סימונים

λ : קצב הביקוש
P : קצב הייצור
i : ריבית ליח' זמן
c : מחיר הזמנה ליחידה
v : מחיר מכירה ליחידה
$h = i \cdot c$: עלות החזקת מלאי
K : עלות קבועה להזמנה
Q : גודל מנת ייצור
T : אורך המחזור
τ : זמן הובלה (Lead Time)
B : רמת חוסר מקסימאלית

p : עלות חוסר ליחידה
$\hat{p}$: עלות חוסר ליחידה ליח' זמן
D : דרישה (סטוכסטית)
d : ריאליזציה של D
S : הכמות שעד אליה נזמין (Order Up-To)
R : נקודת ההזמנה (Reorder Point)

סוגי מלאים

$\mathbf{H(t), u}$: מלאי ביד (On-Hand)
$\mathbf{B(t)}$: מידת חוסר (BackOrder)
I(t) : מלאי נטו [H(t)-B(t)]
O(t) : מלאי בהזמנה

פתרונות אופטימאליים

Zangwill – אלגוריתם לקביעת גודל ומועדי הזמנה כאשר **החוסר מותר**.
בוחנים (מהסוף להתחלה) את כל המסלולים בהם ניתן להגיע לתקופה ה- n+1
$\boldsymbol{c_{k,j}}$ הוא המינימלי מבין $\boldsymbol{c_{k,i,j}}$ שהוא עלות כוללת למחזור בו הייצור מתחיל בתקופה i (S+H+C+K)
ואז מחשבים את המסלול הכי קצר לפי $f_k = \min\{c_{k,j} + f_j\}$ כאשר $f_{n+1} = 0$
■ מלאי התחלתי נוריד מהדרישה של תקופה 1
■ מלאי סופי נוסיף לדרישה של תקופה n ⇐ לזכור לכפול את המלאי הסופי ב- h
דוגמה : עבור n=4 מחשבים $c_{3,4}, c_{4,5}$ ... $c_{3,5}, c_{3,5} = \min(c_{3,3,5}, c_{3,4,5})$ (ייצור עבור תקופות 3+4)
$f_4 = c_{4,5} + f_5, f_5 = 0$ ...והפיתרון הוא הביטוי המפורש של f_1
Wagner Whitin (WW) – פועלים בדיוק כמו ב Zangwill רק החוסר אסור
לא מבצעים הזמנה כאשר קיים מלאי. (ההזמנות מתבצעות למספר שלם של תקופות בלבד).
■ **האלגוריתמים מניבים פיתרון אופטימאלי רק עבור עלויות מלאי ועלות רכיבים שהן Concave**

מודל דטרמיניסטי – ביקוש סטטי

$$Q^* = \sqrt{\frac{2 \cdot K \cdot \lambda}{h \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{\lambda}{P}\right)}_{\text{קצב סופי}}} - \underbrace{\frac{(p \cdot \lambda)^2}{h \cdot (h + \hat{p})}}_{\text{כשיש חוסר}}} \cdot \underbrace{\sqrt{\frac{h + \hat{p}}{\hat{p}}}}_{\text{כשיש חוסר}}$$

$$B^* = \frac{(h \cdot Q^* - p \cdot \lambda) \cdot \overbrace{\left(1 - \frac{\lambda}{P}\right)}^{\text{קצב סופי}}}{h + \hat{p}}$$

$T^* = \frac{Q^*}{\lambda}$

Fill Rate = $\frac{Q+B}{Q}$

נוסחה כללית

$$G(Q, B) = \frac{k \cdot \lambda}{Q} + c \cdot \lambda + \frac{h \cdot \left[Q \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{P}\right) - B\right]^2}{2 \cdot Q \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{P}\right)} + \frac{\hat{p} \cdot B^2}{2 \cdot Q \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{P}\right)} + \frac{p \cdot B \cdot \lambda}{Q}$$

Prepared by
Boris Milner

כאשר מתקיים p=0,מתקיים עבור- Q^* ו- B^*

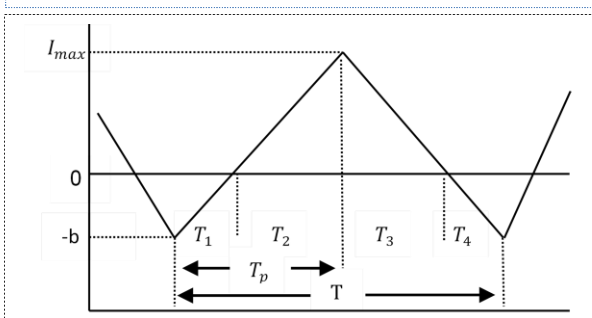
$$G(Q^*, B^*) = c \cdot \lambda + \sqrt{\frac{2 \cdot k \cdot \lambda \cdot h \cdot \overbrace{\left(1 - \frac{\lambda}{P}\right)}^{\text{קצב סופי}} \cdot \underbrace{\hat{p}}_{\text{חוסר}}}{\underbrace{h + \hat{p}}_{\text{חוסר מותר}}}}$$

פיתרון אופטימאלי מקיים **Zero+Equal Ordering**

ניתוח רגישות

$$\frac{G(Q)}{G(Q^*)} = \frac{1}{2}\left(\frac{Q}{Q^*} + \frac{Q^*}{Q}\right) \qquad \frac{G(T^A)}{G(T^*)} = \frac{1}{2}\left(\frac{T^A}{Q^*} + \frac{Q^*}{T^A}\right)$$

מתקיימת סימטרייה ביחס לסטייה מהערך האופטימאלי



$$\boldsymbol{I_{max}} = Q \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{P}\right) - B \qquad \boldsymbol{T_1} = \frac{\mathrm{B}}{\mathrm{P}-\lambda}$$

$$\boldsymbol{T_2} = \frac{I_{max}}{P-\lambda}$$

$$\boldsymbol{T_3} = \frac{I_{max}}{\lambda} \qquad (T_1 + T_2) = \frac{Q}{P}$$

$$\boldsymbol{T_4} = \frac{\mathrm{b}}{\lambda} \qquad (T_3 + T_4) = \frac{Q}{\lambda} \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{P}\right)$$

כשבודקים אנומליה : לשים לב ש - $T = \frac{Q_{max}}{\lambda}$ וגם המלאי נבנה מתוך Q_{max} אך רוכשים כמות של Q^*

נקודת הזמנה (במושגי מלאי נטו)

אם $\tau < T$ אזי $R = \lambda \cdot \tau$ אחרת $R = \lambda \cdot \tau_r$

$R_{3,4} = -B + \tau_r \cdot \lambda = \tau \cdot \lambda - m \cdot Q - B;$

$R_{1,2} = -B + [T - \tau_r] \cdot (P - \lambda) =$

$= \left[(m+1) \cdot \frac{Q}{\lambda} - \tau\right] \cdot (P - \lambda) - B$

R - רמת מלאי נטו בזמן ביצוע ההזמנה

$m = \left\lfloor \frac{\tau}{T} \right\rfloor$; $\tau_r = \tau - m \cdot T$; $I(t) = X(t) - O(t)$

$r_{3,4}$ בקצב ייצור אינסופי, תמיד מתקיים
(כי אין תקופת ייצור)

כופלי לגראנג'

פונ' מטרה : $\min G(Q_1, Q_2, \ldots Q_n) = \sum G_j(Q_j)$

s.t $g(Q_1, Q_2, \ldots Q_n) \le \tilde{C}$

1. לכל מוצר מוצאים את Q^* ו- T^* הממזערים את העלות של המוצר (לפי נוסחאות EOQ ותוך הנחת אי-תלות בין המוצרים).
2. אם פיתרון זה עומד באילוצים סיימנו. אחרת :
3. רושמים את פונ' כופלי לגראנג' :

$$\mathrm{L} = \sum G(Q_n) + \theta_j \cdot \sum [g(Q_n) - C]$$

4. גוזרים את L לפי המוצרים (ומשווים לאפס) וגוזרים לפי האילוצים (ומשווים לאפס)

θ – "מחיר הצל", הקנס שנהיה מוכנים לשלם או הרווח שנקבל עבור שחרור האילוץ ביחידה אחת.

איך לעגל?

שיטה 1
נמצא : $\min\left(\frac{Q^{EOQ}}{Q_1}, \frac{Q_2}{Q^{EOQ}}\right)$ אם הביטוי השמאלי מינימאלי נעגל כלפי מטה, אחרת כלפי מעלה.
שיטה 2
נעגל אל הערך שיותר קרוב לנקודה האמצעית $Q^m = \sqrt{Q_1 \cdot Q_2}$ ואליו מעגלים.
Power Of 2
$\frac{T^{PO2}}{\sqrt{2}} \le T^{EOQ} \le T^{PO2} \cdot \sqrt{2}$ נחליט לפי שיטה 1 או 2

הנחות

הנחה על כל הכמות

נתחיל מהאינטרוול האחרון (בו המחיר c_j המינימלי) ונחשב את הכמות האופט' לאותו המחיר $Q_j = \sqrt{\frac{2 \cdot K \cdot \lambda}{i \cdot c_j \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{P}\right)}}$
כל עוד התוצאה נמוכה מהקצה התחתון נסמן בתחום קצה זה עד שהכמות תיפול בתוך התחום.
למציאת הכמות האופטימאלית יש לבדוק מחיר כללי לכמות האחרונה וכל אלו שסומנו מעליה.

הנחה אינקרמנטלית

עבור כל תחום j מחשבים : $Q_j^* = \sqrt{\frac{2 \cdot \lambda \cdot [K + MC(b_j) - c_j b_j]}{i \cdot c_j}}$ (לתשלום הקבוע נוסף מחיר כניסה לתחום j)
רק עבור הכמויות שנפלו באינטרוואל שלהם מציבים בנוסחה ובוחרים את זה שמביא לתוצאה מינימלית.
$G(Q_j) = \frac{K \cdot \lambda}{Q_j} + MC(Q_j) \cdot \left(\frac{\lambda}{Q_j} + \frac{i}{2}\right)$ כאשר : $MC(Q_j) = MC(b_{j-1}) + c_j \cdot (Q_j - b_j)$

b_i - אבן דרך תחתונה של תחום j ; b_{i+1} - אבן דרך עליונה של תחום j

פתרונות היוריסטיים

Lot For Lot – מייצרים בכל תקופה את הביקוש לאותה התקופה.
העלות לתקופה i היא $K_i + c_i \cdot r_i$ **השיטה אופטימאלית כאשר** $\boldsymbol{K \ll h \cdot r_{min}}$

Silver Meal - $C_j = \frac{K + h \cdot r_2 + 2 \cdot h \cdot r_3 + \cdots + [j-1] \cdot h \cdot r_j}{j}$ ועוצרים ברגע ש- C_j עולה ומזמינים עד תקופה j-1. **[מתחשב ב- K וב-H בלבד ולא מתחשב ב-C]**

Least Unit Cost - $C_j = \frac{K + h \cdot r_2 + 2 \cdot h \cdot r_3 + \cdots + [j-1] \cdot h \cdot r_j + c \cdot \sum_1^j r_m}{\sum_1^j r_m}$ מפסיקים כשהעלות הממוצעת ליח' עולה. **[מתחשב גם ב- K גם ב-H וגם ב-C]**

r_i – ביקוש בתקופה i
*** בפתרונות ההיוריסטיים אין אפשרות לחוסר**

כלל לייבניץ : $\mathrm{I} = \int_{X_1}^{X_2} f(x,y)dy \rightarrow \frac{dI}{dx} = \int_{X_1}^{X_2} \frac{df(x,y)}{dx} dy + f(x, X_2) \cdot \frac{dX_2}{dx} - f(x, X_1) \cdot \frac{dX_1}{dx}$

פונ' L'(Z) : $\int_Q^{\infty} (d - Q) \cdot f_D(d)dd = L(Q) = \sigma \cdot L'(Z) = \sigma \cdot L'\left(\frac{Q-\mu}{\sigma}\right)$ ומתקיים : $L'(\gamma) = L'(-\gamma) - \gamma \; for \; \gamma < 0$

$\int_0^{\infty} f_D(d)dd = 1$; $\int_0^{\infty} d \cdot f_D(d)dd = \mu$

מודל סטוכסטי חד תקופתי (מוכר העיתונים)

באופן כללי, תוחלת הרווח היא :
$E[P(Q,D)] = \int_0^\infty \overbrace{P(Q,D)}^{\text{פונ' הרווח}} \cdot f_D(d)dd$

$E[P(Q,D)] = \int_0^Q [Vd - c(Q-u) - h(Q-d)] f_D(d)dd +$
$+\int_Q^\infty [VQ - c(Q-u) - p(d-Q)] f_D(d)dd$ $\quad F(Q^*) = \frac{V+p-c}{V+p+h} = \frac{C_u}{C_o+C_u}$

$\boldsymbol{C_o} = c+h$ עלות ליחידה במקרה של עודף
$\boldsymbol{C_u} = V-c+p$ עלות ליחידה במקרה חוסר

<u>במקרים **"לא סטנדרטיים"**</u> : **(1)** בניית פונ' הרווח לפי תחומים **(2)** רישום תוחלת פונ' הרווח [האינטגרלים על התחומים] **(3)** גזירת תוחלת פונ' הרווח לפי Q [שימוש בכלל לייבניץ] והשוואת הנגזרת לאפס.

תוחלת <u>החוסר</u> : $E_{short} = \int_{d=Q}^\infty (d-Q) f_D(d)dd = \sigma \cdot L'(\frac{Q-\mu}{\sigma})$
תוחלת <u>העודף</u> : $E_{sur} = \int_{d=0}^Q (Q-d) f_D(d)dd = -E(d) + Q + E_{short}$

<u>K קבוע ומלאי התחלתי u</u> :
$E[P(Q^*,d)] = K + E[P(q^*,d)]$ ← נחפש נקודת אדישות
$E[P(Q^*,d)] = K + [-c \cdot q^* + \mu \cdot v - v \cdot \sigma \cdot L'\left(\frac{q^*-\mu}{\sigma}\right)]$
נשלים ל Q^* רק כשמתקיים $u \le q^*$ (מציאת q^* לעיתים דורשת ניסוי וטעיה)
$\boldsymbol{q^* > Q}$ איננו ערך קביל!

לשים לב ש- C_u ו- C_v יכולים להשתנות במקרים "לא סטנדרטיים" וששניהם מהווים עלות <u>שולית</u> של <u>יחידה אחת</u> בחוסר או <u>יחידה אחת</u> בעודף.

<u>הרחבת מודל מוכר העיתונים לאופק תכנון אינסופי</u>

המדיניות היא : order-up-to S בכל תקופה.

1. בניית תוחלת העלות הכוללת ל-n תקופות תוך התייחסות לנקודות :
   - האם מדובר ב : <u>מכירות אבודות</u> או <u>ניפוק דחוי</u>
   - האם מדובר ב : <u>מלאי נשמר מתקופה לתקופה</u> או <u>נזרק / מוחזר</u>
2. חלוקת 'תוחלת העלות הכוללת' ב-n והשאפת $n \to \infty$ לקבלת תוחלת העלות הממוצעת ליחידת זמן $G(Q)$.
3. גזירת 'תוחלת העלות הממוצעת ליחידת זמן' לפי Q והשוואה לאפס לקבלת Q^* אופטימאלי.

<u>ניפוק דחוי – Backorders</u>

$\boldsymbol{E[P(S,D)]}$ = (-1st period order cost)+(revenue from demand in periods 1 to n-1)-(order costs in periods 2 to n)+(revenue from demand in period n)-(holding and shortage costs in periods 1 to n).

$E[P(S,D)] = (-cS) + V \cdot E[D_1 + \dots + D_{n-1}) - c \cdot E[D_1 + \dots + D_{n-1}) + V \cdot E[\min(S,D_n)] - n \cdot L(S)$
$= (-cS) + (V-c)(n-1)\mu + V \cdot E[\min(S,D_n)] - n \cdot L(S)$
Where $L(S) = h\int_0^S (S-d)f(d)dd + p\int_S^\infty (d-S)f(d)dd$
Divide by $(n \to \infty) \Rightarrow (V-c)\mu - L(S) \Leftrightarrow Diff\ by\ S \Rightarrow L'(S^*) = 0 \Rightarrow F(S^*) = \frac{p}{p+h} = \frac{c_u}{c_u+c_o}$

<u>איבוד מכירות – Lost Sales</u>

$\boldsymbol{E[P(S,D)]}$=(1st period order costs)+(revenue in periods 1 to n)-(order costs in periods 2 to n)- -(holding and shortage costs in periods 1 to n).

$E[P(S,D)] = (-cS) + VE[\min(S,D_1) + \dots + \min(S,D_n)] - cE[\min(S,D_2) + \dots + \min(S,D_n)] - nL(S)$
$= -c \cdot S + [n \cdot V - (n-1)c] \cdot E[\min(S,D)] - n \cdot L(S)$ Where $E[\min(S,D)] = \mu - \int_S^\infty (d-S)f(d)dd$
$= -c \cdot S + [n \cdot V - (n-1)c] \cdot [\mu - \int_S^\infty (d-S)f(d)dd] - n \cdot L(S)$
Divide by $(n \to \infty) \Rightarrow (V-c)[\mu - \int_S^\infty (d-S)f(d)dd] - L(S)$ substitute $L(S)$ and get
$(V-c)\mu - h \cdot \int_0^S (S-d)f(d)dd - (V-c+p)\int_S^\infty (d-S)f(d)dd$
$Diff\ by\ S \Rightarrow F(S^*) = \frac{p+V-c}{p+V-c+h} = \frac{c_u}{c_u+c_o}$

<u>תוספת למודל מוכר העיתונים</u>

ההסתברות להיות בעודף : $F(Q)$
ההסתברות להיות בחוסר : $1-F(Q)$
תוחלת רווח שולית : $c_u \cdot (1-F(Q))$
תוחלת הפסד שולית : $c_o \cdot F(Q)$
<u>ניתוח שולי</u>
$Q \uparrow \Longrightarrow c_u \cdot (1-F(Q)) \downarrow$
$Q \uparrow \Longrightarrow c_o \cdot F(Q) \uparrow$
$c_u \cdot (1-F(Q)) = c_o \cdot F(Q)$
$F(Q^*) = \frac{V+p-c}{V+p+h} = \frac{C_u}{C_o+C_u}$

מודל סטוכסטי – זמן בדיד, מספר תקופות (S-Base Stock)

אין עלויות קבועות, כל פעם שיש ביקוש ליחידה נזמין יחידה אחת.
שמירה על כמות מלאי $X(t)$ קבועה. הדרישה זמן האספקה לא ידועה.

רמת שירות : $\alpha = P(I \ge 0) = P(S^* \ge d) = F(S^*) = \frac{\hat{p}}{h+\hat{p}}$
■ במקרה זה, אם i איננו מוזכר/נתון אזי אין קשר בין h לבין c.
■ בהתפלגות נורמלית כאשר יח' הזמן שונה מ-τ נגדיר $r = \frac{\tau}{time\ unit}$ ואז בהתפלגות מכפילים פי r גם את μ וגם את σ^2.

$X = I + O$ ■ $I = H - B$ ■ $X = S$ ■ $O = D$ ■ $S = I + D$ ■ $H = S - D + B$
$E(I) = S - \mu$ ■ $E(H) = \int_0^S (S-d)f_D(d)dd = S - \mu + E(B)$
$G(S) = h \cdot E(H) + \hat{p} \cdot E(B) + \frac{c \cdot E(D)}{\tau}$
$G(S) = \int_0^S h \cdot (S-d)\, f_D(d)dd + \int_S^\infty \hat{p}(d-S)\, f_D(d)dd + \frac{c \cdot E(D)}{\tau}$
$\frac{dG(S)}{dS} = \int_0^S h \cdot f_D(d)dd + \int_S^\infty \hat{p} \cdot f_D(d)dd = 0$
$h \cdot F(S^*) = \hat{p}(1-F(S^*)) \Longrightarrow F(S^*) = \frac{\hat{p}}{h+\hat{p}}$
$S \uparrow \Longrightarrow \hat{p}(1-F(S^*)) \downarrow$ ■ $S \uparrow \Longrightarrow h \cdot F(S^*) \uparrow$

<u>בהינתן עלות חוסר p</u>: נוסיף ל $G(S)$ את הביטוי $\frac{p \cdot (1-F(S)) \cdot \mu}{\tau}$

בקרה רציפה – מודל (R,Q)

ברגע שמגיעים ל- R יחידות במלאי, מזמינים Q יחידות.
$n(R)$ - תוחלת החוסר במחזור ■ $S = R - \lambda\tau$
$n(R) = \int_R^\infty (d-R)f_D(d)dd \xRightarrow{D\sim Normal} n(R) = \sigma L'(\frac{R-\mu}{\sigma})$
$n'(R) = -(1-F(R))$
$G(Q,R) = \frac{K\lambda}{Q} + c\lambda + h \cdot \bar{H} + p \cdot n(R) \cdot \frac{\lambda}{Q}$

<u>לפי קירוב 2 (היותר מדויק) :</u>
$OnHand_{Inventory} : E[(R-D)^+] = R - \lambda\tau + n(R)$
$\bar{H} = \frac{Q}{2} + R - \mu + \frac{N(R)}{2}$

חד כיווניות → $(\mathbf{1})\ Q^* = \sqrt{\frac{2 \cdot \lambda \cdot [k + p \cdot n(R)]}{h}}\ ;\ (\mathbf{2})\ F(R) = \frac{\frac{p \cdot \lambda}{Q} - \frac{h}{2}}{\frac{p \cdot \lambda}{Q} + \frac{h}{2}}$

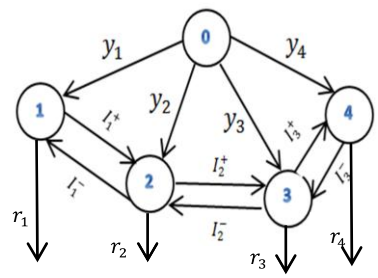
<u>כאשר מחפשים גם את Q^* וגם את R^* משתמשים באלגוריתם :</u>
מתחילים מ : $n(R_0) = 0$, i=0 ומציבים בנוסחה 1 למציאת Q_{i+1}
את התוצאה מציבים בנוסחה 2 למציאת R_{i+1}.
אם מתקיים $R_{i+1} \approx R_i$ וגם $Q_{i+1} \approx Q_i$ סיימנו (הם אופטימליים).
אחרת, מחשבים $n(R_{i+1})$ וחוזרים להציב במשוואה 1 (עד שגיע לאופט').
$E[G(Q,R)] = \frac{K \cdot \lambda}{Q} + c \cdot \lambda + h \cdot \left[\frac{Q}{2} + R - \mu + \frac{n(R)}{2}\right] + p \cdot n(R) \cdot \frac{\lambda}{Q}$

<u>לפי קירוב 1</u> : $F(R) = 1 - \frac{Qh}{p}$ (פחות מדויק) Q מחושב זהה.
$E[G(Q,R)] = \frac{K \cdot \lambda}{Q} + c \cdot \lambda + h \cdot \left[\frac{Q}{2} + R - \lambda \cdot \tau\right] + p \cdot n(R) \cdot \frac{\lambda}{Q}$
$Net_{Inventory} : E[(R-D)] = R - \lambda\tau$ ■ $\bar{H} = \frac{Q}{2} + R - \lambda\tau$
<u>לפי קירוב 1 :</u> המלאי משתנה לינארית בין $(S+Q)$ עד S
<u>לפי קירוב 2 :</u> המלאי משתנה לינארית בין $(S+Q)$ עד $(S+n(R))$

■ ככל ש-Z יותר גדול $L'(Z)$ יותר קטן לכן $n(R)$ יותר קטן ולכן Q יותר קטן.
■ **μ** זוהי תוחלת הביקוש במשך זמן האספקה.

<u>תכנות ליניארי וזרימה ברשת</u>

$$min \sum_{i=0}^{4} [c_i(y_i) + H_i(I_i^+) + S_i(I_i^-)]$$
$s.t$
$\sum_{i=1}^4 r_i = \sum_{i=1}^4 y_i$
$I_{i-1}^+ + y_i + I_i^- = r_i + I_i^+ + I_{i-1}^-$
$I_0^+ = I_4^+ = 0$
$I_0^- = I_4^- = 0$
$I_i^+, I_i^-, y_i \ge 0$



r_i – דרישה בתקופה ה-i ; y_i – גודל הזמנה בתקופה ה-i
$I_i^\pm$ - מלאי המועבר מתקופה ה-i לתקופה $i \pm 1$

<u>קיצור דרך במקום כופלי לגרנג' (CATB)</u>

<u>תנאי הפעלה</u>
1. מודל עם חוסר אסור וקצב ייצור אינסופי
2. אילוץ שניתן להציגו כ- $\sum w_i Q_i = \alpha \sum c_i \cdot Q_i \le W$

<u>אופן הפיתרון</u>
1. מנסים לפתור בצורה לא מאולצת: $Q_i^* = \sqrt{\frac{2K_i\lambda_i}{h_i}}$
ובודקים האם הפיתרון עומד באילוץ.
2. אם אינו עומד באילוץ אזי : $\alpha \cdot \sum c_i Q_i = E > W$
והפיתרון : $Q_{restricted}^* = \frac{W}{E} \cdot Q_{unrestricted}^*$

<u>מציאת מחיר הצל בכופלי לגרנג'</u>
$L = G(Q_1) + G(Q_2) + \theta^w(w_1Q_1 + w_2Q_2 - W)$
$Q_j^* = \sqrt{\frac{2K_j\lambda_j}{h_j + 2\theta^w w_j}} \Longleftarrow L_j = \frac{h_jQ_j}{2} + \frac{K_j\lambda_j}{Q_j} + \theta^w(w_jQ_j - W)$

Prepared by
Boris Milner