייך ל $B - (B - A)$ אם ורק אם x שייך ל B וגם x לא שייך ל $B - A$.

וזה קורה אם ורק אם x שייך ל B וגם x שייך ל B ולא שייך A.

וזה קורה אם ורק אם x שייך ל B וגם (x לא שייך ל B או x שייך ל A).

וזה קורה אם ורק אם x שייך גם ל B וגם ל A ולכן x שייך לחיתוך.

$$B - (B - A) = A \cap B$$

רוצים להראות שאם A מוכל ב B אז $B - (B - A) = A$.

לפי תכונות החיתוך מתקיים שאם A מוכלת ב B אז:

$$A \cap B = A$$

ומכאן מש"ל.

<u>קבוצת החזקה</u>

בהינתן קבוצה A, **קבוצת החזקה** של A מסומנת $P(A)$ והיא קבוצת כל תתי הקבוצות של A.

$$P(A) = \{S|S \subseteq A\}$$

באופן כללי ניתן להראות עבור קבוצה סופית A שמספר האיברים ב $P(A)$ הוא:

$$2^{|A|}$$

ולכן מסמנים את $P(A)$ בתור

$$2^A$$

טענה:
לכל A, B

$$P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$$

נראה כי עבור קבוצה S

$$S \in P(A \cap B) \Leftrightarrow S \in P(A) \cap P(B)$$

ומכאן:

$$S \in P(A \cap B)$$

לפי הגדרה S מוכלת ב A חיתוך B.
לכל x מתקיים x שייך ל S אז x שייך לחיתוך A עם B.
לכל איבר x השייך ל S אז x שיך גם ל A וגם ל B.
מכאן S מוכל ב A וגם S מוכל ב B.
ולכן S שייכת ל $P(A)$ וגם ל $P(B)$.
מש"ל.

שאלה: האם מתקיים:

$$P(A \cup B) = P(A) \cup P(B)$$

לא.
נראה שהטענה לא נכונה.

$$P(A) = \{\emptyset, \{1\}\}$$
$$P(B) = \{\emptyset, \{2\}\}$$
$$P(A \cup B) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$$
$$P(A) \cup P(B) \neq P(A \cup B)$$

ניתן להראות שהטענה לא נכונה משיקולי סדרי גודל.
יהיו A ו B קבוצות זרות בגודל 2.
הגודל של A איחוד B הוא 4. ולכן הגודל של קבוצת החזקה הוא 16.
הגודל של קבוצת החזקה של A הוא 4 וגם של B. לכן האיחוד שלהם הוא 8 לכל היותר. מש"ל.

<u>בניה פורמאלית של תורת הקבוצות:</u>
(אבן הלגו הבסיסית)

1. הנחה – קיימת קבוצה ריקה.
   אבחנה – הקבוצה הריקה יחידה.
2. הנחה (קבוצות של שני אלמנטים) – בהינתן קבוצות A, B קיימת קבוצה C ש A ו B הם איבריה היחידים.

   $$C = \{A, B\}$$

   C נקראת זוג לא סדור של A ושל B.
   מה מקבלים עכשיו?

   $$\{\phi, \phi\} = \{\phi\}$$
   $$\{\{\phi\}, \{\phi\}\} = \{\{\phi\}\}$$
   $$\{\phi, \{\phi\}\} \dots$$

   לא ניתן עדיין לקבל את $\{\phi, \{\phi\}, \{\{\phi\}\}\}$

3. הנחה (איחודים) בהינתן קבוצות A ו B קיימת קבוצה C שאבריה הם כל אברי A וכל אברי B.

$$C = A \cup B$$

עכשיו ניתן לקבל את $\left\{\phi, \{\phi\}, \{\{\phi\}\}\right\}$

באופן כללי בהינתן $A_1, A_2, \dots, A_n$ קבוצות, קיימת הקבוצה (אפשר לבנות):

$$\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$$

4. עקרון החלוקה (ההפרדה) – הרעיון – בהינתן קבוצה A כל תת קבוצה B של A קיימת.
תכונה Q של אברי קבוצה A – תכונה שהאברים יכולים לקיים או לא.
תכונה של הטבעיים – זוגיות.
הנחה – בהינתן קבוצה A ותכונה A של אברי A, קיימת קבוצה B המכילה את כל אברי A המקיימים Q ורק אותם.
טבעיים -> זוגיים.
טבעיים -> מתחלקים ב 3.
טבעיים -> $\{17\}$.
עבור התכונה $x \in C$ נקבל $B = A \cap C$.
עבור התכונה $x \notin C$ נקבל $B = A \setminus C$.

5. הנחה – בהינתן קבוצה A, קיימת הקבוצה $P(A)$ כך ש

$$P(A) = \{S | S \subseteq A\}$$

טבעיים -> כל תתי הקבוצות בגודל 2 של הטבעיים.
דוגמא לשאלה:
בהינתן קבוצה A הראו כי קיימת הקבוצה

$$B = \{S | S \subseteq A, \text{and S has more than 3 elements}\}$$

נגדיר תכונה – בקבוצה יותר מ3 אברים. ע"י כלל החלוקה נגזור מ $P(A)$ את B.
האם קיימת קבוצה אוניברסאלית?
U קבוצה אוניברסאלית אם לכל קבוצה A מתקיים $A \in U$?
טענה: לא קיימת קבוצה אוניברסאלית.
<u>הפרדוקס של ראסל</u>
נניח בשלילה שקיימת קבוצה אוניברסאלית U.
נגזור מ U

$$u_0 = \{x | x \notin x\}$$

(תכונה עבור x: $x \notin x$).
נשאל האם $u_0 \in u_0$?

- אם $u_0 \in u_0$ -> לפי ההגדרה (התכונה) $u_0 \notin u_0$. סתירה.
- אם $u_0 \notin u_0$ -> לפי ההגדרה $u_0 \in u_0$. סתירה.

לכן הנחת השלילה לא נכונה.
הגדרה – יחידון (סינגלטון) היא קבוצה עם אבר אחד.
נשאל: האם קיימת קבוצה אוניברסאלית של סינגלטונים. האם קיימת קבוצה V כך שלכל קבוצה A מתקיים $\{A\} \in V$?
נניח בשלילה שקיימת V קבוצה אוניברסאלית של סינגלטונים.
נגדיר תכונה $\{x\} \notin x$.
נגזור מ V את הקבוצה

$$V_0 = \left\{\{x\} \middle| \{x\} \notin x\right\}$$

השאלה שנשאל – האם $\{V_0\} \in V_0$? ...

זוג סדור

הגדרה:
זוג סדור הוא זוג אברים שאחד ראשון והאחר שני. נסמן:

$$(a, b) \text{ or } \langle a, b\rangle$$

ההבדל בין (a, b) ל $\{a, b\}$:

- בקבוצה אין חשיבות לסדר ואין חזרות.
- $\{a,b\}=\{b,a\}, (a,b)\neq(b,a)\ \forall a\neq b$
- (a,a) זוג בעוד ש $\{a,a\}$ קבוצה עם אבר אחד.

הדרישות:

I) $A\neq B\rightarrow\langle A,B\rangle\neq\langle B,A\rangle$

II) $\langle A,B\rangle=\langle A',B'\rangle\Leftrightarrow A=A' \text{ and } B=B'$

הצעה ראשונה לייצוג לזוג סדור:

$$\langle A,B\rangle=\left\{A,\{B\}\right\}$$

דוגמא:

$$A=\{1\},B=\{2\}\Longrightarrow$$
$$\langle A,B\rangle=\left\{\{1\},\{\{2\}\}\right\}=\left\{\{\{2\}\},\{1\}\right\}$$
$$A'=\{\{2\}\},B'=1$$

הצעה שנייה:

$$\langle A,B\rangle=\left\{\{A\},\{A,B\}\right\}$$

נראה שבהינתן A ו B קיימת הקבוצה המייצגת את הזוג הסדור $\langle A,B\rangle$.

$$A\Longrightarrow\ \{A\}$$
$$A,B\Longrightarrow\{A,B\}$$
$$\{A\}\text{ and }\{A,B\}\Longrightarrow\ \langle A,B\rangle$$

נראה שהייצוג $\left\{\{A\},\{A,B\}\right\}$ עונה על הדרישות. צ"ל:

$$\left\{\{A\},\{A,B\}\right\}=\left\{\{A'\},\{A',B'\}\right\}\Leftrightarrow A=A'\text{ and }B=B'$$

ימין לשמאל כיוון מידיי. נוכיח כיוון הפוך:

נבחין בין שני מקרים:

מקרה ראשון:

$$\{A\}=\{A'\}\Longrightarrow A=A'$$

נסיק – $\{A,B\}=\{A',B'\}$ ומכאן:

$$B=B'$$

מקרה שני:

$$\{A\}=\{A',B'\}\Longrightarrow\ A'=B'=A$$

כי בקבוצה $\{A',B'\}$ יש איבר אחד.

בצד ימין:

$$\left\{\{A\},\{A',B'\}\right\}=\left\{\{A'\}\right\}$$

ולכן גם בצד שמאל יש גם אבר אחד ולכן

$$\{A,B\}=\{A\}\Longrightarrow A=B$$

ובסה"כ קיבלנו:

$$A=B=A'=B'$$

מש"ל

<u>תכונות של הייצוג שבחרנו לזוג סדור:</u>

1. ב $\langle A,B\rangle$ יש לכל היותר שני איברים.
2. אם $A=B$ אז ב $\langle A,B\rangle$ יש איבר אחד.
3. $A,B\notin\langle A,B\rangle$ כיוון ש $\langle A,B\rangle=\left\{\{A\},\{A,B\}\right\}$.

<u>שלשה סדורה:</u>

$$\langle A,B,C\rangle=\langle\langle A,B\rangle C\rangle$$

כיוון ש:

$$\langle A,B,C\rangle=\langle\left\{\{A\},\{A,B\}\right\},C\rangle=\left\{\left\{\left\{\{A\},\{A,B\}\right\}\right\},\left\{\left\{\{A\},\{A,B\}\right\},C\right\}\right\}$$

יש לכל היותר שני אברים.

<u>n-יה סדורה:</u>

$$\langle A_1,\dots,A_n\rangle=\langle\langle A_1,\dots,A_{n-1}\rangle,A_n\rangle$$

<u>מכפלה קרטזית</u>

הגדרה: בהינתן קבוצות A ו B המכפלה הקרטזית של A ו B מסומנת ב $A \times B$ ומוגדרת על ידי:

$$A \times B = \{< a, b > | a \in B \ and \ b \in B\}$$

$A \times B$ אוסף כל הזוגות הסדורים שהאיבר הראשון בהם מ A והאיבר השני מ B.

$A = \{1,2\}$
$B = \{x, y\}$
$A \times B = \{(1, x), (1, y), (2, x), (2, y), (3, x), (3, y)\}$
$B \times A = \{(x, 1), (x, 2), (x, 3), (y, 1), (y, 2), (y, 3)\}$

לא קומו' (לא בהכרח קומו', אם אחת ריקה או $A = B$ אז כן).

- אם A ו B סופיות אז $|A \times B| = |A| \cdot |B|$
- אין אסוציאטיביות $(A \times B) \times C \neq A \times (B \times C)$
- מכפלה של קבוצה עם עצמה

$A = \{0,1\}$
$A \times A = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$
$A \times A = A^2$
$A^0 = \{\phi\}$
$A^1 = A$
$A^n = (\ldots (A \times A) \times A) \ldots \times A)$

האם נתן לקבל $A \times B$ בהינתן A ו B בכללים שיש לנו?

טענה: בהינתן A ו B קיימת הקבוצה $A \times B$.
ראינו שעבור a, b קיים הזוג $\langle a, b \rangle$.

$$\langle a, b \rangle = \{\{a\}, \{a, b\}\}$$

מחפשים איך לבנות את קבוצת כל הקבוצות מהצורה $\{\{a\}, \{a, b\}\}$ עבור $a \in A \text{ and } b \in B$.

$\{a\} \in P(A)$
$x = \{a\} \subseteq A \cup B$
$\{A\} \in P(A \cup B)$
$y = \{a, b\} \subseteq A \cup B$
$\{a, b\} \in P(A \cup B)$

מחפשים זוגות

$\{x, y\}$
$x, y \in P(A \cup B)$
$\{x, y\} \subseteq P(A \cup B)$
$\{x, y\} \in P\big(P(A \cup B)\big)$

מחפשים בעצם תת קבוצה של $P\big(P(A \cup B)\big)$ שמכילה את כל הקבוצות שהם זוגות סדורים.
הוכחה:
מ A ו B נקבל $A \cup B$.
ע"י כלל החזקה $P(A \cup B)$ ושוב $P\big(P(A \cup B)\big)$.
נגזור מ $P\big(P(A \cup B)\big)$ את כל האברים שהם זוגות סדורים בהם האבר הראשון מ A והשני מ B.

<u>תכונות של מכפלה קרטזית:</u>

I) $A \times \phi = \phi \times A = \phi$
II) $A \times B = \phi \Leftrightarrow B = \phi \text{ or } A = \phi \text{ or both}$
III) $A \subseteq B \Longrightarrow \forall C \ A \times C \subseteq B \times C$
IV) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$
V) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$
VI) $(A \backslash B) \times C = (A \times C) \backslash (B \times C)$

הוכחת סעיף IV:

צ"ל:

$$(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$$

נראה צד ראשון:

$$(A \cup B) \times C \subseteq (A \times C) \cup (B \times C)$$

יהי $(x, y) \in (A \cup B) \times C$

מההגדרה

$x \in A \cup B$
$y \in C$

יש שתי אפשרויות:

$(1) x \in A$
or
$(2) x \in B$

(1) אם $x \in A$ אז $(x, y) \in A \times C$
מהגדרת האיחוד

(2) אם $x \in B$ באופן דומה.
ראינו שאם $(x, y) \in (A \cup B) \times C$ אז

כיוון שני לבד בבית...

רלציות

רלציה בינארית (רלציה דו מקומית, יחס דו מקומי) בין A ל B היא תת קבוצה כלשהי ש $A \times B$

מה מס' הרלציות הבינאריות בין A ל B (עבור A ו B סופיות)?
שקול לשאול כמה תתי קבוצות שונות יש ל $A \times B$?

$$2^{|A \times B|} = 2^{|A| \cdot |B|}$$

הגדרות:

1. תחום וטווח של רלציה:

$R \subseteq A \times B$
$\mathrm{Domain}(R) = \{x \in A | \exists y \in B : (x, y) \in R\}$
$\mathrm{Range}(R) = \{y \in B | \exists x \in A : (x, y) \in R\}$

2. רלציה הופכית:

$R \subseteq A \times B$
זוהי רלציה מ B ל A: $R^{-1} \subseteq B \times A$

הגרף של R^{-1} מתקבל מהגרף של R על ידי היפוך החצים.
M מייצגת את R, M^T מייצגת את R^{-1}

3. רלציה משלימה:

$R^C = A \times B - R$
במטריצה הופכים 0-ים ל1-ים ו1-ים לאפסים.

4. הרכבת רלציות:

$R \subseteq A \times B \quad , \quad S \subseteq B \times C$

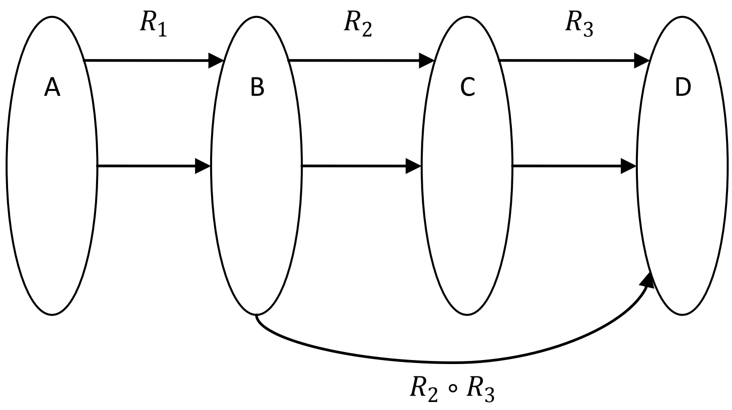
נגדיר:

$$R \circ S = \{(x, z) | \exists y \in B : z \in C, x \in A, (x, y) \in R, (y, z) \in S\}$$

$R \circ S$ מכילה את כל זוגות האברים שבהם הראשון מ A, השני מ C וקיים מסלול באורך 2 ביניהם.

<u>תכונות:</u>

I)



$$(R_1 \circ R_2) \circ R_3 = R_1 \circ (R_2 \circ R_3)$$

II)

$$(R_1 \circ R_2)^{-1} = R_2^{-1} \circ R_1^{-1}$$
$$(M \cdot N)^T = N^T \cdot M^T$$

III)

האם בהכרח $R \circ S = S \circ R$
לא, לא בהכרח $S \circ R$ מוגדרת!

<u>רלציות מעל קבוצה A</u>

רלציה מעל A: $R \subseteq A \times A$

לדוגמה: רלצית הזהות (פונקצית הזהות):

$$IA = \{(x,x) | x \in A\}$$

חזקות של R מעל A

$$R^2 = R \circ R$$
$$R^n = R \circ R \circ \dots \circ R$$

בגלל האסוציאטיביות.

$$R^{m+n} = R^m \circ R^n$$

<u>רלציות בעלות תכונות מיוחדות</u>

I) רפלקסיביות:

1. רלציה רפלקסיבית.
נאמר ש R רלציה מעל A רפלקסיבית אם לכל $x \in A$ מתקיים:
$$(x,x) \in R$$
בגרף – לכל צומת לולאה עצמית.
במטריצה – אלכסון 1 ו 0.
2. רלציה לא רפלקסיבית.
אם קיים $x \in A$ כך ש $(x,x) \notin R$.
3. אי רפלקסיבית.
רלציה R מעל A היא אי רפלקסיבית אם לכל $x \in A$ מתקיים $(x,x) \notin R$.

II) סימטריות:

1. סימטריות – נאמר ש R רלציה סימטרית אם לכל $x, y \in A$ אם $(x,y) \in R$ אז:
$$(y,x) \in R$$
בגרף – קשתות אנטי מקבילות.

מטריצה – $M = M^T$

2. לא סימטרית – R רלציה לא סימטרית אם קיים $x,y \in A$ כך ש:
$(x,y) \in R \text{ and } (y,x) \notin R$

3. אסימטרית – נאמר שרלציה R היא אסימטרית אם לכל $x,y \in A$:
אם $(x,y) \in R$ אז $(y,x) \notin R$.
בגרף – אין קשתות אנטי מקבילות ואין לולאות עצמיות.

4. אנטי סימטריות:
נאמר שרלציה R היא אנטי סימטרית אם לכל $x,y \in A$:
אם $(x,y) \in R$ וגם $(y,x) \in R$ אז $x = y$
מותרות בגרף לולאות עצמיות.
דוגמאות:
$\leq$ - רפלקסיבי, לא סימטרי, אנטי סימטרי.
$<$ - אסימטרי, לא רפלקסיבי, אי רפלקסיבי.
$\subseteq$ - רפלקסיבי, אנטי סימטרי.
$=$ - רפלקסיבי, סימטרי.

(III) טרנזיטיביות:
נאמר ש R רלציה טרנזיטיבית אם לכל $x,y,z \in A$:
אם $(x,y) \in R$ וגם $(y,z) \in R$ אז $(x,y) \in R$.

<u>יחסי שקילות</u> (כמו שוויון)

הגדרה: רלציה E מעל A נקראת יחס שקילות אם E רפלקסיבית, סימטרית וטרזטיבית.

הגדרה: יהי E יחס שקילות מעל A ויהא $x \in A$.
מחלקת השקילות של x מעל E מוגדרת על ידי:
$$[x] = \{y|(x,y) \in E\}$$
בדוגמה של mod3:
$$[0] = \{\dots,-3,0,3,\dots\} = \{3k|k \in \mathbb{Z}\}$$
$$[0] \cap [1] = \phi$$
$$[1] \cap [2] = \phi$$
$$[0] \cap [2] = \phi$$
זרות הדדית.
$$[0] = [-3] = [3]$$
$$[0] \cup [1] \cup [2] = \mathbb{Z}$$
נראה שהתכונות לא מקריות:

הגדרה:
חלוקה של קבוצה A היא קבוצת תתי קבוצות לא ריקות של A, זרות זו לזו, שאיחודן הוא A.
$$A = \{1,\dots,5\}$$
$$\Pi_1 = \{\{1,3,5\},\{2,4\}\}$$
$$\Pi_2 = \{\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{5\}\}$$
$$\Pi_3 = \{\{1,2,3,4,5\}\}$$
$\{[0],[1],[2]\}$ מהווה חלוקה של $\mathbb{Z}$.

הגדרה:
בהינתן יחס שקילות E מעל A, קבוצת המנה של E
$$A/E = \{[x]|x \in A\}$$
אוסף מחלקות השקילות של היחס E.
$$\mathbb{Z}/E_3 = \{[0],[1],[2]\}$$

משפט:
תהי E רלצית שקילות מעל A קבוצת המנה A/E מהווה חלוקה של A.
בגרף – אוסף של גרפים מלאים זרים אחד לשני.

אפשר לייצג על ידי מטריצת בלוקים.

למה 1: יהי E יחס שקילות מעל A. לכל $x \in A$ מתקיים $[x] \neq \phi$
הוכחה:
E רלציה רפלקסיבית, ולכן הזוג $(x,x) \in E$.
לפי ההגדרה $x \in [x]$ ולכן $[x] \neq \phi$.

למה 2: תהי E רלצית שקילות מעל A. אזי לכל $x, y \in A$ מתקיים:
$$(x,y) \in E \Leftrightarrow [x] = [y]$$
הוכחה:
כיוון אחד:
$$[x] = [y]$$
$$\Downarrow$$
ראינו לפי רפלקסיביות $y \in [y]$.
מאחר ו $[x] = [y]$ מתקיים $y \in [x]$ ולפי הגדרה $(x,y) \in E$
כיוון שני:
נתון כי $(x,y) \in E$
צ"ל $[x] = [y]$
נראה כי $a \in [x] \Leftrightarrow a \in [y]$

סימטריות.

ע"י טרנזיטיביות:
$$(y,a) \in E$$
$$\Updownarrow$$
$$a \in [y]$$
הופכים לאם ורק אם (עובד).

למה 3: יהי E יחס שקילות מעל A, אזי לכל $x, y \in A$ מתקיים:
$$[x] \neq [y] \Leftrightarrow [x] \cap [y] = \phi$$
כיוון אחד:
אם $[x] \cap [y] = \phi$ מאחר ולפי למה 1: $[x] \neq \phi, [y] \neq \phi$ אזי $[x] \neq [y]$
כיוון שני:
צ"ל אם $[x] \neq [y]$ אזי $[x] \cap [y] = \phi$
נניח בשלילה שקיים $a \in [x] \cap [y]$ ונראה ש $[x] = [y]$
$a \in [x] \cap [y]$ גורר ש $a \in [x]$ וגם $a \in [y]$.
$a \in [x]$ גורר ש $(x,a) \in E$
$a \in [y]$ גורר ש $(y,a) \in E$
לפי הסימטריות $(a,y) \in E$.
לפי הטרנזיטיביות יש לנו $\big((x,a),(a,y)\big)$ ולכן $(x,y) \in E$ לפי למה 2 $[x] = [y]$.
מסקנה:
1. $(x,y) \in E$ אז $[x] = [y]$
2. $(x,y) \notin E$ אז $[x] \cap [y] = \phi$

למה 4: יהי E יחס שקילות מעל A אזי
$$\bigcup_{x \in A} [x] = A$$

הוכחה:

$\cup_{x\in A}[x] \subseteq A$:

לכל $x \in A$ מתקיים ש $[x]$ היא אוסף אברי A שנמצאים ביחס עם x.

$[x] \subseteq A$

לכן גם האיחוד של כל מחלקות השקילות מוכל ב A: $\cup_{x\in A}[x] \subseteq A$.

$A \subseteq \cup_{x\in A}[x]$:

יהי $y \in A$ נראה כי $y \in \cup_{x\in A}[x]$.

E רפלקסיבית ולכן $y \in [y]$ ולכן $y \in \cup_{x\in A}[x]$.

<u>הוכחת המשפט</u>

צ"ל – קבוצת המנה מהווה חלוקה של A. קבוצת המנה קבוצת תתי קבוצות של A, לא ריקות, זרות הדדית, שאיחודן הוא כל A.

כל מחלקת שקילות היא תת קבוצה של A, לא ריקה לפי למה 1.

לפי למה 3 מחלקות השקילות זרות הדדית.

לפי למה 4 איחודן הוא כל A.

מש"ל!

<u>פונקציות</u>

הגדרה:

פונקציה מ A ל B היא רלציה R מ A ל B שבה לכל $x \in A$ קיים $y \in B$ יחיד כך ש $(x,y) \in R$.

פונקציה f:

$$f \subseteq A \times B \Longrightarrow f{:}\, A \longrightarrow B$$

$$(x,y) \in f \Longrightarrow f(x) = y$$

בתיאור פונקציה ע"י גרף דו צדדי מכל צומת יוצאת קשת אחת בדיוק.

ניתן להגדיר פונקציות k מקומיות:

$$f{:}\, A^k \longrightarrow B$$

<u>סגירות תחת פונקציות:</u>

תהי A קבוצה $f{:}\, A \longrightarrow A$ ותהי $A_0 \subseteq A$.

נאמר ש A_0 סגורה תחת f אם לכל $x \in A_0$ מתקיים $f(x) \in A_0$

ניתן להרחיב את ההגדרה למשפחה של פונקציות

$$F = \{f_0, f_1, \dots\}$$

כאשר f_i פונקציה k_i מקומית מעל A:

$$f_i{:}\, A^{k_i} \longrightarrow A$$

נאמר ש $A_0 \subseteq A$ סגורה תחת משפחה של פונקציות F אם לכל i מתקיים ש A_0 סגורה תחת f_i.

כלומר, לכל i מתקיים:

לכל $a_1, \dots, a_{k_i} \in A_0$ מתקיים $f_i\left(a_1, \dots, a_{k_i}\right) \in A_0$.

אם הפונקציות ב F מוגדרות מעל A, אזי בהכרח A סגורה תחת F.

טענה: תהי פונקציה $f{:}\, A \longrightarrow A$ ותהינה $A_1, A_2 \subseteq A$ סגורות תחת f.

אזי $A_1 \cap A_2$ סגורה תחת f.

הוכחה:

צ"ל אם $x \in A_1 \cap A_2$ אז $f(x) \in A_1 \cap A_2$.

$$x \in A_1 \cap A_2$$
$$\Downarrow$$
$$x \in A_1 \text{ and } x \in A_2$$

$A1$ סגורה תחת f, אזי $f(x) \in A_1$

$A2$ סגורה תחת f, אזי $f(x) \in A_2$

ולכן $f(x) \in A_1 \cap A_2$.

טענה:
תהי F משפחת פונקציות מעל A ותהיינה $A_1, A_2 \subseteq A$ סגורות תחת F, אז:
$A_1 \cap A_2$ סגורה תחת F.

טענה:
תהי F משפחת פונקציות מעל A. ותהי B קבוצת תתי-קבוצות של A שסגורות תחת F.
אזי $\bigcap B$ סגורה תחת F.

<u>הגדרת קבוצות באינדוקציה</u>
שיטת ההגדרה נקראת **הגדרה באינדוקציה** – בהינתן קבוצת גרעין B (או קבוצת אטומים) וקבוצת פעולות יצירה F. מגדירים באינדוקציה את הקבוצה $X_{B,F}$.
$X_{B,F}$ היא הקבוצה המקיימת:
1. $B \subseteq X_{B,F}$.
2. אם y מתקבל מ $a_1, \ldots, a_k$ ע"י אחת הפעולות ב F ו $a_1, \ldots, a_k \in X_{B,F}$ אז $y \in X_{B,F}$ (סגירות תחת F).
3. ב $X_{B,F}$ נמצאים רק אברים הכרחיים לקיום דרישות 1 ו 2.

דוגמא:
$$B = \{0\}, F = \{+1\}$$
$x_1 = \mathbb{Z}$ - מכילה אברים מיותרים (שליליים).
$x_2 = \mathbb{N}$ - מקיים באינטואיציה.
$x_3 = \{0,2, \ldots\}$ - לא מכיל את 1 לדוגמה, ולכן לא מקיים.

דוגמא: שפת ה ABA.
עולם: מילים ב $\{a, b\}$.
בסיס: $B = \{ab\}$
פעולות: $F = \{f_1, f_2, f_3\}$
$f_1(w\} = waba$ - הוספת aba מימין.
$f_2(w) =$ מחליפים רצף ראשון מימין של aa המופיע במילה w באות b (אם קיים כזה).
$f_3(w) =$ מוחקים רצף ראשון מימין של bbb (אם קיים) ב w.
מילים בשפה:

ab
ababa
ababaaba
ababaabaaba
ababbba

נרצה להוכיח שההגדרה טובה.
בהינתן קבוצת בסיס (גרעין) B וקבוצת פעולות F, קיימת קבוצה העונה על דרישות 1-3 (קיום) והיא יחידה (יחידות).
(ההגדרה חד משמעית).

I) הוכחת קיום
מגדירים
$$A = \{x | 1,2 \text{ עונה על דרישות } x\}$$
$$= \{x | B \subseteq x \text{ and } X \text{ closed in } F\}$$
A לא ריקה מאחר וקבוצת העולם מעליה מוגדרת $X_{B,F}$ מקיימת את דרישות 1 ו 2.
נגדיר $X^* = \bigcap A$
X^* הוא החיתוך של כל הקבוצות המקיימות דרישות 1 ו 2.
נראה כי X^* עונה על דרישות 1-3:

1. צ"ל $B \subseteq X^*$.
לכל קבוצה $x \in A$ מתקיים ש x מקיימת דרישה 1 ולכן $B \subseteq X$ ומכאן:

2. צ"ל X^* סגורה תחת F.
הוכחה: לכל $x \in A$ מתקיים x סגורה תחת F. לפי משפט מתקיים ש $\bigcap A = X^*$ סגורה תחת F.
3. צ"ל ב X^* אין אברים לא הכרחיים לקיום דרישות 1 ו 2.
נניח בשלילה שקיים $y \in X^*$ שהוא לא הכרחי לקיום דרישות 1 ו 2.
כלומר, קיימת קבוצה $\bar{x}$ כך ש $y \notin \bar{x}$ ו $\bar{x}$ מקיימת דרישות 1 ו 2.
$\bar{x} \in A$ מאחר ו $\bar{x}$ מקיימת דרישות 1 ו 2.
$y \notin \bigcap A$ (מהגדרת החיתוך) ולכן $y \notin X^*$ בסתירה להנחה.

ראינו שבהינתן B ו F קיימת קבוצה X^* העונה על דרישות 1-3.

II) הוכחת יחידות
נראה ש X^* היא היחידה העונה על דרישות 1-3.
נניח בשלילה שקיימת $\overline{X} \neq X^*$ המקיימת דרישות 1-3.
$\overline{X} \in A$ מההגדרה, ולכן $X^* \subseteq \overline{X}$ (X^* החיתוך של כל הקבוצות ב A).
$X^* \neq \overline{X}$ וגם $X^* \subseteq \overline{X}$ ולכן $X^* \subset \overline{X}$ כלומר קיים $y \in \overline{X}$ ו $y \notin X^*$. בסתירה לכך ש $\overline{X}$ מקיימת דרישה 3.

<u>מסקנה מההוכחה</u>
תהי y קבוצה המקיימת את דרישות 1 ו 2 עבור B ו F, אזי $X_{B,F} \subseteq y$.
כלומר, כדי להוכיח שקבוצה $X_{B,F} \subseteq y$ מספיק שנוכיח ש y מקיימת דרישות 1 ו 2.
1. $B \subseteq Y$.
2. Y סגורה תחת F.

איך מראים $a \in X_{B,F}$?

$$X_{\{0\},\{+2\}}$$
$$6 \in X_{\{0\},\{+2\}} \ ?$$
$$0 \to_{+2} 2 \to_{+2} 4 \to_{+2} 6$$

הגדרה: **סדרת יצירה** עבור a מעל $X_{B,F}$ היא סדרה סופית $a_1, \dots, a_n$ המקיימת:
1. $a_n = a$.
2. לכל $1 \leq i \leq n$ מתקיים $a_i \in B$ או ש a_i התקבל מאברים קודמים בסדרה ע"י אחת הפעולות מ F.

סדרת יציאה היא תמיד סופית.
טענה: תהי B קבוצת גרעין ו F קבוצת פעולות. אזי לכל a מתקיים:
$a \in X_{B,F} \Leftrightarrow$ ל a סדרת יצירה מעל $X_{B,F}$.
בתרגול – סדרה לא יחידה ולא מינימאלית.

איך נראה $a \notin X_{B,F}$?
על מנת להראות ש $a \notin X_{B,F}$ נמצא תכונה T המקיימת:
1. כל אברי $X_{B,F}$ מקיימים T.
2. a לא מקיים T.

בד"כ הוכחת 2 – מיידי.
איך נוכיח דרישה מס' 1?
שקול להראות שעבור y – קבוצת האיברים שמקיימים T: $X_{B,F} \subseteq y$.
לצורך כך ראינו שמספיק להראות:
1. $B \subseteq y$ (כל אברי B מקיימים את התכונה T).

2. y סגורה תחת F (כל הפעולות ב F משמרות את התכונה T).
זו נקראת הוכחה באינדוקציית מבנה.

דוגמא:
נראה ש aba לא נמצאת בשפת ה ABA.
תכונה: מס' ה a במילה אי זוגי.
נסמן $\#a(w)$ מס' ה a-ים ב w. המילה aba לא מקיימת את התוכנה כי $\#a(aba) = 2$ זוגי.
נראה שכל אברי $X_{B,F}$ מקיימים את התוכנה. נוכיח באינדוקציה על המבנה של שפת ה ABA.
תכונה $\#a(w)$ אי זוגי.
בסיס: $\#a(ab) = 1$ אי זוגי
סגור:
f_1: הנחת האינדוקציה $\#a(w)$ אי זוגי.
צ"ל $\#a\left(f_1(w)\right)$ אי זוגי.

$$\#a(f_1(w)) = \#a(waba) = \#a(w) + 2$$

על פי הנחת האינדוקציה אי זוגי.
f_2: הנחת האינדוקציה $\#a(w)$ אי זוגי.
צ"ל $\#a\left(f_2(w)\right)$ אי זוגי.
$f_2(w)$ מתקבלת מ w על ידי החלפת aa ב b.
אם $\#a(f_2(w)) = w = f_2(w) = \#a(w)$
אחרת $\#a(f_2(w)) = \#a(w) - 2$ על פי הנחת האינדוקציה אי-זוגי.
f_3 בבית (טריוויאלי).
ראינו שכל המילים בשפת ה ABA מקיימות את התכונה $\#a(w)$ אי זוגי ו aba לא.
מכאן aba אינה מילה בשפת ה ABA.

דוגמא נוספת בבית:
בבנייה של תורת הקבוצות – כל הקבוצות סופיות.

<u>בניה פורמאלית</u>
נרצה להראות שבהינתן א"ב Σ, קיימת קבוצת כל המילים הסופיות באותיות מ Σ, נקרא Σ^*.
נראה שקיימות קבוצות המוגדרות באינדוקציה.

<u>עקרונות בוני קבוצות Set Contractors</u>
עקרון בונה קבוצות F הוא $A \rightarrow F(A)$.

$$A \rightarrow P(A)$$
$$A \rightarrow \{A\}$$
$$A \rightarrow A \cup \{A\}$$

עבור B מסוימת:

$$A \rightarrow \langle A, B \rangle$$

טענה: יהי F עקרון בונה קבוצות שעבור כל קבוצה A בונה קבוצה שונה. אזי לא קיימת קבוצה אוניברסאלית v המקיימת לכל A: $F(A) \in v$.
הוכחה: בבית משתמשים $v_0 = \{F(x) | F(x) \notin x\}$

<u>מחלקות ועקרון ההחלפה</u>
ראינו שלכל עקרון בונה קבוצות (שבונה לכל A תמונה שונה) לא קיימת $\{F(A) |\ A \text{ is a Set}\}$.
נתייחס כ**מחלקה** או **אוסף** (אם ידוע שלא קיים, או לא ידוע אם קיים).

הנחה:
לכל עקרון בונה קבוצות F ותכונה P, של קבוצות. אם קיימת הקבוצה $\{A | P(A)\}$ אז קיימת הקבוצה $\{F(A) | P(A)\}$.

עקרון ההחלפה

$$\{A_1, A_2, A_3\} \Longrightarrow$$
$$A \rightarrow P(A)$$
$$\{P(A_1), P(A_2), P(A_3)\}$$

לדוגמא:

$$\{\phi, \{\phi\}\} \Longrightarrow$$
$$A \rightarrow \{A\}$$
$$\{\{\phi\}, \{\{\phi\}\}\}$$

<u>עקרון הסגירות</u>

יהי C אוסף של עקרונות בוני קבוצות. לכל אוסף סופי C ולכל קבוצה B, קיימת קבוצה A המקיימת:

1. $B \subseteq A$.
2. A סגורה תחת C.

ורסיה של אקסיומת האינסוף.
ההנחה נותנת קיום קבוצות אינסופיות במקרה של עקרונות בוני קבוצות חסרי מעגלים.

<u>מודול מילים</u>

רוצים לקחת א"ב Σ ולבנות את Σ^* אוסף כל המילים הסופיות ב Σ.
נזכר בבניית $\{a, b\}^*$
ϵ - סימון למילה הריקה (עם 0 אותיות).

$$B = \{\epsilon\}$$
$$F = \{f_a, f_b\}$$
$$f_a = wa$$
$$f_b = wb$$

לכל אות בא"ב $\alpha \in \Sigma$ מגדירים עקרון בונה קבוצות S_α כך ש $S_\alpha(x) = \langle x, \alpha \rangle$.
נפעיל עקרון הסגירות:

$$B = \{\phi\}$$
$$C = \{S_\alpha | \alpha \in \Sigma\}$$

במקרה וקבוצה A סגורה תחת C, נאמר ש ΣA סגורה.

<u>בניה פורמאלית</u>

הגדרנו עקרונות בוני קבוצות – מעין פונקציות על קבוצות.
ניסחנו עקרון שמאפשר לקחת בסיס ולסגור תחת פעולות.

<u>עקרון הסגירות</u>

בהינתן קבוצת בסיס B וקבוצת עקרונות בוני קבוצות F, קיימת קבוצה A המקיימת:

1. $B \subseteq A$.
2. A סגורה תחת F.

(לא שקיבלנו את $X_{B,F}$ אלא קבוצה המכילה את $X_{B,F}$. ניתן לגזור ממנה (ע"י תכונה) את $X_{B,F}$).
זו ורסיה של אקסיומת האינסוף. אם יש ב F פעולה שהיא חסרת מעגלים – בהכרח A אינסופית.

הגדרנו Σ^* - אוסף כל המילים הסופיות מעל א"ב Σ. הדגמנו עבור $\Sigma = \{a, b\}$.

$$B = \{\epsilon\}$$
$$F = \{f_a, f_b\}$$
$$f_a(w) = wa$$
$$f_b(w) = wb$$

נבנה בבניה פורמאלית:

$$B = \{\phi\}$$
$$F = \{S_a, S_b\}$$

$S_a = \langle w, a \rangle$
$S_b = \langle w, b \rangle$

<u>באופן כללי בניה של Σ^*:</u>

$B = \{\phi\}$
$F = \{S_\alpha | \alpha \in \Sigma\}$
$S_\alpha(w) = \langle w, \alpha \rangle$

נשתמש בעיקרון הסגירות ונקבל קבוצה A המקיימת $B \subseteq A$ ו A סגורה תחת F.
(כלומר $\Sigma^* \subseteq A$)
(את Σ^* נקבל ע"י גזירת תכונה מ A).
נגדיר קבוצה:

$\bar{X}$ לא ריקה מאחר ו A נמצאת ב $\bar{X}$.

$$\Sigma^* = \bigcap \bar{X}$$

במקרה של הגדרת Σ^*, נאמר ש A היא Σ סגורה (במקום לומר סגורה תחת F).

<u>הגדרת הטבעיים</u>
בד"כ נהוג להגדיר את הטבעיים ע"י $\{1\}^*$
$\{1\}^*$ - אוסף המילים האונריות – מייצג $\mathbb{N}$.
ϵ מייצג 0.
1 מייצג 1.
11 מייצג 2.

התכונות של Σ^* (בתרגילי בית) נקראות במקרה של $\{1\}^*$ - אקסיומות Peano.

<u>עוצמות</u>
קבוצות סופיות – עוצמת הקבוצה = גודל הקבוצה = מס' האברים בקבוצה. סימנו $|A|$.

משפט
תהיינה A ו B קבוצות סופיות. אזי:

$$|A| = |B| \Leftrightarrow \exists f: A \to B \text{ where f is 1:1 and onto.}$$

הוכחה:
כיוון 1, $|A| = |B|$:

$A = \{a_1, \dots, a_n\}$
$B = \{b_1, \dots b_n\}$

ולכן נגדיר:

כיוון 2:

$A = \{a_1, \dots a_n\}$
$B = \{b_1, \dots b_k\}$

נתון שקיימת $f: A \to B$ חח"ע ועל. צ"ל: $n = k$
מאחר ו f חח"ע, כל אבר ב A ממופה לאבר אחר ב B, ולכן: $k \geq n$.
מאחר ו f על, ולכן לכל אבר ב B נכנס לפחות חץ אחד, ולכן: $n \geq k$.
מכאן $n = k$.

<u>הגדרה</u>
נאמר שקבוצה A ו B הן שוות עוצמה ונסמן $A \sim B$ אם קיימת $f: A \to B$ חח"ע ועל.
דוגמאות:

1. $B = \{m \mid \exists n \in N, n^2 = m\}$

B קבוצת הריבועים השלמים.

$B \sim \mathbb{N}$
$f: \mathbb{N} \to B$
$f(n) = n^2$

2. נגדיר מקטע ממשי:

$(a, b) = \{x \mid x \in \mathbb{R}, a < x < b\}$

נראה $(0,1) \sim \mathbb{R}$.

$\tan\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ חח"ע ועל.

איך? נשתמש ב $\tan$ ב $f: (0,1) \to \mathbb{R}$.

$f_1: (0,1) \to (-1,1)$
$f_1(x) = 2x - 1$
$f_2: (-1,1) \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$
$f_2(x) = \frac{\pi}{2}x$
$f(x) = \tan(\frac{\pi}{2}(2x - 1))$

להשתכנע בבית f חח"ע ועל.

משפט

היחס ~ הוא יחס שקילות.

($A \sim B$ הוא יחס שקילות)

הוכחה: בבית. רפלקסיביות – פונקצית הזהות.

סימטריות:

צ"ל: קיימת $f: A \to B$ חח"ע ועל. קיימת $g: B \to A$ חח"ע ועל.

נראה ש f^{-1} עונה על הדרישה.

טרנזיטיביות: הרכבת פונקציות.

מחלקות השקילות של היחס נקראות "המספרים הקרדינאליים".

מהי קבוצה אינסופית?

<u>הגדרה 1:</u> נאמר ש A קבוצה סופית אם המספר הקרדינאלי של הוא מס' טבעי.

קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש A שוות עוצמה (=שקולה) ל $\{1, \dots, n\}$.

נאמר ש A אינסופית אם A לא סופית.

טענה: $\mathbb{N}$ קבוצה אינסופית.

הוכחה:

יהי $n \in \mathbb{N}$ נראה ש $\mathbb{N} \nsim \{1, \dots, n\}$ - לא שוות עוצמה.

תהי $f: \{1, \dots, n\} \to \mathbb{N}$ נראה ש f לא על.

נגדיר $m = \max\{f(1), \dots, f(n)\}$. m מוגדר היטב מאחר ומדובר במקסימום על מספר סופי של אברים.

לא קיים $k \in \{1, \dots, n\}$ כך ש $f(k) = m + 1$ ומכאן ש f לא על.

<u>הגדרה שנובעת מהגדרה 1:</u> A קבוצה אינסופית אם קיימת $f: \mathbb{N} \to A$ חח"ע.

סימון:

$f: A \to B$
$f(A) = \{y \mid \exists x \in A, f(x) = y\}$
$f(A) \subseteq B$

<u>הגדרה 2:</u> נאמר ש A קבוצה אינסופית אם קיימת $f: A \to A$ חח"ע **ולא על.**

(כלומר $f(A) \subset A$).

טענה: $\mathbb{N}$ קבוצה אינסופית.

הוכחה: נגדיר $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ כך ש $f(n) = 2n, n + 1$.

בבית: ההגדרות שקולות.

<u>הערה ומסקנה:</u>

I) עבור A, B סופיות. אם $|A| = |B|$ אזי כל פונקציה $f: A \to B$ חח"ע היא גם על, וכל פונקציה על היא גם חח"ע.

II) בקבוצות אינסופיות, אם $|A| = |B|$ קיימת $f: A \to B$ חח"ע ולא על, קיימת $f: A \to B$ על ולא חח"ע.

III) על מנת להראות $A \sim B$ מספיק להראות קיום $f: A \to B$ חח"ע ועל.

<u>תכונות של קבוצות סופיות:</u>

I) אין קבוצה סופית ואינסופית.

II) A ו B סופיות, אז:

$$A \cap B, A \cup B, A \times B, A \backslash B$$

סופיות.

III) איחוד סופי של קבוצות סופיות הוא סופי.

IV) מכפלה קרטזית סופית של סופיות היא סופית.

<u>תכונות של קבוצות אינסופיות:</u>

תהי A קבוצה אינסופית.

I) כל קבוצה B המקיימת ש $A \subseteq B$ היא אינסופית.

הוכחה:

ע"פ ההגדרה שנובעת מ 1 קיימת $f: \mathbb{N} \to A$ חח"ע.

$A \subseteq B$ ולכן אותה f מקיימת $f: \mathbb{N} \to B$ חח"ע ומכאן B אינסופית.

II) אם קיימת $f: A \to B$ חח"ע אזי B אינסופית.

III) אם קיימת $g: B \to A$ על אזי B אינסופית.

IV) $P(A)$ אינסופית.

הוכחה:

ע"פ II מספיק שנראה פונקציה חח"ע מ A ל $P(A)$.

$$f: A \to P(A)$$
$$f(x) = \{x\}$$

בבית חח"ע.

V) לכל קבוצה B, הקבוצה $A \cup B$ אינסופית. לפי I מאחר ו $A \cup B$ מכילה את A אזי $A \cup B$ אינסופית.

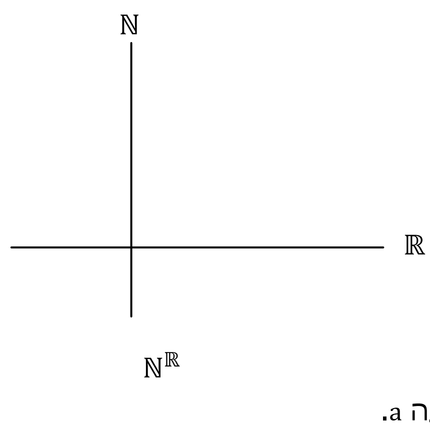
VI) לכל $B \neq \phi$ הקבוצה $A \times B$ היא אינסופית.

נגדיר פונקציה $f: A \to A \times B$ חח"ע.

נבחר $y \in B$ ונגדיר $f(x) = \langle x, y \rangle$ חח"ע (בבית).

VII) לכל $B \neq \phi$ הקבוצה A^B אינסופית (A^B קבוצת הפונקציות מ B ל A).

נראה פונקציה $f: A \to A^B$ לכל $a \in A$ נתאים $g_a: B \to A$ כך ש $f(a) = g_a$.



נגדיר g_0 להיות הפונקציה הקבועה a.

לכל $y \in B$: $g_a(y) = a$

צ"ל f חח"ע. כלומר אם $a_1 \neq a_2$ אז $f(a_1) \neq f(a_2)$.

$$f(a_1) = g_{a_1} \equiv a_1$$
$$f(a_2) = g_{a_2} \equiv a_2$$

ומאחר ו $a_1 \neq a_2$ אז $f(a_1) \neq f(a_2)$.

משפט

אם $\Sigma \neq \phi$ אז Σ^* אינסופית.

הוכחה:

יהי $a \in \Sigma$ כלשהם. נגדיר $f: \mathbb{N} \to \Sigma^*$.

$$f(0) = \epsilon$$
$$f(n+1) = f(n)a$$

בבית – f חח"ע.

<u>קבוצות בנות מניה</u>

נסמן $|\mathbb{N}| = \aleph_0$.

הגדרה: קבוצה A היא בת מניה אם קיימת $f: A \to \mathbb{N}$ חח"ע.

הגדרה שקולה: קבוצה היא בת מניה אם היא סופית או שעוצמתה $\aleph_0$.

נאמר ש A בת מניה אינסופית אם A בת מניה ולא סופית.

כיצד נראה שקבוצה בת מניה אינסופית?

(למעשה יעניין אותנו להראות שקבוצה אינסופית היא בת מניה).

מחפשים – $f: A \to \mathbb{N}$ חח"ע.

(צריך להראות אינסופית).

(כדי להראות בת מניה אינסופית נראה $f: \mathbb{N} \to A$ חח"ע ועל).

<u>דרך א'</u> – בניה מפורשת

$$\mathbb{N}, Aodd$$
$$f: Aodd \to \mathbb{N}$$
$$f(n) = \frac{n-1}{2}$$

פונקציה חח"ע ועל.

<u>דרך ב'</u> – נציג סדר ספירה

נציג סדר ספירה על אברי A שבו מופיעים על אברי A וכל איבר מופיע שלפני מס' סופי של אברים.

נראה ש $\mathbb{Z}$ בת מניה.

הפונקציה שנבנית $f: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ היא $f(n) = n$ לא על – כן חח"ע.

$$0, 1, -1, 2, -2, \ldots$$

בסדר בספירה בשלה ה i סופרים את i ואחריו את $-i$.

כל אבר k ב $\mathbb{Z}$ יופיע בשלב ה $|k|$.

לפני כל אבר בספירה יופיעו לכל היותר $2|k|$ אברים.

נתאים לכל איבר ב $\mathbb{Z}$ את המקום שלו בסדר בספירה.

למה מציאת סדר ספירה עוזרת לנו – נבנה פונקציה מ A ל $\mathbb{N}$ המתאימה לכל אבר את מיקומו בספירה.

מה אם יש חזרות?

0,1,-1,0,1,2,-1,-2,…

מסדר ספירה עם חזרות ניתן לקבל סדר ללא חזרות – נספור כל אבר בפעם הראשונה שנתקלים בו.

הרעיון של המניה בשלמים פועל עבור כל שתי קבוצות בנות מניה.

טענה: תהיינה $A_1, \dots A_k$ קבוצות בנות מניה.
$\bigcup_{i=1}^{k} A_i$ בת מניה.

$$A_1 = \{a_{11}, a_{12}, \dots\}$$
$$\dots$$
$$A_k = \{a_{k1}, a_{k2}, \dots\}$$

אם כולן סופיות אז האיחוד סופי, בן מניה.
אם לפחות אחת מהן אינסופית – נציג סדר ספירה.
הספירה תהיה בשלבים:
בשלב ה i נספור את האברים $a_{1,i}, \dots a_{k,i}$ (אם קיימים).
כל אבר $a_{i,j}$ נספר בשלב ה j. ומאחר וכל שלב סופי, גודלו לכל היותר k. כל אבר נספר כשלפניו לכל היותר kj אברים.

משפט

$$|\mathbb{Q}^+| = \aleph_0$$

מסקנה:

$$|\mathbb{Q}| = \aleph_0$$
$$\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^+ \cup \mathbb{Q}^- \cup \{0\}$$

הוכחה:
נציג סדר ספירה עבור $\mathbb{Q}^+$ (סדר הוצאה מהטבלה):

$$\begin{array}{cccc} \frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \dots \\ \frac{2}{1} & \frac{2}{2} & \frac{2}{3} & \dots \\ \frac{3}{1} & \frac{3}{2} & \frac{3}{3} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}$$

לא ניתן להוציא בשורות או בעמודות. נוציא מהטבלה באלכסון.
בשלב ה k נספר את כל האברים $\frac{i}{j}$ כך ש $i + j = k + 1$.
האיבר $\frac{i}{j}$ נספר בשלב ה $i + j - 1$. מאחר וכל שלב סופי, גודלו k. מספר האברים שלפני $\frac{i}{j}$ הוא סופי.
דוגמא:
$A_1, \dots, A_k$ קבוצות בנות מניה, אזי:

$$\bigcup_{i=1}^{k} A_i$$

גם כן בת מניה.
<u>הוכחה:</u>

$$\begin{array}{l} A_1 = a_{1,1}\ a_{1,2}\ a_{1,3} \dots \\ A_2 = a_{2,1}\ a_{2,2}\ a_{2,3} \dots \\ \dots \\ A_k = a_{k,1}\ a_{k,2}\ a_{k,3} \dots \end{array}$$

<u>סדר ספירה</u>
רוצים דרך לסדר את האיברים בסדרה, כך שכל איבר יופיע, ולפני כל איבר יהיו מס' סופי של איברים.
אכן, בדוגמה שלנו האיבר $a_{i,n}$ יהיה האיבר ה $(n-1) \cdot k + i$ בסדרה.
באופן אחר, בכל שלה נמנה k איברים (העמודה המתאימה) וברור ש $a_{i,n}$ יספר בשלב ה n-י.

<u>דוגמא:</u>

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} \mid b \in \mathbb{N}\backslash\{0\}, a \in \mathbb{N}\right\}$$

$$\mathbb{Q} = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$$
$$A_k = \left\{\frac{a}{k} \mid a \in \mathbb{Z}\right\}$$

טענה: $\mathbb{Q} \sim \mathbb{N}$

<u>הוכחה 1 (סדר ספירה)</u>

$$\begin{array}{ccccccccc}
1/1 & 1/2 \to & 1/3 & 1/4 \to & 1/5 & 1/6 \to & 1/7 & 1/8 \to & \cdots \\
2/1 & 2/2 & 2/3 & 2/4 & 2/5 & 2/6 & 2/7 & 2/8 & \cdots \\
3/1 & 3/2 & 3/3 & 3/4 & 3/5 & 3/6 & 3/7 & 3/8 & \cdots \\
4/1 & 4/2 & 4/3 & 4/4 & 4/5 & 4/6 & 4/7 & 4/8 & \cdots \\
5/1 & 5/2 & 5/3 & 5/4 & 5/5 & 5/6 & 5/7 & 5/8 & \cdots \\
6/1 & 6/2 & 6/3 & 6/4 & 6/5 & 6/6 & 6/7 & 6/8 & \cdots \\
7/1 & 7/2 & 7/3 & 7/4 & 7/5 & 7/6 & 7/7 & 7/8 & \cdots \\
8/1 & 8/2 & 8/3 & 8/4 & 8/5 & 8/6 & 8/7 & 8/8 & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}$$

בשלב ה k נמנה את האיברים $\{a_{i,j}\}_{i+j=k+1} = \{a_{1,k}, a_{1,k-1}, \dots, a_{k,1}\}$ האיבר $a_{n,m}$ ימנה בשלב ה $n+m-1$ לפני שלב זה נמנו $\sum_{i=1}^{n+m-z} i$ איברים. ובשלב ה $n+m-1$ נמנים בדיוק $n+m-1$ איברים.

אותה הוכחה מראה כי אם $A_1, A_{,2} \dots$ קבוצות בנות מניה אז $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ קבוצה בת מניה.

חזקות של ראשוניים:

$$2^1, 2^2, 2^3, \dots$$
$$3^1, 3^2, 3^3, \dots$$
$$5^1, 5^2, 5^3, \dots$$
$$7^1, 7^2, 7^3, \dots$$

נסמן ב P_k את המס' הראשוני ה k וכעת נגדיר העתקה.

$$f: \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \to \mathbb{N}$$
$$f(a_{n,m}) = (P_n)^m$$

$a_{n,m}$ הוא האיבר ה m-י בקבוצה A_n.

$$[0,1]^{\mathbb{N}} \sim [0,1]$$

<u>טענה:</u> אם A, B קבוצות בנות מניה אז $A \times B$ גם קבוצה בת מניה.

<u>הוכחה:</u>

מאחר ו A, B בנות מניה ניתן לכתוב

$$A = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$$
$$B = \{b_1, b_2, b_3, \dots\}$$

נסמן:

$$C_k = \{(a, b_k) \mid a \in A\}$$
$$\bigcup_{k=1}^{\infty} C_k = A \times B$$

כל C_k בת מניה כי ברור ש $C_k \sim A$.

לפי הטענה הקודמת $\bigcup C_k$ בת מניה.

<u>טענה:</u> תהי A קבוצה בת מניה. נגדיר:

$$A^* = \bigcup_{k=1}^{\infty} A^k$$

כאשר $A^1 = A, A^2 = A \times A$ וכו'...
אזי A^* בת מניה.
<u>הוכחה 1:</u>
ראינו כי $A \times A$ בת מניה.
באינדוקציה

$$A^k = A^{k-1} \times A$$

לכן A^k בת מניה.
לכן A^* היא איחוד בן מניה של קבוצות בנות מניה.
<u>הוכחה 2 (ע"י סדר ספירה):</u>
נכתוב $A = \{a_1, a_2, \dots\}$ הדרך בה נתקדם היא שבשלב ה k נמנה את ה n-יות.
בשלב ה k נמנה את כל ה n-יות כך ש

א. $n \le k$
ב. אבריהן באים מהקבוצה $\{a_1, \dots, a_k\}$.

צריך להראות שבסדר הנ"ל כל איבר של A^* אכן נספר, ושלפני כל איבר נספרו מספר סופי של איברים.
נשים לב כי בשלב ה k ספרנו לכל היותר

$$\sum_{n=1}^{k} k^n = k + k^2 + \dots + k^k < \infty$$

נביט באיבר כלשהו של A^*

$$\left(a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_m}\right)$$

האיבר הזה יספר בשלב ה $\max\{i_1, i_2, \dots, i_m, m\}$
(הראנו שכל איבר נספר באיזשהו שלב ושכל שלב הוא סופי) ■

דוגמא: השלב השלישי

$n \le 3$
$\{a_1, a_2, a_3\}$
a_1, a_2, a_3
$(a_1, a_1), \dots, (a_3, a_3)$
$(a_1, a_1, a_1), \dots, (a_3, a_3, a_3)$

<u>קבוצות שאינן בנות מניה</u>
נגדיר יחס בין עוצמות/קבוצות

- נאמר כי $A \underline{\propto} B$ אם יש $f: A \to B$ חח"ע
- נאמר כי $A \propto B$ אם יש $f: A \to B$ חח"ע אבל אין $g: A \to B$ על.

אנחנו נראה שתי טענות

א. $A \propto P(A)$ לכל A
(מראה שיש אינסוף עוצמות)
ב. $\underline{\propto}$ יחס סדר חלקי.

<u>משפט קנטור</u>
לכל A מתקיים $A \propto P(A)$.
הוכחה:
תהי $f: A \to P(A)$ מוגדרת על ידי $f(x) = \{x\}$.
<u>שיטת הלכסון</u>
לכל $g: A \to P(A)$ נמצא קבוצה $B_g \in P(A)$ כך ש B_g לא בתמונת g.

<table>
<tr><td></td><td colspan="3">$A \quad b$</td></tr>
<tr><td>A</td><td></td><td>$\begin{array}{|c|}\hline 1\\ \hline 0\\ \hline 1\\ \hline 1\\ \hline\end{array}$</td><td>$= g(b)$</td></tr>
</table>

בכניסה (a,b) במטריצה נכתוב 1 אם $a \in g(b)$ ו 0 אם $a \notin g(b)$.

$b, a \in A$

$g(b), g(a) \in P(A)$

$g(a), g(b) \subseteq A$

נגדיר

$$B_g = \{a \in A \mid a \notin g(a)\}$$

נראה כעת כי B_g לא בתמונת g.

נניח בשלילה שיש a כך ש $g(a) = B_g$.

נשאל את עצמנו האם $a \in g(a)$?

אם כן: אז $a \notin B_g$, אבל אז $g(a) \neq B_g$ סתירה.

אם $a \notin g(a)$: אז $a \in B_g$ ושוב $B_g \neq g(a)$ סתירה.

<u>מסקנה</u>

$P(\mathbb{N})$ לא בת מניה.

$P(\mathbb{N}) = \{(.01101010)\}$.

ולכן:

$\mathbb{R} \supseteq (0,1)$ לא בת מניה.

רוצים להראות כי $\underline{\propto}$ יחס סדר חלקי.

- רפלקסיבי כי $A \underline{\propto} A$
- טרנזיטיבי אם $C \underline{\propto}^{g} B \underline{\propto}^{f} A$ אז $C \underline{\propto}^{g\circ f} A$

<u>משפט – קנטור ברנשטיין</u>

אם $B \underline{\propto} A$ ו $A \underline{\propto} B$ אז $A \propto B$.

<u>הוכחה</u>

נתון $f: A \to B$ חח"ע

ונתון $g: B \to A$ חח"ע

צריך למצוא $h: A \to B$ חח"ע ועל.

$g(B) = C$

$B \sim g(B) = C$

$A \sim f(A) \sim g\big(f(A)\big) = D$

$D \subseteq C \subseteq A$

$A \sim D$

$\Longrightarrow A \sim C$

מצבנו:

$D \subseteq C \subseteq A$

$\varphi: A \to D$ חח"ע ועל (בסימונים הקודמים $\varphi = g \circ f$)

רוצים לבנות $\psi: A \to C$ חח"ע ועל.

<u>ניסיון 1</u>

נגדיר $\alpha: A \to C$

$$\alpha(a) = \begin{cases} a & a \in C \\ \varphi(a) & a \notin C \end{cases}$$

לא עובד כי α לא חח"ע (יש התנגשויות בתוך D).

כי נשים לב שאם $\alpha \in A \backslash C$ אז $\alpha(a) = \alpha\big(\varphi(a)\big)$ ומתקיים $C \not\ni a \neq \varphi(a) \in C$

<u>ניסוין 2</u>

נגדיר

$$X_0 = A\backslash C$$
$$X_1 = \varphi(X_0)$$
$$X_2 = \varphi(X_1)$$

ובאופן כללי

$$X_{n+1} = \varphi(X_n)$$

נגדיר:

$$X = \bigcup_{n=0}^{\infty} X_n$$

וכעת נגדיר $\psi: A \to C$ ע"י

$$\psi(a) = \begin{cases} \varphi(a) & a \in X \\ a & a \notin X \end{cases}$$

טענה: ψ חח"ע ועל

חח"ע: נניח $\psi(a) = \psi(b)$

אם $a, b \notin X$ אז

$$a = \psi(a) = \psi(b) = b$$

אם $a, b \in X$ אז

$$\varphi(a) = \psi(a) = \psi(b) = \varphi(b)$$

אם $a \in X$ וגם $b \notin X$ אז

$$\varphi(a) = \psi(a) = \psi(b) = b$$

אם $a \in X$ אז יש n כך ש $a \in X_n$, ולכן $b \in X_{n+1}$ זאת אומרת $b \in X$ בסתירה.

נראה כי ψ על:

יהי $y \in C$ נראה שקיים $a \in A$ כך ש $\psi(a) = y$.

I) אם $y \notin \bigcup_n X_n$ אז $y \in C$ ולכן $y \in A$ ע"פ ההגדרה $h(y) = y$.

II) אחרת $y \in \bigcup_n X_n$ ו $y \notin X_0$ כי $y \notin A\backslash C$. לכן קיים $k \geq 1$ כך ש $y \in X_k$.
אבל $X_k = \varphi(X_{k-1})$. מאחר ו $y \in \varphi(X_{k-1})$ קיים $a \in X_{k-1}$ כך ש $y = \varphi(a)$.
היות ש $a \in \bigcup_n X_n$ מתקיים כי $\psi(a) = \varphi(a) = y$.

בזה הראינו ש ψ היא על ולכן $A \sim C$.

משפט:

תהי A קבוצה בת מניה אינסופית. אזי $A \sim \mathbb{N}$.

הוכחה:

A בת מנייה – קיימת $f: A \to \mathbb{N}$ חח"ע.

A אינסופית ולכן לפי ההגדרה קיימת $g: \mathbb{N} \to A$ חח"ע.

קיבלנו $\mathbb{N} \leq A$ וגם $A \leq \mathbb{N}$ ולכן $A \sim \mathbb{N}$.

בתרגול נראה כי $2^{\mathbb{N}} \sim \mathbb{R}$.

עידו שמיר
חורף 2009

תחשיב הפסוקים

סינטקס

צורה – מערכת הכללים.

$\wedge$ - ו
$\vee$ - או
$\rightarrow$ - אם-אז
$\neg$ - לא

הגדרה פורמאלית של הסינטקס

אותיות השפה: $\{p_i \mid i \in \mathbb{N}\} = \{p_0, p_{,1}, \dots\}$ וכן $\{\wedge, \vee, \neg, \rightarrow, T, F, (,)\}$
ביטוי/מילה – סדרה סופית של אותיות בשפה.

נגדיר באינדוקציה את אוסף המילים החוקיות בשפה.
בסיס:
$$\{p_i \mid i \in \mathbb{N}\} \cup \{T, F\}$$
נקרא לאיברי הבסיס פסוקים אטומיים.
פעולות:
$$F = \{F_\wedge, F_\vee, F_\rightarrow, F_\neg\}$$
עבור α, β מתקיים לדוגמה:
$$F_\wedge(\alpha, \beta) = (\alpha \wedge \beta)$$
קבוצת הפסוקים היא הקבוצה המוגדרת באינדוקציה ע"י B ו F שהגדרנו.

מגירים קבוצת פסוקים $\mathrm{WFF}\{F, \rightarrow\}$
פסוקים מצומצמים ל F ו $\rightarrow$.
בסיס $\{p_i \mid i \in \mathbb{N}\} \cup \{F\}$
סגור $\{F_\rightarrow\}$.

משמעות לתחשיב הפסוקים

נגדיר קבוצה של ערכי אמת $\{0,1\}$.
נרצה להתאים לכל פסוק ערך אמת.

הגדרה – עץ יצירה.
עץ שבו כל צומת מסומן בפסוק.
1. אם הצומת עלה – מסומן בפסוק אטומי.
2. אם הצומת הוא צומת פנימי, מסומן באחד הקשרים ויש לו שני בנים או אחד.
3. אם לצומת יש שני בנים, מסומן ב $o \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$.
4. אם לצומת יש בן אחד מסומן ב $\neg$.

נרשום את הבניה של תחשיב הפסוקים כבניה של עצים:
בסיס – עצים עם צומת אחד
$$p_1, T, F$$
סגור – אם T_1 ו T_2 עצי יצירה $o \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$

רעיון חישוב ערך אמת:
משרטטים לפסוק עץ יצירה ומחשבים ערך אמת במעלה העץ.
שני שלבים בחישוב:
I) שלב העלים.
II) שלב הטיפוס בעץ.

שלב ראשון:
מגדירים השמה – פונקציה שמתאימה לכל אחד מה $\{p_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ ערך אמת.

$$z: \{p_i \mid i \in \mathbb{N}\} \to \{0,1\}$$

T – מקבל 1.
F – מקבל 0.

שלב שני:
מטרה – להרחיב את ההשמה כך שתתאים לכל פסוק ערך אמת.
סימון: מסמנים ב $z(p_i)$ את הערך ש z מתאימה ל p_i.
אם α הוא פסוק, אז $\bar{z}(\alpha)$ - הערך שההשמה z מתאימה ל α - ההרחבה של ההשמה.
נניח ש δ הצומת הראשון בעץ שלא מוגדר.
יש צורך להגדיר איך מבצעים פעולות

$$\delta = (\alpha \vee \beta) \text{ or } (\alpha \wedge \beta) \ldots$$

לצורך ביצוע הפעולות משתמשים בטבלאות האמת.

$TT_\vee$		
α	β	$(\alpha \vee \beta)$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

$TT_\wedge$		
α	β	$(\alpha \wedge \beta)$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$TT_\to$		
α	β	$(\alpha \to \beta)$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

$TT_\neg$	
α	$(\neg\alpha)$
0	1
1	0

הגדרה פורמאלית
תהי z השמה $z = \{p_i \mid i \in \mathbb{N}\} \to \{0,1\}$ נגדיר באינדוקציה על מבנה הפסוק את הערך $\bar{z}(\alpha)$.
בסיס: α פסוק אטומי.

$$\bar{z}(\alpha) = z(p_i), \alpha = p_i$$
$$\bar{z}(\alpha) = 1, \alpha = T$$
$$\bar{z}(\alpha) = 0, \alpha = F$$

צעד: בהינתן ערכי האמת $\bar{z}(\alpha), \bar{z}(\beta)$ עבור $o \in \{\wedge, \vee, \to\}$.

$$\bar{z}\big((\alpha o \beta)\big) = TT_o\big(\bar{z}(\alpha), \bar{z}(\beta)\big)$$
$$\bar{z}\big((\neg\alpha)\big) = TT_\neg\big(\bar{z}(\alpha)\big)$$

דוגמא:

$$((\neg p_2) \to p_3)$$

ההשמה

p_0	p_1	p_2	p_3	…
1	1	1	0	

$$\bar{z}\Big(\big((\neg p_2) \to p_3\big)\Big) = TT_\to\Big(\bar{z}\big((\neg p_2)\big), \bar{z}(p_3)\Big) = TT_\to(TT_\neg\big(\bar{z}(p_2), z(p_3)\big) = TT_\to\Big(TT_\neg\big(z(p_2)\big), z(p_3)\Big)$$
$$= TT_\to\big(TT_\neg(1), (0)\big) = TT_\to(0,0) = 1$$

בהינתן השמה z ופסוק α. אם $\bar{z}(\alpha) = 1$ נאמר ש z מספקת α. ונסמן $z \vDash \alpha$.

האם ההגדרה טובה (=קיום ויחידות)?
קיום – אין בעיה.
יש צורך להוכיח יחידות.
הבעיה – עצים שונים.
המשפט שמבטיח שלא יתכנו עצים שונים – משפט הקריאה היחידה.

משפט הקריאה היחידה
I) לכל פסוק α אם קיימים β_1, β_2 וקשר דו-מקומי a כך ש $\alpha = (\beta_1 a \beta_2)$, אזי לא קיימים γ_1, γ_2 וקשר דו-מקומי b כך ש $\alpha = (\gamma_1 b \gamma_2)$ ו $\gamma_1 \neq \beta_1$ או $\gamma_2 \neq \beta_2$ או $a \neq b$.
(משמעות – אין בלבול בין שני קשרים דו מקומיים).

II) לכל פסוק α, אם קיים פסוק β כך ש $\alpha = (\neg\beta)$, אז לכל פסוק β_1 אם $\alpha = (\neg\beta_1)$ אז $\beta = \beta_1$ לא קיימים γ_1, γ_2 וקשר דו-מקומי b כך ש $\alpha = (\gamma_1 b \gamma_2)$.
(אין בלבול בין חד-מקומיים ואין בלבול בין דו-מקומי לחד-מקומי).

המשפט – משפט סינטקטי – בכל שלב בבניית העץ ישנה אפשרות לבחירת הקשר המרכזי $\Leftarrow$ קיים עץ יצירה יחיד.

<u>משפט הגדרת ערך האמת:</u>

בהינתן השמה z, לכל פסוק α ערך האמת $\bar{z}(\alpha)$ יחיד.

תהי z השמה. נוכיח באינדוקציה על מבנה הפסוק את התכונה:
$\bar{z}(\alpha)$ יחיד.

בסיס: α פסוק אטומי.

$$\alpha = T, \bar{z}(\alpha) = 1$$
$$\alpha = F, \bar{z}(\alpha) = 0$$
$$\bar{z}(p_i)$$

מוגדר באופן יחיד.

סגור: נניח ש $\bar{z}(\beta_1)$ ו $\bar{z}(\beta_2)$ מוגדרים באופן יחיד.

נראה ש $\bar{z}(\beta_1 o \beta_2)$ כש $o \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$ מוגדר באופן יחיד.

$$\bar{z}\big((\beta_1 o \beta_2)\big) = TT_o\big(\bar{z}(\beta_1), \bar{z}(\beta_2)\big)$$

מאחר ובכל כניסה בטבלת האמת מופיע ערך יחיד, אזי ערך האמת של $(\beta_1 o \beta_2)$ מוגדר באופן יחיד.

מוכיחים $\alpha = (\beta_1 o \beta_2)$ על פי משפט הקריאה היחידה זו הדרך היחידה לקרוא את α. ולכן בהכרח הערך יחיד.

<u>מגדירים סדר קדימויות לקשרים</u>

1. $\neg$
2. $\wedge, \vee$
3. $\rightarrow$

נשמיט סוגריים במקרה וניתן ולא משתנה המשמעות.

כלומר, נשאיר סוגריים במקרים שבהם מעוניינים לחשב קשרים לא לפי סדר הקדימויות. או קשרים מאותה עדיפות לא משמאל לימין.

<u>שני מישורים</u>

מישור סינטקטי – הגדרת הפסוקים, תכונות פסוק חוק, משפט הקריאה היחידה.

מישור סמנטי – חישוב ערך האמת, משפט הגדרת ערך האמת.

<u>שלמות מערכות קשרים</u>

הרבה קשרים בין טענות ניתן לבטא בטבלה.

רוב $\#(\alpha, \beta, \gamma)$

α	β	γ	$\#(\alpha,\beta,\gamma)$
0	0	0	0
0	1	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

מעניין אותנו כוח ההבעה של תחשיב הפסוקים.

דוגמא לקשר בין טענות שניתן להבעה בטבלת אמת – רוב.

השאלה: האם כל קשר שניתן לביטוי בטבלת אמת ניתן לקבע בתחשוב הפסוקים?

בהינתן פסוק α ניתן לבנות ל α טבלת אמת $\alpha = p_0 \vee p_1$.

עידו שמיר
חורף 2009

נאמר ש α מממש את טבלת האמת שמתאימה לו.

p_0	p_1	
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

האם לכל טבלה יש פסוק שמממש אותה?
התשובה תלויה במערכת הקשרים.

נאמר שמערכת קשרים שלמה אם לכל טבלת אמת קיים פסוק בקשרים האלו שמממש אותה.

טענה: מערכת הקשרים של תחשיב הפסוקים שלמה.

הוכחה: תני TT טבלת אמת, נבנה עבורה פסוק αTT שמממש אותה.
נבנה $\alpha\#$ שמממש את $\#(\alpha,\beta,\gamma)$.

שלב ראשון – לכל שורה i בטבלה שמקבלת 1 נבנה פסוק α_i - "אני בשורה ה i".

$$\alpha_4, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8$$
$$\alpha_4 = (\neg p_0) \land p_1 \land p_2$$
$$\alpha_6 = p_0 \land (\neg p_1) \land p_2$$
$$\alpha_7 = p_0 \land p_1 \land (\neg p_2)$$
$$\alpha_8 = p_0 \land p_1 \land p_2$$

נרשום את שלילות כל האטומים שמקבלים 0 בשורה ה i ואת כל האטומים שמקבלים 1 כמו שהם, ונחבר ב $\land$.

שלב שני – נבנה פסוק αTT שיאמר עבור השורות $i_1, i_2, \ldots$ שמקבלות 1 בטבלה:
"או שאני ב i_1 או שאני ב i_2"

$$\alpha TT = \alpha_{i1} \lor \alpha_{i2} \lor \ldots \lor \alpha_{ik}$$
$$\alpha\# = \alpha_4 \lor \alpha_6 \lor \alpha_7 \lor \alpha_8$$

אם הטבלה כולה 0 אז או F או $p_0 \land (\neg p_0)$.

הוכחה: נראה ש αTT מקבל 1 $\Leftrightarrow$ יש 1 בטבלה TT.
יש 1 בטבלה TT $\Leftrightarrow$ ההשמה מתאימה לאחת משורות ה-1-ים בטבלה – נניח שורה j $\Leftrightarrow$ ההשמה מספקת את α_j עבור 1 משורות ה-1-ים $\Leftrightarrow$ αTT קבל 1.

למעשה ראינו ש $\{\land, \lor, \neg\}$ מערכת קשרים שלמה. מסיקים מזה שם $\{\land, \lor, \neg, \to\}$ שלמה אבל למעשה ניתן לממש $\to$ על ידי $\{\neg, \land, or\}$.

<u>מונחי יסוד סמנטיים</u>
הגדרה נאמר שפסוק α הוא טאוטולוגיה ונסמן $\vDash \alpha$ אם לכל השמה z מתקיים $\bar{z}(\alpha) = 1$.
דוגמאות:

$$T, \left(p_0 \lor (\neg p_0)\right)$$

איך נראה α טאוטולוגיה?
שיטה ראשון: טבלת אמת.
רוצים לבנות טבלה המכילה את כל ההשמות ועבור כל השמה לחשב את ערך האמת שלה.
הבעיה – יש אינסוף השמות.
במערכת הקשרים שלנו, ערך האמת של הפסוק נקבע על פי הערכים שמקבלים האטומים המופיעים בפסוק.
לכן אם בפסוק מופיעים n אטומים, מספיק לבנות טבלה עם 2^n שורות.

השיטה: בונים טבלת אמת עבור כל ההשמות האפשריות לאטומים בפסוק, מוודאים שכל השורות קבלו 1.
דוגמא:

$$\left(\left(p_1 \to (p_2 \to p_3)\right) \to \left(p_2 \to (p_1 \to p_3)\right)\right)$$

p_1	p_2	p_3	$p_2 \to p_3$	α_1	$p_1 \to p_3$	α_2	α
0	0	0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	0	1	1
1	0	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

שיטה שנייה:
הוכחה מילולית – מחפשים מה צריכה השמה לקיים כדי שערך האמת יהיה 0 ומוכיחים כי לא קיימת השמה כזו.

נניח בשלילה שקיימת השמה z כך ש $\bar{z}(\alpha) = 0$.

1. $\bar{z}\left((p_0 \vee p_1) \to p_2\right) = 1$
2. $\bar{z}\left((p_0 \to p_2) \to (p_1 \to p_2)\right) = 0$

מ 2 ע"פ $TT \to$:

3. $\bar{z}(p_0 \to p_2) = 1$
4. $\bar{z}(p_1 \to p_2) = 0$

מ 4 ומ $TT \to$:

5. $\bar{z}(p_1) = 1$
6. $\bar{z}(p_2) = 0$

מ 5 ומ $TT \vee$:

7. $\bar{z}(p_0 \vee p_1) = 1$

מ 6+7 ע"פ $TT \to$ נובע $\bar{z}\left(p_0 \vee (p_1 \to p_2)\right) = 0$ סתירה ל1.

טאוטולוגיות לדוגמא:

$$(p_0 \wedge \neg p_0), \neg(p_p \wedge \neg p_0)$$
$$\left(p_0 \vee (p_1 \wedge p_2)\right) \Leftrightarrow (p_0 \wedge p_1) \vee (p_0 \wedge p_2)$$
$$\neg(p_0 \wedge p_1) \Leftrightarrow (\neg p_0 \vee \neg p_1)$$

ודה-מורגן הופך את $\wedge \to \vee$ וגם $\vee \to \wedge$.

1. $\left(p_1 \to (p_2 \to p_1)\right)$
2. $\left(\left(p_1 \to (p_2 \to p_3)\right) \to \left((p_1 \to p_2) \to (p_1 \to p_3)\right)\right)$
3. $\left(\left((p_1 \to F) \to F\right) \to p_1\right)$

הגדרה נאמר שפסוק α נובע לוגית מפסוק β (או β גורר לוגית את α) ונסמן $\beta \vDash \alpha$ אם כל השמה שמספקת β, מספקת את α.
דוגמא:

$$(p_0 \wedge p_1) \vDash p_0$$

p_0	p_1	$(p_0 \wedge p_1)$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	**1**

טענה: $\beta \vDash \alpha$ אמ"מ $\vDash \beta \to \alpha$.
הוכחה:
כיוון ראשון, נניח $\beta \vDash \alpha$
נניח בשלילה שקיימת השמה z כך ש $\bar{z}(\beta \to \alpha) = 0$.
לפי $TT \to$ נובע כי $\bar{z}(\beta) = 1$ ו $\bar{z}(\alpha) = 0$.
בסתירה להנחה ש $\beta \vDash \alpha$.
כיוון שני, נניח $\vDash (\beta \to \alpha)$
נניח בשלילה ש $\beta \nvDash \alpha$ ולכן קיימת השמה z כך ש $\bar{z}(\beta) = 1$ וגם $\bar{z}(\alpha) = 0$.
לפי $TT \to$ נובע כי $\bar{z}(\beta \to \alpha) = 0$ בסתירה לכך ש $(\beta \to \alpha)$ טאוטולוגיה.

הגדרה נאמר שפסוק α הוא סתירה ונסמן $\alpha \vDash$ אם לכל השמה z מתקיים $\bar{z}(\alpha) = 0$.

$$F, \neg T, p_0 \wedge \neg p_0$$

α טאוטולוגיה $\Leftrightarrow$ $\neg\alpha$ סתירה.
הגדרה נאמר שפסוק α ספיק אם קיימת השמה z כך ש $\bar{z}(\alpha) = 1$.

איך נראה על פסוק מהו?

	ספיק	סתירה	טאוטולוגיה
להראות כן	השמה מספקת	טבלת אמת או הנחה מילולית	טבלת אמת או הנחה מילולית
להראות לא	טבלת אמת או הנחה מילולית	השמה מספקת	מראים השמה לא מספקת

הגדרה נאמר שהשמה z מספקת קבוצת פסוקים X ונסמן $z \vDash X$ אם לכל פסוק $\alpha \in X$ מתקיים כי $\bar{z}(\alpha) = 1$.
הגדרה נאמר שפסוק α נובע לוגית מקבוצת הפסוקים X ונסמן $X \vDash \alpha$ אם לכל השמה z שמספקת את X מספקת את α.

דוגמא:

$$\{\neg p_0 \to \neg p_1, p_1\} \vDash p_0$$

p_0	p_1	$\neg p_0$	$\neg p_1$	$\neg p_0 \to \neg p_1$
0	0	1	1	1
0	1	1	0	0
1	0	0	1	1
1	1	0	0	1

מוגדר גם עבור אינסופיות, אבל ההוכחה שונה.
הגדרה קבוצת פסוקים X תקרא ספיקה, אם קיימת השמה z שמספקת אותה.

<u>שקילות לוגית</u>

$$(p_0 \vee \neg p_0) \text{ with } \neg(p_0 \wedge \neg p_0)$$

הגדרה נאמר שפסוק α שקול לוגית לפסוק β ונסמן $\alpha \equiv \beta$ אם כל השמה שמספקת α מספקת β ולהיפך.
כמו לדרוש $\alpha \vDash \beta$ וגם $\beta \vDash \alpha$.

טענה:

$$\vDash \alpha \Leftrightarrow \beta \Leftrightarrow \alpha \equiv \beta$$

בבית.

איך נראה שמערכת קשרים שלמה?
דרך ראשונה – באופן ישיר. נבנה לכל טבלה פסוק.
דרך שנייה – להתבסס על מערכת הידועה כשלמה, ולהראות שניתן להביע כל קשר במערכת הישנה באמצעות פסוק במערכת החדשה.

לדוגמא: נראה $\{\neg,\wedge\}$ שלמה. נתבסס על $\{\neg,\wedge,\vee\}$ ועל השקילות $\alpha\vee\beta\equiv\neg(\neg\alpha\wedge\neg\beta)$.
בהינתן טבלת אמת נבנה עבורה פסוק במערכת הישנה ובאמצעות השקיפויות נתרגם למערכת החדשה. שימושים בנביעה לוגית:

(I) $X\cup\{\alpha\}\vDash\beta$ וגם $X\{\neg\alpha\}\vDash\beta$ אז $X\vDash\beta$.
הוכחה:
נניח ש $X\cup\{\alpha\}\vDash\beta$ ו $X\cup\{\neg\alpha\}\vDash\beta$ נראה ש $X\vDash\beta$.
תהי z השמה. נראה שאם $z\vDash X$ אז $z\vDash\beta$. נבחין בין שני מקרים:
- אם $z\vDash\alpha$ לפי ההנחה $X\cup\{\alpha\}\vDash\beta$ מתקיים $z\vDash\beta$.
- אחרת $z\nvDash\alpha$ כלומר $\bar{z}(\alpha)=0$ לפי $\neg TT$ נובע כי $\bar{z}(\neg\alpha)=1$ לפי ההנחה $X\cup\{\neg\alpha\}\vDash\beta$ מתקיים /$z\vDash\beta$

(II) אם $\{\gamma,\neg\alpha\}\vDash\beta$ ו $\{\gamma,\neg\alpha\}\vDash\neg\beta$ אז $\gamma\vDash\alpha$. בבית.
(III) אם $\{\gamma,\neg\alpha\}\vDash\alpha$ אז $\gamma\vDash\alpha$. מקרה פרטי של II עבור $\beta=\alpha$.
(IV) $\Sigma\cup\{\alpha,\alpha\to\beta\}\vDash\beta$ (כאשר Σ קבוצת פסוקים).
(V) תהיינה Σ_1,Σ_2 קבוצות פסוקים. אם $\Sigma_1\subseteq\Sigma_2$ אזי לכל פסוק α, אם $\Sigma_1\vDash\alpha$ אז $\Sigma_2\vDash\alpha$.
הוכחה:
נראה שאם $\Sigma_1\vDash\alpha$ אז $\Sigma_2\vDash\alpha$.
תהי z השמה. נראה שאם $z\vDash\Sigma_2$ אז $z\vDash\alpha$.
אם $z\vDash\Sigma_2$ אז z מספקת את כל הפסוקים ב Σ_2. מאחר ו $\Sigma_1\subseteq\Sigma_2$, אז z מספקת את כל הפסוקים ב Σ_1. לפי ההנחה $\Sigma_1\vDash\alpha$ ולכן $z\vDash\alpha$.

<u>צורות נורמאליות</u>

NNF – Negation Normal Form

הקבוצה מוגדרת באינדוקציה.
בסיס:

$$\{p_i\mid i\in\mathbb{N}\}\cup\{\neg p_i\mid i\in\mathbb{N}\}\cup\{T,F\}$$

סגור:

$$\{F_\wedge,F_\vee\}$$

דוגמאות:

$$(p_0\vee\neg p_5)\wedge(\neg p_3)$$
$$\cancel{\neg(p_0\vee\neg p_5)}$$

נראה שלכל פסוק ניתן למצוא פסוק שקול בצורת NNF.
CNF – הגדרה בשני שלבים.
שלב ראשון, מגדירים:
<u>Disj:</u>
בסיס:

$$\{p_i\mid i\in\mathbb{N}\}\cup\{\neg p_i\mid i\in\mathbb{N}\}\cup\{T,F\}$$

סגור:

$$\{F_\vee\}$$

מתקיים:

$$(\neg p_0)\vee(\neg p_5)\vee F\vee p_8$$
$$\cancel{\neg(p_0\vee p_5)}$$

נגדיר את הקבוצה CNF באינדוקציה:
בסיס: Disj
סגור: $\{F_\wedge\}$
דוגמאות:

$$(p_1\vee p_5)\wedge(p_3\vee F)$$
$$\cancel{((p_3\vee p_5)\wedge p_8)\vee p_4}$$

משפט ה CNF:
לכל פסוק α קיים פסוק α' מצורת CNF כך ש $\alpha\equiv\alpha'$ וב α' וב α אותם אטומים.

DNF:
ההגדרה בשני שלבים.
בשלב הראשון Conj:

$$\{p_i \mid i \in \mathbb{N}\} \cup \{\neg p_i \mid i \in \mathbb{N}\} \cup \{T, F\}$$

סגור:

$$\{F_\wedge\}$$

שלב שני נגדיר DNF:
בסיס: Conj
סגור: $\{F_\vee\}$.

$$(p_0 \wedge \neg p_1 \wedge p_2)$$
$$(p_0 \wedge \neg p_1 \wedge p_2) \vee (p_0 \wedge p_1 \wedge p_2)$$

משפט ה DNF:
לכל פסוק α קיים פסוק α' מצורת DNF כך ש $\alpha \equiv \alpha'$ וב α' וב α אותם אטומים.

פסוקים מסוג DNF ראינו בהוכחת השלמות של מערכת הקשרים של תחשיב הפסוקים.
ראינו בעצם שלכל טבלת אמת קיים פסוק מצורת DNF שמממש אותה.
למעשה הוכחנו את משפט ה DNF. בהינתן פסוק נבנה עבורו טבלת אמת, ועבור טבלת האמת נבנה פסוק DNF שמממש אותה.

צורות נורמאליות
הגדרנו NNF
בסיס:

$$\{p_i \mid i \in \mathbb{N}\} \cup \{\neg p_i \mid i \in \mathbb{N}\} \cup \{T, F\}$$

סגור:

$$F_\wedge, F_\vee$$

משפט ה NNF:
לכל פסוק α קיים פסוק α' כך ש α' מצורת NNF ו $\alpha \equiv \alpha'$.
השיטה
מציירים עץ ודוחפים $\neg$ למטה לכיוון העלים.
נשתמש בשקיפויות:

$$\neg(\rho \vee \xi) \equiv \neg\rho \wedge \neg\xi$$
$$\neg F \equiv T$$
$$\neg T \equiv F$$
$$\neg\neg\rho = \rho$$
$$(\rho_1 \to \rho_2) \equiv \big((\neg\rho_1) \vee \rho_2\big)$$

דוגמא:

$$\neg\Big(\big((p_0 \vee p_1) \to p_2\big) \wedge (p_1 \vee p_5)\Big) \equiv \neg\big((\neg(p_0 \vee p_1) \vee p_2) \wedge (p_1 \vee \neg p_5)\big) \equiv$$

דה מורגן:

$$\equiv \big(\neg(\neg(p_0 \vee p_1) \vee p_2)\big) \wedge \big(\neg(p_1 \vee \neg p_5)\big)$$

DNF
בסיס Conf

סגור $F_\wedge$
משפט ה DNF
לכל פסוק α קיים פסוק שקול לוגית α' כך ש α' מצורת DNF ול α' ו α יש אותם אטומים.
ראינו שלכל טבלת אמת ניתן לבנות פסוק מצורת DNF הממש אותה.
בהינתן פסוק α -> נבנה ל α טבלת אמת ואז נממש אותה בפסוק DNF.

<u>מערכת הוכחה פורמאלית</u>
הוכחה – מושג סינטקטי.
איך מגדירים מערכת הוכחה?
I) בוחרים אקסיומות.
קל לוודא מי אקסיומה.
II) כללי הסק – כללים שבאמצעותם נתקדם בהוכחה.
III) קבוצת המשפטים הפורמאליים:
כללי הסק אקסיומות X
הוכחה פורמאלית היא סדרת יצירה במבנה.
סדרת הוכחה עבור פסוק α היא סדרה סופית $a_1, \dots \alpha_n$ כך ש:
1. $\alpha_n = \alpha$
2. כל פסוק α_i $1 \le i \le n$ הוא אקסיומה או שהתקבל מפסוקים קודמים בסדרה על ידי אחד מכללי ההסק.

נאמר ש α **יכיח** אם לכל α יש סדרת הוכחה, נסמן $\vdash \alpha$.

<u>מערכת הוכחה לתחשיב הפסוקים:</u>
נגדיר קבוצת אקסיומות (למעשה 3 תבניות).
δ הוא אקסיומה אם קיימים פסוקים α, β, γ כך ש δ הוא מאחת מהצורות הבאות:
1. $\big(\alpha \to (\beta \to \alpha)\big)$
2. $\Big(\big(\alpha \to (\beta \to \gamma)\big) \to \big((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma)\big)\Big)$
3. $\Big(\big((\alpha \to F\,) \to F\,\big) \to \alpha\Big)$

לדוגמה:
$$A1{:}\,\big(p_0 \to (p_1 \to p_0)\big)$$
$$\Big(\big((p_0 \to F) \to F\big) \to F\Big) \to (p_0 \to F)$$

כלל ההסק:
$$MP\ \frac{\alpha, \alpha \to \beta}{\beta}$$

קבוצת המשפטים הפורמאליים:
$$X\big(\text{אקס}, \{MP\}\big)$$

משתמשים ב $\{\to, F\}$ מערכת פעולות שלמה.
מסמנים $\vdash \alpha$.
דוגמה, נראה לכל פסוק α כי:
$$\vdash \alpha \to \alpha$$

נסמן ב β את $(\alpha \to \alpha)$.
1. $\big(\alpha \to (\beta \to \alpha)\big) \to \big((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \alpha)\big)$ A2
2. $\big(\alpha \to (\beta \to \alpha)\big)$ A1
3. $\big((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \alpha)\big)$ MP 1,2
   $\big(\alpha \to (\alpha \to \alpha)\big) \to (\alpha \to \alpha)$
4. $\big(\alpha \to (\alpha \to \alpha)\big)$ A1
5. $(\alpha \to \alpha)$ MP 3,4

<u>הוכחה מתוך הנחות</u>
הבסיס: אקס' + הנחות
בהינתן קבוצת פסוקים Σ, קבוצת המסקנות של Σ (מסומת $Ded(\Sigma)$)
$$Ded(\Sigma) = X\big(\Sigma \cup \text{אקס}, \{MP\}\big)$$
נסמן ב $\Sigma \vdash \alpha$ את הטענה $\alpha \in Ded(\Sigma)$.
סדרת הוכחה עבור α מתוך קבוצת הנחות Σ. היא סדרה סופית $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ כך ש:
1. $\alpha_n = \alpha$

2. כל פסוק בסדרה α_i $1 \le i \le n$ הוא אקסיומה או הנחה או התקבל מפסוקים קודמים על ידי MP.

<u>דוגמא</u>

$$\Sigma = \{\alpha \to \beta, \beta \to \gamma\}$$

צ"ל $\Sigma \vdash (\alpha \to \gamma)$

1. $(\beta \to \gamma) \to \big(\alpha \to (\beta \to \gamma)\big)$ A1
2. $(\beta \to \gamma)$ הנחה
3. $\big(\alpha \to (\beta \to \gamma)\big)$ MP 1,2
4. $\big(\alpha \to (\beta \to \gamma)\big) \to \big((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma)\big)$ A2
5. $(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma)$ MP
6. $(\alpha \to \beta)$ הנחה
7. $(\alpha \to \gamma)$ MP

<u>דוגמא</u>

$$\Sigma = \{\alpha, \alpha \to F\}$$

נראה כי לכל פסוק β מתקיים:

$$\Sigma \vdash \beta$$

1. $\alpha \to F$ הנחה
2. α הנחה
3. F MP
4. $F \to \big((\beta \to F) \to F\big)$ A1
5. $(\beta \to F) \to F$ MP
6. $\big((\beta \to F) \to F\big) \to \beta$ A3
7. β MP

<u>תכונות של הוכחה מתוך הנחות:</u>

X,Y קבוצות פסוקים, α, β פסוקים.

<u>טענה 1</u>

אם $\alpha \in X$ אז $X \vdash \alpha$

1. α הנחה

<u>טענה 2</u>

מונוטוניות של מערכת ההוכחה

(מוסיפים הנחות, מוסיפים מסקנות)

אם $X \subseteq Y$ אזי לכל פסוק α אם $X \vdash \alpha$ אז $Y \vdash \alpha$.

סדרת ההוכחה של α מתוך X היא גם סדרת הוכחה מתוך Y.

<u>טענה 3</u>

אם לכל פסוק $\alpha \in X$ מתקיים $Y \vdash \alpha$ אזי לכל פסוק β אם $X \vdash \beta$ אז $Y \vdash \beta$.

<u>טענה 4</u>

אם $x \vdash \big(\alpha \to (\beta \to \gamma)\big)$ ו $X \vdash (\alpha \to \beta)$ אז $X \vdash (\alpha \to \gamma)$.

אם הגרף G קשיר, אזי מתקיים...

נניח ש G קשיר, ונראה...

$$\Sigma \vdash \alpha \to \beta \Leftrightarrow \Sigma \cup \{\alpha\} \vdash \beta$$

<u>משפט הדדוקציה:</u>

לכל קבוצת פסוקים X ולכל זוג פסוקים α, β

$$\Sigma \cup \{\alpha\} \vdash \beta \Leftrightarrow \Sigma \vdash \alpha \to \beta$$

כיוון ראשון מיידי (ימין לשמאל)

$X \vdash \alpha \to \beta$ ולכן על סמך המונוטוניות $X \cup \{\alpha\} \vdash \alpha \to \beta$.

$$X \cup \{\alpha\} \vdash \alpha$$

ע"י MP $X \cup \{\alpha\} \vdash \beta$.

כיוון שני:

צ"ל: אם $X \cup \{\alpha\} \vdash \beta$ אז $X \vdash \alpha \to \beta$

צ"ל: לכל פסוק β כך ש $X \cup \{\alpha\} \vdash \beta$ מתקיים $X \vdash \alpha \to \beta$

לכל פסוק β ששייך לקבוצות המסקנות של $X \cup \{\alpha\}$ מתקיים $X \vdash \alpha \to \beta$.

קבוצת המסקנות באינדוקציה.

בסיס $X \cup \{\alpha\} \cup$ אקס

סגור MP.

לכל פסוק β בקבוצה

$$X_{\text{Induction}}\ (X \cup \{\alpha\} \cup \text{אקס}, MP)$$

מתקיים $X \vdash \alpha \to \beta$.

נוכיח באינדוקציה על המבנה

$$X_{\text{Induction}}\ (X \cup \{\alpha\} \cup \text{אקס}, MP)$$

את התכונה (עבור פסוק β) $X \vdash \alpha \to \beta$.

<u>בסיס:</u>

נפריד למקרים:

1. β היא אקסיומה.
   נראה $X \vdash \alpha \to \beta$

I) $(\beta \to (\alpha \to \beta)$ A1

II) β אקסיומה

III) $(\alpha \to \beta)$

2. β היא הנחה מ X. $\beta \in X$.

I) $(\beta \to (\alpha \to \beta)$ A1

II) β הנחה

III) $(\alpha \to \beta)$ MP

3. $\beta = \alpha$
   צ"ל $X \vdash \alpha \to \alpha$
   ראינו ש $\vdash (\alpha \to \alpha)$ לפי המונוטוניות $X \vdash \alpha \to \alpha$.

<u>סגור:</u> MP

אם γ מקיימת את התכונה $\gamma \to \beta$ מקיימת את התכונה, אז β מקיימת את התכונה.

$$MP\frac{\gamma, \gamma \to \beta}{\beta}$$

עבור γ: $X \vdash \alpha \to \gamma$

עבור $\gamma \to \beta$: $X \vdash \alpha \to (\gamma \to \beta)$

צ"ל: $X \vdash (\alpha \to \beta)$

לפי טענה 4 מקודם $X \vdash \alpha \to \beta$

ראינו שלכל β שיכיח מ $X \cup \{\alpha\}$ מתקיים $X \vdash \alpha \to \beta$.

<u>מסקנה מתכונת המונוטוניות:</u>

אם $\vdash \alpha$ אז לכל קבוצה X: $X \vdash \alpha$.

דוגמאות לשימושים בדדוקציה:

1. $\vdash \alpha \to \alpha$.
   לפי משפט הדדוקציה מספיק שנראה $\{\alpha\} \vdash \alpha$.
   לפי טענה 1.
2. לכל פסוק α:

$$\{\alpha\} \vdash \big((\alpha \to F) \to F\big)$$

לפי משפט הדדוקציה מספיק שנראה

$$\{\alpha, \alpha \to F\} \vdash F$$

I) α הנחה

II) $\alpha \to F$ הנחה
III) F MP

3. $\{(\alpha \to \beta)\} \vdash (\beta \to F) \to (\alpha \to F)$
לפי משפט הדדוקציה מספיק שנוכיח
$\{(\alpha \to \beta), \beta \to F\} \vdash \alpha \to F$
שוב לפי משפט הדדוקציה מספיק שנראה
$\{\alpha \to \beta, \beta \to F, \alpha\} \vdash F$

I) α הנחה
II) $\alpha \to \beta$ הנחה
III) b MP
IV) $\beta \to F$ הנחה
V) F MP

<u>משפט הדיכוטומיה</u>
אם $\Sigma \setminus \cup\{\alpha\} \vdash \beta$ ו $\Sigma\{\alpha \to F\} \vdash \beta$ אז $\Sigma \vdash \beta$.

<u>עקביות של קבוצת הנחות:</u>
הגדרה קבוצת פסוקים X היא עקבית אם $X \nvdash F$.

משפט תהי X קבוצת פסוקים.
X קבוצה עקבית אמ"מ כל תת קבוצה סופית של X עקבית.
שקול להוכיח:
X לא עקבית אמ"מ קיימת ל X תת קבוצה סופית לא עקבית.

$\Rightarrow$ כיוון ראשון
נניח שקיימת ל X תת קבוצה סופית לא עקבית. קיימת $D \subseteq X$ סופית $D \vdash F$.
לפי המונוטוניות $X \vdash F$ ולכן לא עקבית
$\Leftarrow$ כיוון שני
נניח ש X לא עקבית ונראה כי קיימת ל X תת-קבוצה סופית לא עקבית.
X לא עקבית ולכן $X \vdash F$.
כלומר קיימת ל F סדרת הוכחה סופית מתוך X.
נגדיר את D להיות אוסף כל ההנחות בהן השתמשנו בהוכחת F מתוך X.
- D קבוצה סופית מאחר וסדרת היצירה סופית.
- $D \subseteq X$ כי מכילה רק הנחות מ X.
- $D \vdash F$ - ע"י אותה סדרת הוכחה.

לכן מצאנו תת קבוצה סופית של X שאינה עקבית.

<u>העקביות של האקסיומות של תחשיב הפסוקים</u>
למה חשוב לשאול?
אם קבוצת האקסיומות לא עקבית אין טעם בדיון על מה יכיח ומה לא?
שכן הכל יכיח.
יעניין אותנו לשאול האם יש בכלל קבוצה עקבית?
שתי השאלות שקולות. קבוצת האקסיומות עקבית שקול לשאול "האם ϕ עקבית".
אם ϕ עקבית – קיימת קבוצה עקבית.
אם ϕ לא עקבית אז כל קבוצה לא עקבית.
נרצה להראות שקבוצות האקסיומות עקבית, כלומר $\nvdash F$.
כלומר נרצה להראות ש $F \notin X(\text{אקס}, MP)$.
נראה תכונה שכל הפסוקים היכיחים מקיימים ו F לא מקיים.

<u>טענה:</u> הקבוצה הריקה עקבית. כלומר $\nvDash F$
תכונה: כל פסוק יכיח הוא טאוטולוגיה.
משפט הנאותות הצר:
לכל פסוק α אם $\vdash \alpha$ אז $\vDash \alpha$.

משפט הנאותות הרחב:
לכל קבוצת הנחות Σ ולכל פסוק α, אם $\Sigma \vdash \alpha$ אז $\Sigma \vDash \alpha$.
המשפט הצר מתקבל עבור $\Sigma = \phi$.

מסקנה: קיימת קבוצה עקבית.

הוכחת משפט הנאותות הרחב:
תהי Σ קבוצת פסוקים. נוכיח כי לכל פסוק α אם $\Sigma \vdash \alpha$ אז $\Sigma \vDash \alpha$.
תהי Σ קבוצת פסוקים. נוכיח כי לכל פסוק α כך ש $\Sigma \vdash \alpha$ מתקיים $\Sigma \vDash \alpha$.
צ"ל: לכל פסוק α בקבוצת הפסוקים היכיחים Σ מתקיים כי $\Sigma \vDash \alpha$.
נוכיח באינדוקציה על קבוצת המסקנות של Σ את התכונה: $\Sigma \vDash \alpha$.
הוכחה:
<u>בסיס:</u>
1. α אקסיומה. צ"ל $\Sigma \vDash \alpha$.
ראינו בבית שכל האקסיומות טאוטולוגיות ולכן הן נובעות לוגית מכל קבוצה.
כל השמה מספקת את α ובפרט כל השמה שמספקת את Σ מספקת את α).
2. $\alpha \in \Sigma$ הנחה. צ"ל $\Sigma \vDash \alpha$.
כל השמה שמספקת את Σ, מספקת על פי ההגדרה את כל פסוקי Σ ובפרט את α.

<u>צעד:</u> נניח ש $\beta, \beta \to \alpha$ מקיימים את התכונה ונראה ש α מקיימת את התכונה.
הנחת האינדוקציה:
$$\Sigma \vDash \beta$$
$$\Sigma \vDash \beta \to \alpha$$
צ"ל:
$$\Sigma \vDash \alpha$$
תהי z השמה שמספקת את Σ.
לפי הנחת האינדוקציה $z \vDash \beta$ ו $z \vDash \beta \to \alpha$.
לפי $TT_{\to}$ נקבל $z \vDash \alpha$.

משפט שקול לנאותות:
לכל קבוצת פסוקים Σ אם Σ ספיקה אז Σ עקבית.
<u>הוכחה:</u> תהי Σ קבוצה ספיקה, נוכיח ש Σ עקבית.
נניח בשלילה ש Σ לא עקבית. זאת אומרת $\Sigma \vdash F$.
לפי משפט הנאותות $\Sigma \vDash F$.
F סתירה לכן אף השמה לא מספקת את F ומכאן שלא תיתכן השמה שמספקת את Σ.
בסתירה לכך ש Σ ספיקה.

עד כאן יש:

סינטקס		סמנטיקה
$\vdash \alpha$	צר →	$\vDash \alpha$
$\Sigma \vdash \alpha$	רחב →	$\Sigma \vDash \alpha$
Σ עקבית	← משפט שקול	Σ ספיקה

המטרה בהמשך להראות את החיצים בכיוון השני.

הגדרה קבוצת פסוקים Σ תקרא עקבית מקסימאלית אם Σ עקבית ולכל פסוק α:
$\Sigma \vdash \alpha$ או $\Sigma \vdash \alpha \to F$.

טענה תהי X קבוצה עקבית. קיימת קבוצה עקבית מקסימאלית Y כך ש $X \subseteq Y$.

<u>הרעיון:</u>

נעשה רשימה של כל הפסוקים. ועבור כל פסוק אם לקבוצה אין דעה עליו, נוסיף את α או $\alpha \to F$. הבעיה – צריך להיזהר לא לפגוע בעיקביות.

הוכחה:

נכין רשימה של קבוצת הפסוקים $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$.

(ניתן להכין בת מניה).

נגדיר סדרת הרחבות עבור X.

$$X_0 = X$$

בשלב ה n דואגים לפסוק α_{n-1} ומגדירים X_n.

$$X_0 = X \subseteq X_1 \subseteq X_2 \subseteq X_3 \subseteq \cdots$$

בהינתן X_{n-1}, נבדוק אם $X_{n-1} \cup \{\alpha_{n-1}\}$ עקבית, נגדיר

$$X_n = X_{n-1} \cup \{\alpha_{n-1}\}$$

אחרת נגדיר

$$X_n = X_{n-1} \cup \{a_{n-1} \to F\}$$

לדוגמה

אם $X_0 \cup \{\alpha_0\}$ עקבית אז $X_1 = X_0 \cup \{\alpha_0\}$

אחרת $X_1 = X_0 \cup \{a_0 \to F\}$.

וכך הלאה.

נגדיר

$$Y = \bigcup_{n=0}^{\infty} X_n$$

נראה ש Y עונה על הדרישות.

נראה: Y עקבית מקסימאלית ו $X \subseteq Y$.

1. נראה $X \subseteq Y$:
   $Y = \bigcup_{n=0}^{\infty} X_n$ ולפי ההגדרה $X = X_0 \subseteq Y$.
2. נראה כי לכל n הקבוצה X_n היא עקבית.
   הוכחה באינדוקציה על הטבעיים.
   <u>בסיס:</u> $n = 0$
   $X_0 = X$ עקבית על פי ההנחה.
   <u>צעד:</u> נניח X_n עקבית ונוכיח X_{n+1} עקבית.
   - אם $X_{n+1} = X_n \cup \{\alpha_n\}$ לפי ההגדרה $X_n \cup \{\alpha_n\}$ עקבית.
   - אחרת $X_{n+1} = X_n \cup \{\alpha_n \to F\}$ לפי ההגדרה $X_n \cup \{\alpha_n\}$ לא עקבית. כלומר $X_n \cup \{\alpha_n\} \vdash F$.

   נניח בשלילה ש $X_n \cup \{\alpha_n \to F\}$ לא עקבית. כלומר $X_n \cup \{\alpha_n \to F\} \vdash F$.
   לפי משפט הדיכוטומיה $X_n \vdash F$, בסתירה להנחת האינדוקציה.
3. נראה כי Y קבוצה עקבית.
   הראינו ב 2 כי לכל n מתקיים כי X_n עקבית.
   ראינו שמספיק להראות שכל תת-קבוצה סופית של Y עקבית.
   תהי D תת-קבוצה $D \subseteq Y$ סופית.

$$Y = \bigcup_{n=0}^{\infty} X_n$$

$$D = \{B_1, \ldots, B_k\}$$

לכל i קיים m כך ש $B_i \in X_{m_i}$ (אחרת $B_i \notin Y$).

נגדיר max האינדקס המקסימאלי בין הקבוצות $B_i \in X_{m_i}, B_i \in D, \max = \max\{m_i\}$.

מאחר והקבוצות מכילות זו את זו אזי $D \subseteq X_{\max}$.

ראינו ב 2 ש X_{max} עקבית ומאחר ו D תת-קבוצה של קבוצה עקבית – D עקבית.
ראינו שלכל $D \subseteq Y$ סופית, D עקבית ולכן Y עקבית.

4. נראה ש Y עקבית מקסימאלית.
ראינו ב 3 ש Y עקבית.
צ"ל: לכל פסוק α מתקיים $Y \vdash \alpha$ או $Y \vdash \alpha \to F$.
יהי α פסוק. α הופיע ברשימת הפסוקים $\alpha = \alpha_n$.
לפי ההגדרה:
- או $X_{n+1} = X_n \cup \{\alpha\}$ ואז $X_{n+1} \vdash \alpha$.
- או $X_{n+1} = X_n \cup \{\alpha \to F\}$ ואז $X_{n+1} \vdash \alpha \to F$.

כלומר $X_{n+1} \vdash \alpha$ או $X_{n+1} \vdash \alpha \to F$
לפי המונוטוניות, מאחר ו $X_{n+1} \subseteq Y$ אז $Y \vdash \alpha$ או $Y \vdash \alpha \to F$.
ראינו Y עקבית מקסימאלית שמכילה X.

<u>טענה:</u> תהי Y קבוצה עקבית מקסימאלית, אזי לכל β, γ מתקיים:
$$Y \vdash \beta \to F \text{ or } Y \vdash \gamma \Leftrightarrow Y \vdash \beta \to \gamma$$
האם נכון לכל קבוצה Y?
ראינו $\vdash p_0 \to p_0$.
היה צריך להיות $\vdash p_0$ או $\vdash p_0 \to F$.
יודעים ש $\not\models p_0$ ו $\not\models p_0 \to F$ ולכן על פי הנאותות $\nvdash p_0$ ו $\nvdash p_0 \to F$.
בבית – תהי Y קבוצה עקבית אם:
לכל β, γ מתקיים:
$$Y \vdash \beta \to F \text{ or } Y \vdash \gamma \Leftrightarrow Y \vdash \beta \to \gamma$$
אז Y עקבית מקסימאלית.

<u>הוכחה</u>
כיוון ראשון:
נניח $Y \vdash \beta \to \gamma$ ונראה $Y \vdash \gamma$ או $Y \vdash \beta \to F$.
נניח בשלילה ש
$$Y \nvdash \beta \to F \text{ and } Y \nvdash \gamma$$
היות ש Y עקבית מקסימאלית נובע כי:
$$Y \vdash \beta \text{ and } Y \vdash \gamma \to F$$
1. $Y \vdash \beta \to \gamma$
2. $Y \vdash \beta$
3. $Y \vdash \gamma \to F$

ע"י MP על 1 ו 2 נקבל $Y \vdash \gamma$.
ע"י MP עם 3 נקבל $Y \vdash F$ בסתירה לעקביות.

כיוון שני:
נניח $Y \vdash \beta \to F$ או $Y \vdash \gamma$ ונראה $Y \vdash \beta \to \gamma$.
1. אם $Y \vdash \beta \to F$ ראינו $\{\beta, \beta \to F\} \vdash \gamma$.
על פי הדדוקציה
$$\{\beta \to F\} \vdash \beta \to \gamma$$
שוב על פי הדדוקציה
$$\vdash (\beta \to F) \to (\beta \to \gamma)$$
לפי המונוטוניות
$$Y \vdash (\beta \to F) \to (\beta \to \gamma)$$
על ידי MP
$$Y \vdash \beta \to F$$
ולכן
$$Y \vdash \beta \to \gamma$$

2. אם $Y \vdash \gamma$ נראה $Y \vdash \beta \to \gamma$.
אקסיומה 1

$$Y \vdash \gamma \to (\beta \to \gamma)$$

ע"י MP נקבל

$$Y \vdash (\beta \to \gamma)$$

<u>ספיקות של קבוצות עקביות מקסימאליות</u>

<u>למה:</u> Y קבוצה עקבית מקסימאלית, אז Y קבוצה ספיקה.
<u>הוכחה:</u> נגדיר השמה z באופן הבא:
לכל i

$$Y \vdash p_i \Leftrightarrow z(p_i) = 1$$

צ"ל: $z \vDash Y$ כלומר לכל α אם $\alpha \in Y$ אז $z \vDash \alpha$.
נוכיח טענה חזקה יותר:
לכל פסוק α:

$$Y \vdash \alpha \Leftrightarrow z \vDash \alpha$$

למה זה מספיק?
לכל פסוק $\alpha \in Y$ מתקיים $Y \vdash \alpha$ ולכן לפי הטענה החזקה $z \vDash \alpha$.
טענת העזר עוסקת במערכת ההוכחה ולכן יש להוכיח אותה רק עבור פסוקים $F, \to$.
הוכחה באינדוקציה על מבנה הפסוקים ב $F, \to$.
תכונה: $Y \vdash \alpha \Leftrightarrow z \vDash \alpha$.
<u>בסיס:</u>

1. $\alpha = F$
   $Y \nvdash F$ - Y עקבית.
   $z \nvDash F$ - F סתירה.
2. $\alpha = p_i$ - פסוק אטומי.
   לפי ההגדרה $Y \vdash p_i \Leftrightarrow z(p_i) = 1$ וצד שמאל שקול ל $z \vDash p_i$.

<u>צעד:</u>
הנחת האינדוקציה: נניח נכונות עבור β, γ ונוכיח עבור $\alpha = (\beta \to \gamma)$.
כיוון ראשון:
נניח $Y \vdash \beta \Leftrightarrow z \vDash \beta$
וגם $Y \vdash \gamma \Leftrightarrow z \vDash \gamma$
נוכיח

$$Y \vdash \alpha \Leftrightarrow z \vDash \alpha$$

$(z \vDash \beta \to \gamma)$ אז לפי $TT_{\to}$ מתקיים $z \nvDash \beta$ או $z \vDash \gamma$
לכן לפי הנחת האינדוקציה $T \nvdash \beta$ או $T \vdash \gamma$.
לכן Y עקבית מקסימאלית $Y \vdash \beta \to F$ או $Y \vdash \gamma$.
לכן לפי טענת העזר $Y \vdash \beta \to \gamma$.
כיוון שני:

לפי טענת העזר $Y \vdash \beta \to F$ או $Y \vdash \gamma$.
היות ש Y עקבית נובע כי $Y \nvdash \beta$ או $Y \vdash \gamma$.
לפי הנחת האינדוקציה $z \nvDash \beta$ או $z \vDash \gamma$.
לפי $TT_{\to}$ נובע כי $z \vDash \beta \to \gamma$.

כלומר, בהינתן עקבית מקסימלית Y בנינו השמה z והראינו ש $z \vDash Y$.
משפט אם X קבוצה עקבית אז X קבוצה ספיקה.
<u>הוכחה</u> תהי X קבוצה עקבית. ראינו שקיימת קבוצה עקבית מקסימאלית כך ש $X \subseteq Y$.
ראינו ש Y ספיקה, קיימת השמה z שלכל $\alpha \in Y$ מתקיים כי $z \vDash \alpha$.
בפרט, z מספקת את כל פסוקי X. לכן $z \vDash X$ ולכן X ספיקה.

הגענו למצב הבא:

סמנטיקה	סינטקס
$\models \alpha$	$\vdash \alpha$
$\Sigma \models \alpha$	$\Sigma \vdash \alpha$
Σ ספיקה	Σ עקבית

שני החיצים העליונים מושלמים על ידי:

משפט השלמות:

תהי Σ קבוצת פסוקים, אזי לכל פסוק α אם $\Sigma \models \alpha$ אז $\Sigma \vdash \alpha$.

<u>הוכחה</u>

$\Sigma \models \alpha$ לכן $\Sigma \cup \{\neg\alpha\}$ לא ספיקה.

לכן $\Sigma \cup \{\alpha \to F\}$ לא ספיקה.

ראינו שכל עקבית היא ספיקה ולכן $\Sigma \cup \{\alpha \to F\}$ לא עקבית.

לכן $\Sigma \cup \{\alpha \to F\} \vdash F$ לפי הגדרה.

לפי הדדוקציה:

$$\Sigma \vdash (\alpha \to F) \to F$$

לפי אקסיומה 3

$$\Sigma \vdash \big((\alpha \to F) \to F\big) \to \alpha$$

לפי MP נקבל

$$\Sigma \vdash \alpha$$

מסקנה:

משפט הקומפקטיות

תהי X קבוצת פסוקים.

X ספיקה $\Leftrightarrow$ כל תת קבוצה סופית של X ספיקה.

נובע מ:

X עקבית $\Leftrightarrow$ כל תת קבוצה של X עקבית.

דוגמא לשימוש – צביעה של גרפים

נתון $G = (V, E)$

$E \subseteq V \times V$ – הקשתות

V - לא בהכרח סופית.

נאמר ש G ניתן לצביעה חוקית בשני צבעים, אם ניתן לצבוע את צמתי הגרף בשני צבעים כך שלא תהיה קשת מונוכרומאטית (שני הקצוות באותו צבע).

נקרא 2-צביע.

טענה: יהי $G = (V, E)$ גרף.

G ניתן לצביעה חוקית בשני צבעים $\Leftrightarrow$ כל תת גרף סופי של G ניתן לצביעה חוקית בשני צבעים.

רוצים לתרגם את הבעיה לפסוקים.

למצוא קבוצה X_G (שתלויה בגרף G)

G הוא גרף 2-צביע $\Leftrightarrow$ X_G ספיקה.

הבניה:

צמתי הגרף – הפסוקים האטומים

הצביעה – ערכי האמת של ההשמה

לכל קשת בגרף (u, v) נרשום פסוק $\alpha_{(u,v)}$ שיאמר ש (u, v) אינה קשת מונוכרומאטית.

$$\alpha_{(u,v)} = p_i \oplus p_v$$
$$(p_u \wedge \neg p_v) \vee (p_v \wedge \neg p_u)$$
$$X_G = \{\alpha_{(u,v)} \mid (u, v) \in E\}$$

טענה: G הוא 2-צביע $\Leftrightarrow$ X_G ספיקה.

<u>סקיצה של ההוכחה</u>

<u>G 2-צביע ולכן קיימת צביעה.</u>
נגדיר השמה לפסוקים האטומים –
F – צומת כחול
T – צומת אדום
השמה z לפי הבניה $z \vDash X_G$

<u>X_G ספיקה ולכן קיימת השמה מספקת.</u>
מההשמה נבנה צביעה.
כחול – צמתים שקיבלו F
אדום – צמתים שקבלו T

נפנה להוכיח:
G 2-צביע $\Leftrightarrow$ כל תת-גרף סופי של G הוא 2-צביע

<u>הוכחה</u>
$\Leftarrow$ כיוון ראשון
אם G 2-צביע אז אותה צביעה מהווה גם צביעה חוקית של כל תת-גרף סופי של G
$\Rightarrow$ כיוון שני
יודעים שכל תת-גרף סופי של G הוא 2-צביע ורוצים להראות ש G 2-צביע
ראינו שמספיק שנראה ש X_G ספיקה.
לפי הקומפקטיות מספיק שנוכיח שכל תת-קבוצה סופית $D \subseteq X_G$ היא ספיקה.
תהי D תת-קבוצה סופית של X_G.

נסמן ב V_D את קבוצת הצמתים המופיעים ב D.
V_D קבוצה סופית. נסמן ב G_D את תת-הגרף של G שצמתיו הם V_D.
G_D הוא תת-גרף סופי ולכן הוא 2-צביע.
לכן X_{G_D} קבוצה ספיקה.
$D \subseteq X_{G_D}$ ולכן ספיקה.
ולכן לפי הקומפקטיות X_G ספיקה.

<u>באופן כללי:</u>
צ"ל: X מקיים α $\Leftrightarrow$ כל חלק סופי של X מקיים α.
1. מתרגמים את הבעיה לפסוקים.
   בונים Σ_X
   Σ_X ספיקה $\Leftrightarrow$ X מקיים α
2. משתמשים בקומפקטיות בזהירות!

<u>גדירות:</u>
השאלה – מה ניתן להביע בתחשיב הפסוקים?

נאמר שקבוצת פסוקים Σ מגדירה את אוסף ההשמות שמספקות אותה.

מסמנים:

$$ASS(\Sigma) = \{z \mid z \vDash \Sigma\}$$

$Mod(\Sigma)$ נקרא קבוצת המודלים של Σ.
Σ מגדירה $ASS(\Sigma)$.
בבית אם $\Sigma_1 \subseteq \Sigma_2$ אז $ASS(\Sigma_2) \subseteq ASS(\Sigma_1)$.

מעניין הכיוון ההפוך.
בהינתן קבוצת השמות K האם קיימת קבוצת פסוקים Σ שמגדירה את K.
כלומר $K = \mathrm{Mod}(\Sigma)$.
אם קיימת קבוצת פסוקים Σ שמגדירה את K נאמר ש K גדירה.

<u>האם קיימות קבוצות השמות לא גדירות?</u>

$\Sigma \to \mathrm{ASS}(\Sigma)$

נראה משיקולי סתירה שיש קבוצות השמות לא גדירות.
פסוקים – $\aleph_0$
קבוצות פסוקים – $2^{\aleph_0}$
השמות – $2^{\aleph_0}$
קבוצות השמות – $2^{2^{\aleph_0}}$
לכן בהכרח קיימות קבוצות השמות שאינן גדירות.

הגדרה נאמר שקבוצת השמות K היא גדירה באופן סופי אם K גדירה ע"י קבוצה סופית של פסוקים.

<u>דוגמאות</u>

1. $K_1 = \phi$
   נראה ש K_1 גדירה.
   צריך למצוא Σ_1 כך ש $\mathrm{Mod}(\Sigma_1) = \{\phi\}$.
   $\{F\}, \{p_0 \wedge \neg p_0\}, \{F, p_0\} \ldots$
   כל קבוצה לא ספיקה.
2. K_2 כל ההשמות.
   נראה ש K_2 גדירה.
   $$\Sigma_2 = \phi$$
   גם כל קבוצה של טאוטולוגיות.
3. $K_3 = \{z_T\}$
   בבית צ"ל שהיא גדירה ע"י $\Sigma_3 = \{p_i \mid i \in \mathbb{N}\}$.
4. K_4 קבוצת כל ההשמות הנותנות T לאטום אחד לכל היותר.
   נראה ש K_4 גדירה.
   השמה נותנת T לאטום אחד לכל היותר, ולכן אין שני אטומים שמקבלים T.
   לכן בין כל שני אטומים לפחות אחד מהם מקבל F.
   עבור p_i, p_j – לפחות אחד קבל F.
   $$(\neg p_i \vee \neg p_j)$$
   נגדיר
   $$\Sigma_4 = \{\neg p_i \vee \neg p_j \mid \forall i \neq j\}$$
   נראה ש
   $$\mathrm{Mod}(\Sigma_4) = K_4$$
   $$z \vDash \Sigma_4 \Leftrightarrow z \in K_4$$
   $$z \nvDash \Sigma_4 \Leftrightarrow z \notin K_4$$
   אם $z \notin K_4$ אז z נותנת T לפחות לשני אטומים שונים. נניח p_k, p_l.
   מכאן $z \nvDash \neg p_k \vee \neg p_l$.
   מאחר ו $\neg p_k \vee \neg p_l \in \Sigma_4$ נקבל $z \nvDash \Sigma_4$.
   אם $z \nvDash \Sigma_4$ אז קיים פסוק $\alpha \in \Sigma_4$ כך ש $\bar{z}(\alpha) = F$.
   מהגדרת Σ_4 נקבל כי α מהצורה $\neg p_k \vee \neg p_l$.
   $$z \nvDash \neg p_k \vee \neg p_l$$
   מטבלאות האמת נקבל כי $z(p_k) = z(p_l) = T$.
   לכן $z \notin K_4$.
5. נגדיר K_{fin} קבוצת כל ההשמות שנותנות T למספר סופי של אטומים.

נראה ש K_{fin} לא גדירה.
נניח בשלילה ש K_{fin} גדירה ותהי Σ הקבוצה המגדירה אותה.
כלומר $ASS(\Sigma) = K_{fin}$.
נבחר $\Sigma' = \{p_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ ונוכיח:
1. $\Sigma \cup \Sigma'$ לא ספיקה.
2. $\Sigma \cup \Sigma'$ ספיקה.

ולכן לא תיתכן Σ כזו.

1. כדי שהשמה z תספק את $\Sigma \cup \Sigma'$ צריך להתקיים:
$$z \vDash \Sigma \text{ and } z \vDash \Sigma'$$
$$z \in ASS(\Sigma) \cap ASS(\Sigma')$$
לפי ההנחה $ASS(\Sigma) = K_{fin}$.
כמו כן $ASS(\Sigma') = \{z_T\}$
ולכן $ASS(\Sigma) \cap ASS(\Sigma') = \phi$ ולכן לא תיתן השמה z שמספקת את $\Sigma \cup \Sigma'$.
2. לפי משפט הקומפקטיות מספיק שנראה שכל תת-קבוצה $D \subseteq \Sigma \cup E'$ ספיקה.
תהי $D \subseteq E \cup E'$ סופית.
נסמן $D_\Sigma = D \cap \Sigma$ וגם $D' = D \cap E'$.
D', D_Σ סופיות וכמו כן $D_\Sigma \cup D' = D$.
(מחפשים השמה שמספקת את $D_\Sigma \cup D'$ כלומר מספקת גם את D_Σ וגם את D')
(מאחר ולא ידוע כלום על Σ, כדי לספק D_Σ נאלץ לספק Σ כולה)
(מחפשים השמה שמספקת את Σ (מ K_{fin}) ומספקת את D')
$D' \subseteq \Sigma'$ קבוצה סופית של אטומים.
נגדיר z' באופן הבא:
$$z'(p_i) = \begin{cases} T & , p_i \in D' \\ F & , else \end{cases}$$
צריך להראות $z' \vDash D$.
לצורך כך נראה $z' \vDash D_\Sigma$ ו $z' \vDash D'$ ומכאן $z' \vDash D_\Sigma \cup D' = D$.
$z' \vDash D_\Sigma$: z' נותנת T רק לאטומים שמופיעים ב D' - קבוצה סופית ולכן $z' \in K_{fin}$.
לכן $z' \vDash \Sigma$ ומכאן $z' \vDash D_\Sigma$.
$z' \vDash D'$.
יהי $\alpha \in D'$ פסוק. נראה ש $z' \vDash \alpha$.
$\alpha = p_i$ לפי ההגדרה של z':
$$z'(p_i) = T$$
ולכן $z' \vDash p_i$, ולכן $z' \vDash D'$
מכאן $z' \vDash D' \cup D_\Sigma = D$.
הראינו שלכל $D \subseteq \Sigma \cup \Sigma'$ סופית מתקיים D ספיקה מכאן לפי הקומפקטיות $\Sigma \cup \Sigma'$ ספיקה.

הנחנו בשלילה שקיימת Σ שמגדירה את K_{fin}. בחרנו Σ' כך שמתקיים:
1. $\Sigma \cup \Sigma'$ לא ספיקה ($D = ASS(\Sigma) \cap ASS(\Sigma')$).
2. $\Sigma \cup \Sigma'$ ספיקה (ע"י קומפקטיות).

ומכאן מסיקים שלא תיתכן Σ כזו.

משפט שלושת התנאים הבאים שקולים:
1. K גדירה באופן סופי.
2. K גדירה ו K^c (המשלימה) גדירה.
3. K גדירה על ידי קבוצה בגודל 1 (ע"י פסוק יחיד).

הוכחה בתרגולים ותרגילי בית.

עידו שמיר
חורף 2009

תחשיב היחסים

תחשיב היחסים הוא אוסף של שפות בעלות מכנה משותף.
שני סוגי סימנים:
I) סימנים לוגיים – משותפים לכל השפות.
II) פרמטרים של השפה.

סימנים לוגיים:
סוגריים, פסיק, קשרים $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow$, כמתים $\forall, \exists$ שוויון, משתנים.
פרמטרים של השפה:
1. סימני קבועים אישיים – מסומנים c_α כאשר α אינדקס מספרי c_7, c_{80}.
2. סימני יחס – מסומנים ב $R_{n,\alpha}$ כאשר n מספר הארגומנטים (הערכיות של היחס) ו α אינדקס מספרי.
$$R_{2,1}, R_{2,2}$$
כאשר ניתן למשל לסמן:
$$R_{2,1} = \leq$$
$$R_{2,2} = <$$
$$R_1(\circ,\circ), R_2(\circ,\circ)$$
3. סימני פונקציה – מסומנים $F_{n,\alpha}$ כאשר n מס' הקלטים ו α אינדקס מספרי
$$F_1(\circ,\circ) = +$$
$$F_2(\circ,\circ) = \cdot$$

מילון – אוסף סימני קבועים, סמני יחס וסימני פונקציה.
כאשר לכל אחד מסימני היחס וסימני הפונקציה ידוע מס' הקלטים.
דוגמאות:
$$\tau = \langle R_1(\circ,\circ), R_2(\circ), F_1(\circ,\circ,\circ), c_0, c_1 \rangle$$
יחס דו מקומי, פונקציה תלת מקומי, יחס חד מקומי, 2 קבועים.

נאמר מילון הוא סופי אם הוא מכיל מספר סופי של סימנים.
נאמר שמילון הוא יחסי אם אינו מכיל סימני פונקציה.

הגדרה אוסף המילים בשפה:
שפה טבעית – נושאים לשיחה.
בונים עליהם משפטים.
שלב ראשון – מי – נושאים לטענות – שמות עצם.
לא ניתן לומר על שם עצם נכון/לא נכון.
שלב שני – בהתבסס על שמות העצם, נגדיר את אוסף הטענות בשפה – נוסחאות.
יהי τ מילון.
הגדרת אוסף שמות העצם
הגדרה באינדוקציה:
בסיס: סימני קבועים מהמילון. משתנים $\{v_i \mid i \in \mathbb{N}\}$
צעד: פעולות, סימני הפונקציה מהמילון.
לכל סימן פונקציה n מקומי מהמילון $F_{n,\alpha}$ קיימת פעולה שמקבלת n שמות עצם $t_1, \dots, t_n$ ומוציאה $F_{n,\alpha}(t_1, \dots, t_n)$.

קיים משפט קריאה יחידה עבור שמות העצם (לאל שם עצם קיים עץ יצירה יחיד).

הגדרת אוסף הנוסחאות
ההגדרה באינדוקציה.
בסיס:

- מילה מהצורה $R_\alpha(t_1, \dots, t_n)$ כאשר $t_1, \dots, t_n$ שמות עצם מעל המילון ו R_α סימן יחס n מקומי במילון.
  הנוסחאות נקראות נוסחאות אטומיות.
- $(t_1 \approx t_2)$ - כאשר t_1, t_2 שמות עצם במילון.

דוגמאות מעל τ:

$$R_1(v_1, v_2)$$
$$R_2(F_2(c_0, c_0, v_2), v_3)$$
$$(v_3 \approx c_0)$$

שם עצם – מי?
נוסחא אטומית – טענה נכון/לא נכון.
<u>צעד:</u>

I) קשרים מתחשיב הפסוקים.
α, β נוסחאות מעל מילון τ אז גם $(\alpha \wedge \beta)$ נוסחא, $(\alpha \wedge \beta), (\alpha \to \beta), (\neg\alpha)$ נוסחאות.

II) כמתים $\forall, \exists$
אם α נוסחא ו v_i משתנה. אז $\forall v_i \alpha$ נוסחא, $\exists v_i \alpha$ נוסחא.

דוגמאות מעל τ:

$$\left(R_1(v_1, v_2) \to R_2(c_0), F_1(v_3)\right)$$
$$\forall v_3 (v_1 \approx v_2)$$
$$R_1(v_4, v_6)$$

בסדר הקדימויות לכמתים יש קדימות על קשרים.

$$F\left(F(\dots)\right)$$
$$\cancel{R\left(R(\circ)\right)}$$
$$\cancel{F \to F}$$
$$R \to R$$
$$\cancel{\forall v_1 F}$$
$$\forall v_3 R$$

קיים משפט קריאה יחידה לאוסף הנוסחאות.

<u>סמנטיקה לתחשיב היחסים</u>
<u>סמנטיקה אינטואיטיבית</u>
צריך – פירוש לסימנים במילון.
בהינתן מילון τ (מכי סימני פונקציה, סימני יחס, וקבועים) מגדירים מבנה M עבור τ.
M מכיל פירוש עבור כל אחד מהסימנים ב τ.

$$M = \langle D^M, R_1^M, \dots, R_n^M, F_1^M, \dots, F_k^M, c_0^M, \dots, c_l^M \rangle$$

לדוגמה:

$$\tau = \langle R_1(\circ,\circ), R_2(\circ), F_1(\circ), F_2(\circ,\circ,\circ), c_0, c_1 \rangle$$
$$M_1 = \langle N, \le_+ + 2, \text{מכפלה של שלושה}, 3,8 \rangle$$
$$M_2 = \langle \text{תתי קבוצות של טבעיים}, \subseteq, =, \text{isEmpty}, X \cup Y \cup Z, \phi, \{1\} \rangle$$

האם זה מספיק?

$$\tau = \langle R(\circ,\circ), F(\circ) \rangle$$
$$M = \langle \mathbb{N}, \le, +2 \rangle$$
$$?\, \alpha = R(v_1, v_2)$$

תלוי מהם v_1, v_2.
מגדירים השמה z:

$$z: \text{משתנים} \to \mathfrak{D}^M$$
$$z: \{v_i \mid i \in \mathbb{N}\} \to \mathfrak{D}^M$$

עבור כל משתנה אומרת לאיזה איבר בתחום היא מתאימה.
מסמנים $z(v_i)$ את הערך ש z נתנה ל v_i.
האם זה מספיק?

$v_1 \to 3, v_2 \to 7, v_3 \to 5, v_6 \to 8$

$?\,R(F(v_3), v_6)$

למעשה צריך ערך לכל שמות העצם.

נחריב את ההשמה z כך שתתאים אבר בתחום לכל שם עצם.

נסמן ב $\bar{z}(t)$ את הערך ש z מתאימה לשם העצם t.

$\bar{z}$: שמות עצם $\to \mathfrak{D}^M$

נגדיר כל המבנה של קבוצת שמות העצם.

<u>בסיס:</u>

- t משתנה $t = v_i$

$$\bar{z}(t) = z(t)$$

- t קבוע $t = c_\alpha$

$$\bar{z}(t) = c_\alpha^M$$

פירוש הקבוע במבנה.

<u>צעד:</u>

$$F_\alpha(t_1, \dots, t_n)$$

כאשר F סימן פונקציה n מקומי מהמילון ו $t_1, \dots, t_n$ שמות עצם מעל המילון.

$$\bar{z}\big(F_\alpha(t_1, \dots, t_n)\big) = F_\alpha^M\big(\bar{z}(t_1), \dots, \bar{z}(t_n)\big)$$

לא פורמאלי:

משתנה לא תחת השפעת כמת – חופשי.

הנוסחא אומרת משהו רק על המשתנים החופשיים.

לצורך חישוב ערך אמת משנה הערך של המשתנים החופשיים.

<u>מסקנה 1</u>

אם z_1, z_2 שתי השמות שמזדהות על המשתנים החופשיים ב α אז z_1 ו z_2 נותנות אותו ערך אמת ל α.

<u>מסקנה 2</u>

אם ה α אין משתנים חופשיים אז ערך האמת של α אינו תלוי בהשמה.

הגדרה נוסחא ללא משתנים חופשיים נקראת פסוק (בתחשיב היחסים).

<u>מה מזכיר?</u>

אינטגרלים:

$$\int_0^x y\,dy, \int_0^1 x\,dx$$

צד ימין x הוא קשור, לא משנה ערך ה x. בצד ימין y חופשי.

<u>הגדרה פורמאלית</u>

משתנים חופשיים וקשורים.

נגדיר על המבנה של נוסחא α מהוא משתנה v_i חופשי ב α:

<u>בסיס:</u>

α נוסחא אטומית $\big(R(t_1, \dots, t_n)\big)$.

v_i חופשי ב α אם v_i מופיע ב α.

<u>צעד:</u>

עבור קשרים:

v_i חופשי ב $(\alpha \vee \beta)$ אם הוא חופשי ב α או חופשי ב β.

$$R(v_1, v_1) \vee \forall v_1 R(v_1, v_1)$$

v_1 ביחס R עם עצמו או שכל האיברים ביחס R עם עצמם.

כנ"ל $(\alpha \wedge \beta), (\alpha \to \beta), (\neg\alpha)$.

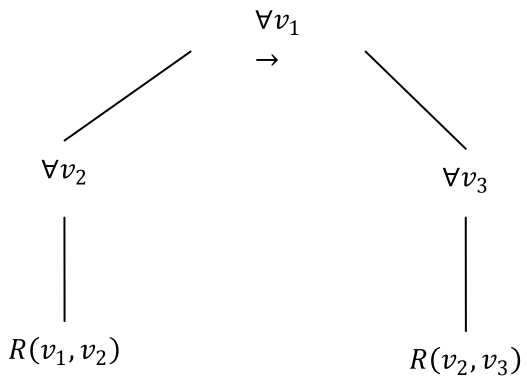
עבור כמתים:

האם v_i חופשי ב $\forall v_j \alpha$?

v_i חופשי ב α ו $i \neq j$.
כמת פוגע בחופשיות המשתנה עליו שמנו את הכמת.
$\exists v_1 \alpha$ באותו אופן.
$\exists v_1 R(v_1, v_1)$ יש אבר בתחום שביחס R עם עצמו.
משתנה קשור – אם אינו חופשי.
דוגמא:

$$\forall v_1 \big(\forall v_2 R(v_1, v_2) \rightarrow \forall v_3 R(v_2, v_3)\big)$$

נחשב עבורה מי הם המשתנים החופשיים.



נתון מילון τ ו נוסחא α.
מעל τ ראנו שיש צורך במבנה.

$$\tau = \langle R_1, \dots, R_s, F_1, \dots, F_k, c_1, \dots, c_l \rangle$$
$$M = \langle \mathfrak{D}^M, R_1^M, \dots, R_s^M, F_1^M, \dots, F_k^M, c_1^M, \dots, c_l^M \rangle$$

$\mathfrak{D}^M$ - התחום.
R_i^M - הפרוש של R_i במבנה M.
R_i סימון יחס n מקומי.

$$R_i^M \subseteq \underbrace{\mathfrak{D}^M \times \dots \times \mathfrak{D}^M}_{\text{n times}}$$

אוסף ה n-יות הסדורות של אברים מ $\mathfrak{D}^M$ המקיימות את R_i.
דוגמא:

$$\mathfrak{D}^M = \mathbb{R}$$
$$R_1^M = \{(x, y) \mid x < y\}$$
$$\mathfrak{D}^M = \mathbb{Z}$$
$$R_1^M = \{(x, y) \mid x \equiv y \bmod 3\}$$

F_i^M - הפרוש של סימן הפונקציה F_i במבנה M.
F_i סימן פונקציה n מקומי:

$$F_i^M \subseteq \underbrace{\mathfrak{D}^M \times \dots \times \mathfrak{D}^M}_{\text{n times}} \rightarrow \mathfrak{D}^M$$

הפונקציות מוגדרות על כל התחום.
דוגמא:
$\mathfrak{D}^M$ - תת קבוצות של הטבעיים.

$$F^M(x, y) = X \cup Y$$

c_α^M - הפרוש של סימן קבוע c_α במבנה M.

$$c_\alpha^M \in \mathfrak{D}^M$$

ראינו שיש צורך בהשמה:

$$z: \{v_i \mid i \in \mathbb{N}\} \rightarrow \mathfrak{D}^M$$

ראינו איך להרחיב את ההשמה z כך שתתאים ערך $\bar{z}$ לכל שם עצם.

<u>חישוב ערך האמת</u>

נגדיר מתי מבנה M והשמה z מספקים נוסחא α ונסמן:

$$M \vDash_z \alpha$$

נגדיר באינדוקציה על מבנה הנוסחא.

<u>בסיס:</u>

$$\alpha = R(t_1, \dots, t_n) \Leftrightarrow M \vDash_z R(t_1, \dots, t_n)$$
$$\left(\bar{z}(t_1), \dots, \bar{z}(t_n)\right) \in R^M$$

(מסתפק אם nית האיברים שמתקבלת שייכת ל R^M).

$$\alpha = (t_1 \approx t_2)$$
$$\left(\bar{z}(t_1) = \bar{z}(t_2)\right) \Leftrightarrow M \vDash_z (t_1 \approx t_2)$$

<u>צעד:</u>

קשרים – לפי טבלאות האמת.

כמתים: נניח שלכל מבנה M' ולכל השמה z' יודעים לחשב האם $M' \vDash_{z'} \alpha$.

נרצה לשאול האם $M \vDash_z \forall v_i \alpha$?

(נרצה כלי שיאפשר לעבור על כל הערכים האפשריים, לשים אותם ב v_i ולבדוק את α).

$$\forall v_1 R(v_1, v_1)$$

נגדיר השמה מתוקנת. תהי z השמה, v_i משתנה $d \in \mathfrak{D}^M$.

מגדירים השמה חדשה:

$$z[v_i \leftarrow d](v_j) = \begin{cases} d & , j = i \\ z(v_j) & , j \neq i \end{cases}$$

	v_0	v_1	v_2	v_3	…
z	3	5	8	6	…
$z[v_1 \leftarrow 4]$	3	4	8	6	…

$$\forall d \in \mathfrak{D}^M : M \vDash_{z[v_i \leftarrow d]} \alpha \Leftrightarrow M \vDash_z \forall v_i \alpha$$
$$\exists d \in \mathfrak{D}^M : M \vDash_{z[v_i \leftarrow d]} \alpha \Leftrightarrow M \vDash_z \exists v_i \alpha$$
$$\exists v_1 R(v_1, v_2)$$

יש אבר בתחום שאם נשים אותו ב v_1 יקיים $R(d, v_2)$.

$$\tau = \langle R_{2,0}, F_{1,0}, F_{2,0} \rangle$$
$$\alpha = \exists v_1 R_{2,0}\left(R_{1,0}(v_1), F_{2,0}(v_1, v_2)\right)$$
$$M = \langle \mathbb{N}, <, +2, + \rangle$$
$$z\ v_0 - 3\ v_1 - 2\ v_2 - 5\ v_3 - 6 \dots$$
$$M \vDash_z \alpha \Leftrightarrow M \vDash_z \exists v_1 R_{(2,0)}\left(F_{1,0}(v_1), F_{(2,0)}(v_1, v_2)\right) \Leftrightarrow$$

קיים $d \in \mathfrak{D}^M$ כך ש

$$M \vDash_{z'[v_1 \leftarrow d]} R_{(2,0)}\left(F_{1,0}(v_1), F_{2,0}(v_1, v_2)\right) \Leftrightarrow$$

קיים $d \in \mathfrak{D}^M$ כך ש

$$(\vec{z}\left(F_{1,0}(v_1), \vec{z}\left(F_{2,0}(v_1, v_2)\right)\right) \in R_{2,0}^M \Leftrightarrow$$

קיים $d \in \mathfrak{D}^M$ כך ש

$$\left(F_{1,0}^M(\vec{z}(v_1)), F_{2,0}^M(\vec{z}(v_1), \vec{z}(v_2))\right) \in R_{2,0}^M \Leftrightarrow$$

קיים $d \in \mathfrak{D}^M$ כך ש

$$\left(F_{1,0}^M(d), F_{2,0}^M(d, 5)\right) \in R_{2,0}^M \Leftrightarrow$$

קיים $d \in \mathfrak{D}^M$ כך ש

$$(d + 2, d + 5) \in R_{2,0}^M$$

כן. קיים $d = 3$. מה היה אם $z(v_2) = 1$ - לא מספק.

מונחי יסוד סמנטיים:

הגדרה נוסחא α מעל מילון τ הוא אמת לוגית אם לכל מבנה M עבור τ ולכל השמה z ב M מתקיים $M \vDash_z \alpha$.

דוגמא:

$$\tau = \langle R_{2,0} \rangle$$
$$\alpha = \forall v_1 R_{2,0}(v_1, v_2) \vee \neg \forall v_1 R_{2,0}(v_1, v_2)$$

כל הצבה של נוסחאות במקום אטומים בטאוטולוגיות פסוקית היא אמת לוגית.

דוגמא 2:

$$\alpha_2 = \forall v_1 R_{2,0}(v_1, v_2)$$

האם α_2 אמת לוגית? לא, צריך למצוא מבנה M והשמה z כך ש $M \nvDash_z \alpha_2$.

$$M = \langle \mathbb{N}, < \rangle$$
$$z: v_2 = 0 \ldots$$

דוגמא 3:

$$\tau = \langle p(\circ) \rangle$$
$$\alpha_3 = \exists v_1 \big(p(v_1) \to \forall v_1 p(v_1)\big)$$

נראה ש α_3 אמת לוגית.

יהי M מבנה עבור τ ו z השמה ב M.

נראה $M \vDash_z \alpha_3$.

קיימות שתי אפשרויות:

1. $M \vDash_z \forall v_1 p(v_1)$ (כל הביצים שלמות)
2. $M \nvDash_z \forall v_1 p(v_1)$ (לא כל הביצים שלמות)

$$M \vDash_z \exists v_1 \big(p(v_1) \to \forall v_1 p(v_1)\big) \Leftrightarrow$$

קיים $d \in \mathfrak{D}^M$ כך ש

$$M \vDash_{z[v_1 \leftarrow d]} p(v_1) \to \forall v_1 p(v_1)$$

1. $M \vDash_z \forall v_1 p(v_1)$

v_1 משתנה קשור ולכן הערך שלו אינו משפיע על ערך האמת.

$$M \vDash_{z[v_1 \leftarrow d]} \forall v_1 p(v_1)$$

לכל ערך של d.

בבית לפי ההגדרות

לכן לכל ערך של d

$$M \vDash_{z[v_1 \leftarrow d]} p(v_1) \to \forall v_1 p(v_1)$$

לפי $TT_{\to}$.

נבחר $d = z(v_1)$ לכן קיים $d \in \mathfrak{D}^M$ כך ש $M \vDash_{z[v_1 \leftarrow d]} p(v_1) \to \forall v_1 p(v_1)$.

2. $M \nvDash_z \forall v_1 p(v_1)$.

קיים $d \in \mathfrak{D}^M$ עבורו

$$M \nvDash_{z[v_1 \leftarrow d]} p(v_1)$$

לכן קיים $d \in \mathfrak{D}^M$ כך ש

$$M \vDash_{z[v_1 \leftarrow d]} p(v_1) \to \forall v_1 p(v_1)$$

לפי $TT_{\to}$ לכן

$$M \vDash_z \exists v_1 \ldots$$

דוגמא 4:

$$\tau = \langle R_{2,0} \rangle$$
$$\alpha_4 = \exists v_1 \forall v_2 R_{2,0}(v_1, v_2) \to \forall v_2 \exists v_1 R_{2,0}(v_1, v_2)$$

נראה ש α_4 אמת לוגית.

יהי M מבנה עבור τ ותהי z השמה ב M.

נראה שאם $M \vDash_z \exists v_1 \forall v_2 R(v_1, v_2)$ אז $M \vDash_z \forall v_2 \exists v_1 R(v_1, v_2)$.

$$M \vDash_z \exists v_1 \forall v_2 R(v_1, v_2)$$

לכן קיים $d_1 \in \mathfrak{D}^M$ כך שלכל $d_2 \mathfrak{D}^M$ מתקיים $(d_1, d_2) \in R^M$.

צ"ל:
לכל $d_3 \in \mathfrak{D}^M$ קיים $d_4 \in \mathfrak{D}^M$ כך ש $(d_4, d_3) \in R^M$.
ראינו שתמיד ניתן לבחור $d_4 = d_1$ לכן לכל $d_3 \in \mathfrak{D}^M$ ניתן למצוא $d_1 = d_4 \in \mathfrak{D}^M$ כך ש $(d_1, d_3) \in R^M$

דוגמא 5:

$$\alpha_5 = \forall v_2 \exists v_1 R(v_1, v_2) \rightarrow \exists v_1 \forall v_2 R(v_1, v_2)$$

בבית להוכיח לא אמת לוגית.

הגדרה נוסחא α מעל מילון τ היא סתירה אם לכל מבנה M עבור τ ולכל השמה z ב M מתקיים

$$M \nvDash_z \alpha$$

הגדרה נוסחא α מעל מילון τ היא ספיקה אם קיים מבנה M עבור τ וקיימת השמה z ב M כך ש

$$M \vDash_z \alpha$$

נאמר שמבנה M מספק את נוסחא α ונסמן $M \vDash \alpha$, אם לכל השמה z ב M מתקיים $M \vDash_z \alpha$.

$M \nvDash \alpha$? קיימת השמה z ב M כך ש $M \nvDash_z \alpha$.
$\vDash \alpha$ – α אמת לוגית.
נאמר שמבנה M והשמה z מספקים קבוצת נוסחאות Σ, אם לכל נוסחא $\alpha \in \Sigma$: $M \vDash_z \alpha$. נסמן:

$$M \vDash_z \Sigma$$

נאמר שנוסחא α גוררת לוגית נוסחא β ונסמן $\alpha \vDash \beta$ אם לכל מבנה M ולכל השמה z ב M אם $M \vDash_z \alpha$ אז $M \vDash_z \beta$.
מרחיבים $\Sigma \vDash \alpha$.
בבית:

$$\forall v_1(\alpha \rightarrow \beta) \vDash \forall v_1 \alpha \rightarrow \forall v_1 \beta$$

$$\vDash \rho \rightarrow \xi \Leftrightarrow \rho \vDash \xi$$

ρ סתירה $\Leftrightarrow$ $\neg\rho$ אמת לוגית

הגדרה נאמר שנוסחאות α ו β מעל מילון τ הן שקולות לוגית אם לכל מבנה M עבור τ ולכל השמה z ב M:

$$M \vDash_z \beta \Leftrightarrow M \vDash_z \alpha$$

דוגמא: נראה

$$\forall v_i \alpha \equiv \neg \exists v_i \neg \alpha$$

$$M \vDash_z \forall v_i \alpha \Leftrightarrow \forall d \in \mathfrak{D}^M : M \vDash_{z[v_i \leftarrow d]} \alpha$$

<u>צורות נורמאליות – PNF</u>
שלב I – מגדירים קבוצות $\alpha F(\tau)$ – נוסחאות, חסרות, כמתים.
בסיס: נוסחאות אטומית.
סגור: קשרים.
שלב II – מגדירים PNF
בסיס: $\alpha F(\tau)$.
סגור: כמתים.
משפט ה PNF:
לכל נוסחא α קיימת נוסחא שקולה α' כך ש:

1. α' מצורת PNF.
2. ל α ול α' אותם משתנים חופשיים.
3. האורך של α' לינארי באורך של α.

<u>גדירות של יחסים במבנה:</u>

$$\tau = \langle F_{2,0}, F_{2,1} \rangle$$
$$M = \langle \mathbb{N}, +, \cdot \rangle$$
$$\alpha_<(v_1, v_2) = \exists v_3 \big(F_{2,0}(v_1, v_3) \approx v_2\big)$$
$$\alpha_{div}(v_1, v_2) = \exists v_3 \big(F_{2,1}(v_1, v_3) \approx v_2\big)$$
$$\alpha_0(v_1) = \forall v_2 \big(F_{2,0}(v_1, v_2) \approx v_2\big)$$
$$\alpha_1(v_1) = \forall \big(F_{2,1}(v_1, v_2) \approx v_2\big)$$
$$\alpha_{prime}(v_1) = \forall v_2 (\alpha_{div}(v_2, v_1) \to \big((v_1 \approx v_2) \vee \alpha_1(v_2)\big)$$

הצגנו נוסחא עם משתנה חופשי v_1

$$M \vDash_z \alpha_{prime}(v_1) \Leftrightarrow z(v_1) \in \{n \mid n \text{ ראשוני}\}$$

למעשה הגדרנו את קבוצת הראשוניים (שקול להוספה של יחס חד מקומי).

באופן כללי, בהינתן מילון τ ומבנה M. מגדירים עבור נוסחא

$$\rho\big(v_{i_1}, \dots, v_{i_n}\big)$$

(n משתנים חופשיים) את $\rho(M)$.

קבוצת ה n-יות מ $\mathfrak{D}^M$ שמספקות את ρ.

$$\rho(M) = \left\{ (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \underbrace{\mathfrak{D}^M \times \dots \times \mathfrak{D}^M}_{\text{פעמים } n} \;\middle|\; \begin{matrix} \text{לכל השמה} \\ z \text{ כך ש} \\ z\big(v_{i_1}\big) = a_1, \dots, z\big(v_{i_n}\big) = \alpha_n \\ M \vDash_z \rho \text{ מתקיים} \end{matrix} \right\}$$

באופן שקול

$$M \vDash_z \rho \Leftrightarrow \Big(z\big(v_{i_1}\big), \dots, z(v_n)\Big) \in \rho(M)$$

בהינתן קבוצת nיות $X \subseteq \mathfrak{D}^M \times \dots \times \mathfrak{D}^M$ נאמר ש ρ מגדירה את X אם $\rho(M) = X$.

X גדירה אם קיימת ρ שמגדירה אותה.

בדוגמא ראינו

$$\{0\}, \{1\}, \{n \mid n \text{ is prime}\}, \{(n, m) \mid n < m\}, \{(n, m) \mid n|m\}$$

גדירות.

דוגמא:

$$\tau = \langle c_0, c_1, F_{2,0}, F_{2,1}, R_{2,0} \rangle$$
$$M = \langle \mathbb{N}, 0, 1, +, \cdot, \leq \rangle$$

נרצה להגדיר:

$$X = \{(n, m) \mid n = m^2\}$$
$$\alpha(v_1, v_2) = \big(F_{2,1}(v_2, v_2) \approx v_1\big)$$

<u>גדירות של קבוצות מבנים</u>

ρ מעל מילון τ - מי המבנים וההשמות שמספקים ρ.

עבור ρ פסוק – נשאל האם מבנה מספק.

בהינתן פסוק ρ, נגדיר

$$Mod(\rho) = \{M \mid M \vDash \rho\}$$

אוסף המבנים המספקים ρ.

עבור קבוצת פסוקים Σ נגדיר

$$Mod(\Sigma) = \{M \mid M \vDash \Sigma\}$$

נאמר ש Σ מגדירה את $Mod(\Sigma)$.

גם כאן נתעניין בכיוון ההפוך.

בהינתן קבוצת מבנים K עבור τ, נאמר ש K גדירה, אם קיימת קבוצת פסוקים Σ מעל τ שמגדירה את K.

הנחה – אין מבנים ריקים.

דוגמא 1: שפה ריקה L (רק שוויון) – מילון ריק.

$\Sigma_1 = \{\exists v_1 \exists v_2 \neg(v_1 \approx v_2)\}$

מהו $Mod(\Sigma_1)$?

$Mod(\Sigma_1) = \{M \mid |\mathfrak{D}^M| \geq 2\}$

דוגמא:

$K_2 = \{M \mid |\mathfrak{D}^M\} = 1\}$

כל המבנים בהם יש איבר אחד בתחום.

$\Sigma_2 = \{\forall v_1 \forall v_2 (v_1 \approx v_2)\}$

$\neg\neg\exists v_1 \neg\neg\neg\exists v_2 \neg(v_1 \approx v_2)$

נראה ש Σ_2 מגדירה את K_2.

צ"ל $M \in K_2 \Leftrightarrow M \vDash \Sigma_2$.

$M \vDash \Sigma_2 \Leftrightarrow M \vDash \forall v_1 \forall v_2 (v_1 \approx v_2) \Leftrightarrow \forall d_1 \in \mathfrak{D}^M, \forall d_2 \in \mathfrak{D}^M : (d_1 = d_2) \Leftrightarrow$

ב $\mathfrak{D}^M$ יש איבר אחד בלבד $|\mathfrak{D}^M| = 1$

דוגמא 3:

$\tau = \langle R_{2,0} \rangle$

$\Sigma_3 = \{\forall v_1 \forall v_2 \left(R_{2,0}(v_1, v_2) \rightarrow R_{2,0}(v_2, v_1)\right)$

מהו $Mod(\Sigma_3)$?

$Mod(\Sigma_3) = \{M \mid R_{2,0}^M$ הוא יחס סימטרי$\}$

דוגמא 4: חזרה למילון ריק

$K_{inf} = \{M \mid \mathfrak{D}^M$ אינסופי$\}$

נראה ש K_{inf} גדירה.

$\alpha_2 = \exists v_1 \exists v_2 \neg(v_1 \approx v_2)$

לפחות 2 איברים בתחום

$\alpha_3 = \exists v_1 \exists v_2 \exists v_3 \neg(v_1 \approx v_2) \wedge \neg(v_1 \approx 3\ ) \wedge \neg(v_2 \approx v_3)$

קיימים לפחות 3 איברים שונים בתחום.

$\alpha_n = \exists v_1 \dots \exists v_n \wedge_{i \neq j} \neg(v_i \approx v_j)$

קיימים לפחות n איברים שונים בתחום.

נגדיר

$\Sigma_{inf} = \{\alpha_n \mid \geq 2\}$

נראה ש Σ_{inf} מגדירה את K_{inf}.

$M \in K_{inf} \Leftrightarrow M \vDash \Sigma_{inf}$

$M \in K_{inf}$ ונראה $M \vDash \Sigma_{inf}$.

יהי $\alpha \in \Sigma_{inf}$, α היא מהצורה α_n עבור n כלשהו.

α_n מסתפק אם בתחום לפחות n איברים שונים ומאחר ו $M \in K_{inf}$ התחום של M אינסופי.

ולכן בהכרח $\{\mathfrak{D}^M\} \geq n$.

ולכן $M \vDash \alpha_n$.

ונכאן שלכל פסוק $\alpha \in \Sigma_{inf}$ מתקיים $M \vDash \alpha$ ומכאן $M \vDash \Sigma_{inf}$.

$M \notin K_{inf}$ ונראה $M \nvDash \Sigma_{inf}$.

$M \notin K_{inf} \Rightarrow |\mathfrak{D}^M| < \infty$

נניח ש $|\mathfrak{D}^M| = a$.

$M \nvDash \alpha(a+1)$ מאחר ולא קיימים $(a+1)$ איברים שונים בתחום.

כלומר קיים פסוק $\alpha = \alpha(a+1) \in \Sigma_{inf}$.

$M \nvDash \alpha \Rightarrow M \nvDash \Sigma_{inf}$

נתעניין בקבוצות לא גדירות.

קיים משפט הקומפקטיות לתחשיב היחסים. קבוצת נוסחאות Σ היא ספיקה אם"ם כל תת קבוצה סופית של Σ ספיקה.
בהינתן מילון τ, וקבוצת מבנים K עבור τ, נסמן ב $\bar{K}$ את המשלימה של K.
גם בתחשיב היחסים, 3 בטענות הבאות שקולות:

1. K גדירה ו $\bar{K}$ גדירה.
2. K גדירה על ידי קבוצה סופית.
3. K גדירה ע"י פסוק יחיד.

נציג משפט שישמש אותנו להוכחת אי-גדירות של קבוצות.
בהינתן קבוצת פסוקים Σ, נאמר שגודל התחום במודלים של Σ אינו חסום אם לכל מספר טבעי $n \in \mathbb{N}$ קיים ל Σ מודל M כך ש $n \geq \{\mathfrak{D}^M|$.

משפט תהי Σ קבוצת פסוקים, אם גודל התחום במדולים של Σ אינו חסום, קיים ל Σ מודל עם תחום אינסופי.
<u>שימוש במשפט</u>
נראה שהקבוצה

$$K_{fin} = \{M \mid \mathfrak{D}^M \text{ סופי}\}$$

לא גדירה.
הוכחה המשתמשת במשפט:
נניח בשלילה ש K_{fin} היא גדירה ולכן קיימת Σ שמגדירה אותה.

$$Mod(\Sigma) = K_{fin}$$

גודל התחום במבנים ב K_{fin} אינו חסום, ולכן גודל התחום במודלים עבור Σ אינו חסום.
על פי המשפט, קיים ל Σ מודל M עם תחום אינסופי. $M \notin K_{fin}$ בסתירה לכך ש Σ מגדירה את K_{fin}.

<u>הוכחת המשפט:</u>
רוצים להראות שקיים ל Σ מבנה עם תחום אינסופי.
מאחר וראינו ש Σ_{inf} מגדירה את אוסף המבנים עם תחום אינסופי, זה שקול להוכיח שקיים מודל ל $\Sigma \cup \Sigma_{inf}$.
(גם אם המילון שמעליו נבנתה Σ מכיל סימנים נוספים, עדיין Σ_{inf} מגדירה את אוסף המבנים האינסופיים במילון).
ע"פ משפט הקומפקטיות מספיק שנראה שכל תת-קבוצה סופית $D \subseteq \Sigma \cup \Sigma_{inf}$ היא ספיקה.
תהי $D \subseteq \Sigma \cup \Sigma_{inf}$ נסמן $D_\Sigma = D \cap \Sigma$ וגם $D_{inf} = D \cap \Sigma_{inf}$.
מתקיים כי $D = D_\Sigma \cup D_{inf}$.
מחפשים מבנה שיספק את D_Σ ואת D_{inf}, מאחר ולא ידוע כלום על D_Σ (למעט העובדה ש $D_\Sigma \subseteq \Sigma$), נאלץ לספק את כל Σ.
למעשה, מחפשים מבנה שמספק את Σ ואת D_{inf}.
D_{inf} קבוצה סופית של α_n-ים.
נסמן:

$$m = \max_{\alpha_n \in D_{inf}} \{n\}$$

אם $D_{inf} = \phi$ אז נגדיר $m = 2$.
מחפשים מבנה עבור Σ בגודל לפחות m.
נתון שגודל התחום במודלים של Σ אינו חסום. ולכן קיים מודל עבור Σ עם גודל תחום לפחות m.
המבנה הזה M מספק את Σ מאחר והוא מודל עבור Σ ומספק את D_{inf} מאחר ויש בו לפחות m איברים.

$$M \vDash \Sigma \Rightarrow M \vDash D_\Sigma$$

כלומר $M \vDash D_\Sigma$ וגם $M \vDash D_{inf}$ ולכן $M \vDash D$.
מכאן ש D ספיקה ואז ע"פ הקומפקטיות $\Sigma \cup \Sigma_{inf}$ ספיקה.

<u>גרפים:</u>

$$\tau = \langle R_E \rangle$$

כאשר R_E סימן יחס דו-מקומי.

$$M = \langle \mathfrak{D}^M, R_E^M \rangle$$

כאשר $\mathfrak{D}^M$ צמתים ו R_E^M קשתות.
האם ניתן להגדיר:

$$K_1 = \{M \mid \text{M גרף פשוט (חסר לולאות עצמיות) מכוון}\}$$
$$\Sigma_1 = \{\forall v_1 \neg R_E(v_1, v_1)\}$$

האם ניתן להגדיר:

$$K_2 = \{M \mid \text{M גרף פשוט אינסופי}\}$$
$$\Sigma_2 = \Sigma_1 \cup \Sigma_{inf}$$

האם ניתן להגדיר:

$$K_3 = \{M \mid \text{M גרף פשוט סופי}\}$$

נראה שלא ניתן להגדיר את K_3.
ראינו משפט – אם גודל התחום במודלים של Σ הוא לא חסום אז קיים ל Σ מודל עם תחום אינסופי.
נניח בשלילה שקיימת Σ_3 שמגדירה את K_3.
גודל התחום במודלים עבור Σ_3 אינו חסום.
(כי לכל מספר טבעי n קיים גרף פשוט וסופי עם לפחות n צמתים).
לכן על פי המשפט, קיים ל Σ_3 מודל עם תחום אינסופי.
סתירה לכך ש Σ_3 מגדירה את K_3 (מאחר ו K_3 מכילה רק מבנים סופיים).

<u>יחסי שקילות:</u>

$$\tau = \langle R(\circ,\circ) \rangle$$
$$M = \langle \mathfrak{D}^M, R^M \rangle$$
$$K_{eq} = \{M \mid \text{יחס שקילות } R^M\}$$

מניחים עולם, קבוצת כל הגרפים קיימת ולכן (ע"י כלל הגזירה) קבוצת הגרפים הסופיים קיימת.

$$\alpha_r = \forall v_1 R(v_1, v_1)$$
$$\alpha_s = \forall v_1 \forall v_2 \big(R(v_1, v_2) \rightarrow R(v_2, v_1)\big)$$
$$\alpha_t = \forall v_1 \forall v_2 \forall v_3 \big(R(v_1, v_2) \wedge R(v_2, v_3) \rightarrow R(v_1, v_3)\big)$$
$$\Sigma_{eq} = \{\alpha_r, \alpha_s, \alpha_t\}$$
$$K_2 = \{M \mid \text{יחס שקילות ובכל מחלקת שקילות לפחות 2 איברים } R^M\}$$

α_2 של קודם אמר לפחות 2 איברים בתחום, למשל: $\langle \{1,2\}, \{\{1,\}, \{2\}\} \rangle$
זה לא אומר שבכל מחלקת שקילות יש לפחות 2 איברים. לכן:

$$\alpha_2' = \forall v_1 \exists v_2 \big(\neg(v_1 \approx v_2) \wedge R(v_1, v_2)\big)$$

יכולנו גם:

$$\alpha_2'' = \forall v_1 \exists v_2 \exists v_3 \big(\neg(v_2 \approx v_3) \wedge R(v_1, v_2) \wedge R(v_1, v_3)\big)$$

$$\underbrace{\Sigma_{eq}}_{\text{שקילות}} \cup \underbrace{\{\alpha_2'\}}_{\text{בכל מחלקה לפחות 2 איברים}}$$

$$K_3 = \{M \mid \text{יחס שקילות ובכל מחלקת שקילות אינסוף איברים } R^M\}$$

(בדומה לבניה ב K_{inf} נבנה לכל n טבעי פסוק α_n' שיאמר שבכל מחלקת שקילות לפחות n איברים).

$$\alpha_n' = \forall v_1 \exists v_2 \ldots \exists v_{n+1} \bigwedge_{2 \le i \ne j \le n+1} \neg \underbrace{(v_i \approx v_j)}_{\text{האיברים שונים}} \bigwedge_{2 \le j \le n+1} \underbrace{R(v_1, v_j)}_{\text{נמצאים עם } v_1 \text{ במחלקת השקילות}}$$

$$\Sigma_{eq}^{inf} = \Sigma_{eq} \cup \{\alpha_n' \mid n \ge 2\}$$

ההוכחה כמו עבור Σ_{inf}.

$K_4 = \{M \mid R^M$ יחס שקילות וכל מחלקת שקילות סופית$\}$

לא ניתן להשתמש במשפט:

אם יש מבנה M עם תחום אינסופי $M \notin K_n$, אבל: $M = \{\mathbb{N}, \dots\}$.

נראה ש K_4 לא גדירה.

נניח בשלילה שקיימת Σ_4 שמגירה אותה $Mod(\Sigma_4) = K_4$.

נתבונן בקבוצה

$$\Sigma_4 \cup \Sigma_{eq}^{inf}$$

נראה ש $\Sigma_4 \cup \Sigma_{eq}^{inf}$ לא ספיקה וספיקה ונסיק מכך שלא תיתכן Σ_4 כזו.

1. נראה ש $\Sigma \cup \Sigma_{eq}^{inf}$ לא ספיקה.

יודעים $Mod(\Sigma_4) = K_4$ ומניחים $Mod(\Sigma_{eq}^{inf}) = K_3$.

אם קיים מבנה M כך ש:

$$M \vDash \Sigma_4 \cup \Sigma_{eq}^{inf}$$

אז:

$$M \in Mod(\Sigma_4) \cap Mod(\Sigma_{eq}^{inf})$$

כלומר $m \in K_3 \cap K_4$.

אבל ידוע ש $K_3 \cap K_4 = \phi$ בסתירה לקיימו של M כזה.

2. נראה ש $\Sigma_4 \cup \Sigma_{eq}^{inf}$ ספיקה.

לפי משפט הקומפקטיות מספיק שנוכיח שכל תת-קבוצה סופית

$$D \subseteq \Sigma_4 \Sigma_{eq}^{inf}$$

ספיקה.

נגדיר $D_\Sigma = D \cap \Sigma$ וגם $D_{inf} = D \cap \Sigma_{eq}^{inf}$.

(רוצים לספק את D_Σ ואת D_{inf}, מאחר ולא ידוע כלום על D_Σ נספק את Σ_4 ואת D_{inf},
כלומר, מחפשים מבנה ב K_4 שיספק את D_{inf}).

$$D_{inf} \subseteq \Sigma_{eq}^{inf}$$

נגדיר:

$$b = \max_{\alpha_n \in D_{inf}} \{n\}$$

נגדיר מבנה עם לפחות b איברים בכל מחלקת שקילות (D_{inf}) וכל מחלקת שקילות סופית (D_Σ).

$$M = \langle \underbrace{\{1, \dots, b\}}_{\mathfrak{D}^M}, \underbrace{\{1, \dots, b\} \times \{1, \dots, b\}}_{R^M} \rangle$$

נראה ש $M \vDash D$.

היות ש R^M הינו יחס שקילות עם מחלקת שקילות אחת סופית: $M \in K_4$.

$$M \vDash \Sigma_4 \Rightarrow M \vDash D_\Sigma$$

נראה $M \vDash D_{inf}$: יהי $\alpha \in D_{inf}$, מתקיים כי $\alpha \in \Sigma_{eq}$.

R^M יחס שקילות ולכן $M \vDash \alpha$. אחרת $\alpha = \alpha_n'$ ו $n \le b$.

בכל מחלקת שקילות ב M יש b איברים מאחר ו $n \le b$ ו $M \vDash \alpha_n'$.

לכן לכל $\alpha \in D_{inf}$ מתקיים $M \vDash \alpha$ ומכאן $M \vDash D_{inf}$.

ראינו $M \vDash D_\Sigma$ ו $M \vDash D_{inf}$ ולכן $M \vDash D$.

ראינו שכל תת-קבוצה סופית של $\Sigma_4 \cup \Sigma_{eq}^{inf}$ ספיקה ולכן ע"פ הקומפקטיות $\Sigma_4 \Sigma_{eq}^{inf}$ ספיקה.

<u>הצבות:</u>

$$R(v_1, v_1) \Rightarrow R(v_8, v_8)$$
$$\Downarrow$$
$$R(F(v_1), F(v_1))$$

נגדיר הצבות של שמות עצם במקום המשתנים.

יהי τ מילון ותהי S פונקציית הצבה.

S: משתנים → שמות עצם

נגדיר מהי הנוסחא $sub(\rho, S)$ עבור נוסחא ρ.

הנוסחא שתתקבל מ ρ אחרי ביצוע הצבה לפי הפונקציה S.

$$R(v_1, v_3) \vee R(v_1, v_2)$$

$$S: v_1 \to F(v_8)$$
$$v_2 \to F(v_4)$$
$$v_3 \to v_5$$

$$R(F(v_8), v_5) \vee R\big(F(v_8), F(v_4)\big)$$

נגדיר באינדוקציה על המבנה של קבוצת הנוסחאות:

לצורך כך נגדיר באינדוקציה על מבנה שמות העצם את ההצבה ואח"כ נגדיר באינדוקציה על מבנה הנוסחא.

<u>$sub(t, s)$:</u>

<u>בסיס:</u> $t = v_1$

$$sub(t, S) = S(v_i)$$
$$t = c_\alpha$$
$$sub(t, S) = c_\alpha$$

<u>סגור:</u>

$$t = F(t_1, \dots, t_n)$$
$$sub(t, S) = F\big(sub(t_1, S), \dots, sub(t_n, S)\big)$$

$$\mathrm{R}(\mathrm{F}(\mathrm{v}_1), \mathrm{v}_2)$$
$$\Downarrow$$
$$\mathrm{R}\Big(\mathrm{F}\big(\mathrm{F}(\mathrm{v}_8)\big), \mathrm{F}(\mathrm{v}_4)\Big)$$

<u>עבור נוסחא α:</u>

<u>בסיס:</u>

$$\alpha = (t_1 \approx t_2)$$
$$sub(\alpha, S) = \big(sub(t_1, S) \approx sub(t_2, S)\big)$$
$$\alpha = R(t_1, \dots, t_n)$$
$$sub(\alpha_1, S) = R\big(sub(t_1, S), \dots, sub(t_n, S)\big)$$

<u>צעד:</u>

I) קשרים:

$$sub(\alpha \to \beta, S) = sub(\alpha, S) \to sub(\beta, S)$$

$\neg, \wedge, \vee$ באותו האופן.

II) כמתים:

$$sub(\forall v_i \alpha, S) = \forall v_i sub(\alpha, S')$$

$$S'(v_j) = \begin{cases} j = i & , \forall i \\ j \neq i & S(v_j) \end{cases}$$

מה שמכומת לא מציבים.

באותו אופן עבור $\exists$.