

## טורי פוריה והתמרות אנטגרליות -- 104214

### תרגילים, חורף תשס"ד

עבור  $f \in G$ ,

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ix\omega} dx$$

זה התמרת פוריה של  $f$ .

שאלה 1: נתון  $f, f' \in G$ , ו- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$ .

א. נתון  $F(\omega) = \frac{\omega}{1+\omega^4}$ , חשב  $\int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$ .

ב. נתון  $F(\omega) = \frac{\omega}{1+\omega^4}$ , חשב  $f'(0)$  (בטא את התשובה בצורה אינטגרלית).

ג. נתון  $F(\omega) = \frac{1}{1+|\omega|^3}$ , חשב  $\int_{-\infty}^{\infty} |f * f'|^2(x) dx$ , כאשר \* מסמן קונבולוציה.

### שאלה 2:

א. חשב

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^3 x}{x^3} dx$$

ב. חשב

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^4 x}{x^4} dx$$

ג. תהי

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \frac{\sin(a(x-y))}{\pi(x-y)} dy, \quad 0 < a$$

חשב את התמרת פוריה של  $g$ .

ד. הראה

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(ay)}{(y)} \frac{\sin(x-y)}{(x-y)} dy = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & 1 \leq a \\ \frac{\sin(ax)}{x}, & 0 < a \leq 1 \end{cases}$$

על מנת לפתור תרגילים אלו יש לחשב את התמרת פוריה של

$$P_a(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq a \\ 0, & a < |x| \end{cases}$$

–

$$Q_a(x) = \begin{cases} 1 - \frac{x}{a}, & 0 \leq x \leq a \\ 1 + \frac{x}{a}, & -a \leq x < 0 \\ 0, & a < |x| \end{cases}$$

### שאלה 3:

נתונה פונקציה  $u(x, t)$  בעלת נגזרות חלקיות מסדר שני רציפות עבור כל  $(x, t)$ . הפונקציה  $u$  מקיימת  $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  ו-  $u(x, 0) = \sqrt{\pi} e^{-\frac{x^2}{4}}$ . מצא את  $u(x, t)$ .

### שאלה 4:

נתונות  $f, g \in G$  כך ש-  $|f(x)| \leq 1$ ,  $|g(x)| \leq \frac{M}{(1+|x|)^2}$ ,  $|g'(x)| \leq \frac{M}{(1+|x|)^2}$  ו-  $g' \in G$ . עבור כל  $x$  וכאשר  $M > 0$ . יהיו  $\hat{f}(\omega)$  ו-  $\hat{g}(\omega)$  התמורות פוריה של  $f$  ו-  $g$  בהתאמה. נניח ש  $\hat{f}$  ו-  $\hat{g}$  אינטגרביליות בהחלט. הפונקציה  $u$  מוגדרת על ידי

$$u(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(\omega) \hat{f}(\omega) e^{ix\omega} d\omega$$

א. הוכח ש-  $u$  חסומה.

ב. הוכח ש-  $u'$  חסומה.

### שאלה 5:

יהי  $V$  מרחב הפונקציות הרציפות למקוטעין בקטע  $(-\infty, \infty)$ , עם המכפלה הפנימית

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{g(x)} dx$$

וכך ש-

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx < \infty$$

עבור כל  $f$  ב-  $V$ .

נתונה סדרת פונקציות

$$n \in \mathbf{Z}, \varphi_n(x) = \frac{\sin(\frac{x}{2})}{\pi x} e^{inx}$$

א. הראה  $\{\varphi_n\}$  מערכת אורתוגונלית ב-  $V$ .

ב. מצא קבועים  $\{c_n\}$  כך ש

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{1}{1+x^2} - \sum_{n=-N}^{n=N} c_n \varphi_n(x) \right|^2 dx$$

יהי מינימלי.

### שאלה 6:

נתונה הפונקציה

$$g(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{1+\omega^2}, & \omega \geq 0 \\ 0, & \omega < 0 \end{cases}$$

א. הראה

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(\omega) e^{-i\omega x} d\omega$$

מתכנס.

ב. האם קיימת  $f \in G$  כך ש  $g$  היא התמרת פוריה שלה?

### שאלה 7:

נתונות הפונקציות  $f_1(x) = \frac{1}{a^2+x^2}$ ,  $f_2(x) = \frac{1}{b^2+x^2}$ , כאשר  $a, b > 0$ . חשב את הקונוולוציה

$$f_1 * f_2(x)$$