קווים במישור

ישר במישור: $ax+by=c \quad (1) \qquad (b\neq 0 \text{ או } a\neq 0)$

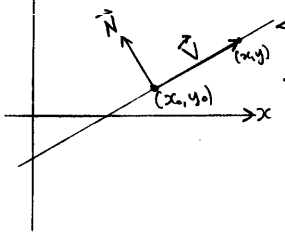
משוואה נורמלית של (1) יהי (x_0,y_0) פתרון כלשהו של (1) כלומר $c=ax_0+by_0$

אז (x,y) הוא פתרון של (1) אמ"מ $ax+by=ax_0+by_0$

$\iff a(x-x_0)+b(y-y_0)=0$

$\iff (a,b)\circ(x-x_0,\ y-y_0)=0$

$\iff (a,b)\perp(x-x_0,y-y_0)$



$\vec N=(a,b)\neq(0,0)$ הוא וקטור שנובע לישר.

הצגה פרמטרית של הישר $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}$ (ע. פתרון כללי של 1)

$\vec u=(u_1,u_2)$ הוא וקטור כיוון של הישר $\vec u\perp\vec N$ (למשל $\vec u=(b,-a)$)

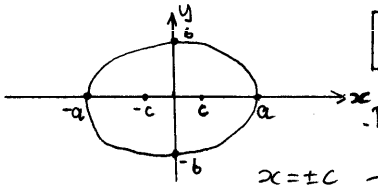
תרגיל 1 נתונים שני ישרים $a_1x+b_1y=c_1$ ו- $a_2x+b_2y=c_2$

מתי הם מקבילים ומתי נצבים?

פתרון הישרים מקבילים אמ"מ $\vec N_1=(a_1,b_2)\parallel\vec N_2=(a_2,b_2)$ כלומר אמ"מ $\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}=0$

הישרים נצבים אמ"מ $\vec N_1\perp N_2$ כלומר אמ"מ $\vec N_1\circ\vec N_2=a_1a_2+b_1b_2=0$

אלפסה קנונית $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (2)$



(*) אם $a^2=b^2=R^2$ אז זה מעגל שמרכזו בראשית ורדיוסו R.

(*) אם $a^2>b^2$ אז מוקדי האלפסה הם על ציר x בנקודות $x=\pm c$

כאשר: $c^2=a^2-b^2$

(*) אם $b^2>a^2$ אז המוקדים הם על ציר y בנק' $y=\pm c$ כאשר $c^2=b^2-a^2$

פרמטריזציה של האלפסה $\begin{cases}x=a\cos t\\ y=b\sin t\end{cases}\quad 0\le t\le 2\pi$

תרגיל 2

(א) לרשום משוואת הישר המשיק לאלפסה דרך נק' (x_0,y_0) שעליה (תזכורת $\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1$ (*)

(ב) למצוא משוואת ישר דרך (x_0,y_0) שנצבה לאלפסה.

פתרון

(א) משוואת (*) מייצגת ישר $(\alpha x+\beta y=1)$ ישר זה עובר דרך (x_0,y_0) כי $\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1$ (למה?). כדי לסיים צריך להראות שישר זה הוא לשיפוע האלפסה בנק' (x_0,y_0). נניח ש $y_0\neq 0$ (בדקו לבד את המקרה $y_0=0$)

אם נגזור את משוואת האלפסה לפי x נקבל: $\frac{2x}{a^2}+\frac{2y\cdot y'(x)}{b^2}=0$

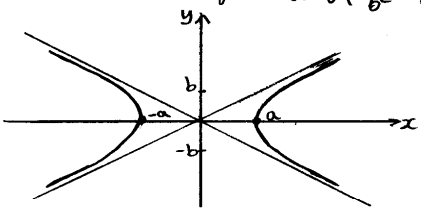
נקודה x_0, y_0 נתונה: $y'(x_0) = -\frac{b^2}{a^2}\frac{x_0}{y_0}$ יצא לנו שיפוע הישר (*) (בדקו)

(ב) נחפש ישר מהצורה $\alpha x+\beta y=\gamma$ שעובר דרך (x_0,y_0) ומאונך לישר המשיק:

הוקטור הנורמל לישר המשיק הוא $\vec{N} = \left(\frac{x_0}{a^2}, \frac{y_0}{b^2}\right)$

בחר וקטור שנורמל לישר המבוקש נקח וקטור שנורמל $\vec{N}$ כלומר: $(\alpha,\beta)=\left(\frac{y_0}{b^2}, -\frac{x_0}{a^2}\right)$

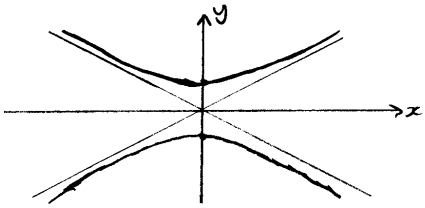
את γ נחשב ע"י הצבת (x_0,y_0) $\Leftarrow$ $\gamma = y_0x_0\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}\right)$



היפרבולה (קנונית) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = +1$ (3)

אסימפטוטות: $y = +\frac{b}{a}x$, $y = -\frac{b}{a}x$

משוואת המשיק דרך נקודה (x_0,y_0): $\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = +1$



היפרבולה צמודה (עם אותן אסימפטוטות) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$

מיון עקומות ריבועיות במישור

עקום ריבועי בצורה קנונית: $\alpha x^2 + \beta y^2 = \gamma$

הערה: אם פרבולה $y=ax^2+bx+c$ היא עקום ריבועי

יהיו $\lambda_1,\lambda_2>0$! $d\geq 0$

$d=0$	$d>0$	
נקודה אחת	מעגל $(\lambda_1=\lambda_2)$ אליפסה $(\lambda_1\neq\lambda_2)$	$\lambda_1x^2+\lambda_2y^2=d$
שני ישרים	היפרבולה	$\lambda_1x^2-\lambda_2y^2=d$
נקודה אחת	קביעה ריקה	$-\lambda_1x^2-\lambda_2y^2=d$
ישר אחד	שני ישרים	$\lambda_1x^2=d$ או $\lambda_2y^2=d$
ישר אחד	קביעה ריקה	$-\lambda_1x^2=d$ או $-\lambda_2y^2=d$

תרגיל 3 לצרף את העקום בעזרת השלמה לריבוע נקבל צורה קנונית מוצאת ומקומו השני ישרים $y=\pm\sqrt{\frac{2}{3}}(x-1)-1$

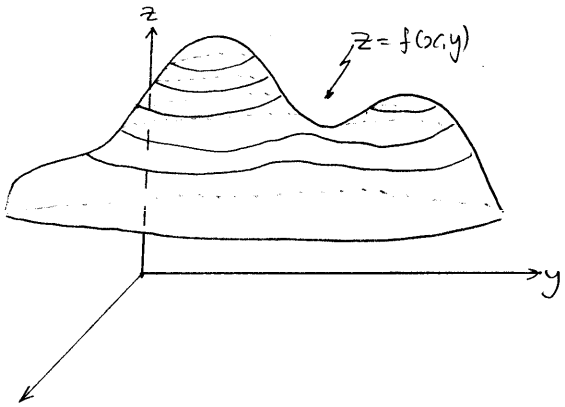
$$2x^2-4x-3y^2-6y=1$$
$$2(x^2-2x)-3(y^2+2y)=1$$
$$\Leftrightarrow 2(x-1)^2-2-3(y+1)^2+3=1$$
$$\Leftrightarrow 2(x-1)^2-3(y+1)^2=0$$

תרגיל 4 תהא $f(x,y)=\frac{x^2-y^2-1}{x^2+y^2+2}$ לבדוק האם בין קווי הרמה שלה קיימים:

(א) אליפסה. (ב) פרבולה (ג) היפרבולה (ד) קו ישר (ה) נקודה בודדת (ו) קביעה ריקה

פתרון נתבונן בגרף של הפונקציה: $z=f(x,y)$

קווים במישור



קו הגובה של $f(x,y)$ שגובהו הוא c הוא אוסף כל הנקודות (x,y) במישור שעבורן $f(x,y)=c$

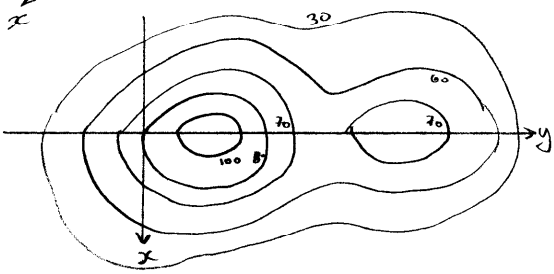
כלומר

$$\frac{x^2-y^2-1}{x^2+y^2+2}=c$$

$\Leftrightarrow$

$$x^2-y^2-1=cx^2+cy^2+2c$$

$$(1-c)x^2+(-1-c)y^2=2c+1$$



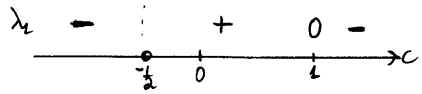
<u>אפשרות 1</u> $2c+1=0$ כלומר $c=-1/2$

$\Leftrightarrow$ $\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}y^2=0$ $\Leftarrow$ $y=\pm\sqrt{3}x$ שני ישרים

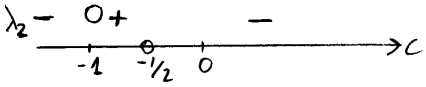
<u>אפשרות 2</u> $2c+1\neq 0$ $(c\neq -1/2)$

$$\frac{1-c}{2c+1}x^2+\frac{-(1+c)}{2c+1}y^2=1$$ מתצורה $\lambda_1x^2+\lambda_2y^2=1$

$\lambda_1=\frac{1-c}{2c+1}$ מתאפס ב $c=1,-1/2$



$\lambda_2=-\frac{(1+c)}{2c+1}$ מתאפס ב $c=-1,-1/2$



(*) $c<-1 \Leftarrow \lambda_1,\lambda_2<0 \Leftarrow$ קבוצה ריקה

(*) $c=-1 \Leftarrow \lambda_1<0,\ \lambda_2=0 \Leftarrow$ קבוצה ריקה

(*) $-1<c<-1/2 \Leftarrow \lambda_1<0,\ \lambda_2>0 \Leftarrow$ היפרבולה

(*) $-1/2<c<1 \Leftarrow \lambda_1>0,\ \lambda_2<0 \Leftarrow$ היפרבולה

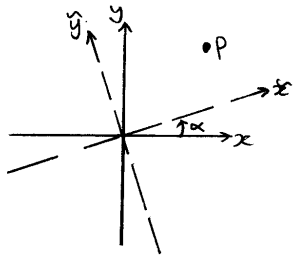
(*) $c=1 \Leftarrow \lambda_1=0,\ \lambda_2<0 \Leftarrow$ קבוצה ריקה

(*) $c>1 \Leftarrow \lambda_1<0,\ \lambda_2<0 \Leftarrow$ קבוצה ריקה

<u>צורה קנונית מסובבת של עקום ריבועי משוני</u>

$$ax^2+bxy+cy^2=d$$

כדי לצרוך עקום כזה צריך לסובב את מערכת הצירים בזווית α מתאימה.



סיבוב מערכת הצירים בזווית α סביב הראשית

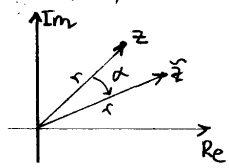
$x-y$ המערכת המקורית, $\tilde{x}-\tilde{y}$ המערכת המסובבת

(p_1, p_2) שיעורי הנקודה P במערכת $x-y$

$(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2)$ שיעורי הנקודה P במערכת $\tilde{x}-\tilde{y}$

נשתמש בשני המספרים המרוכבים

$z = p_1 + ip_2$ $\qquad$ $\tilde{z} = \tilde{p}_1 + i\tilde{p}_2$



$$z = (\cos\alpha + i\sin\alpha)\tilde{z}$$

$$p_1 + ip_2 = (\cos\alpha + i\sin\alpha)(\tilde{p}_1 + i\tilde{p}_2) = \tilde{p}_1\cos\alpha - \tilde{p}_2\sin\alpha + i(\tilde{p}_1\sin\alpha + \tilde{p}_2\cos\alpha)$$

$$\boxed{\begin{aligned} x &= \tilde{x}\cos\alpha - \tilde{y}\sin\alpha \\ y &= \tilde{x}\sin\alpha + \tilde{y}\cos\alpha \end{aligned}}$$

או

$$\boxed{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha, & -\sin\alpha \\ \sin\alpha, & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix}}$$

הערה: המטריצה $U = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ מקיימת $UU^T = I$

כלומר U הפיכה! $U^{-1} = U^T$ מטריצה כזו נקראת מטריצה אורתוגונלית

(מה שמסתכן אותה הוא שעמודותיה הן וקטורים באורך אחד שמאונכים זה לזה)

שימו לב ש $U^{-1} = U^T \Leftarrow$ $\qquad$ $\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = U^T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

תרגיל 5 לפתור את הלוקוס: $xy = d$ (*)

פתרון: נסובב את מערכת הצירים בזווית α אל מהקשר:

$$x = \tilde{x}\cos\alpha - \tilde{y}\sin\alpha$$
$$y = \tilde{x}\sin\alpha + \tilde{y}\cos\alpha$$

נקבל שבמערכת המסובבת במשוואת המעגל את הלוקוס הוא:

$$(\tilde{x}\cos\alpha - \tilde{y}\sin\alpha)(\tilde{x}\sin\alpha + \tilde{y}\cos\alpha) = d$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\tilde{x}^2\sin\alpha\cos\alpha + \tilde{x}\tilde{y}(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) - \tilde{y}^2\sin\alpha\cos\alpha = d$$

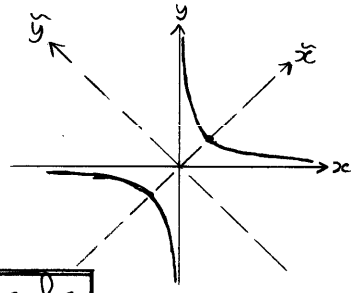
$$\Leftrightarrow$$

$$\frac{\sin 2\alpha}{2}\tilde{x}^2 + \cos 2\alpha \cdot \tilde{x}\tilde{y} - \frac{\sin 2\alpha}{2}\tilde{y}^2 = d$$

כדי להפטר מגורם המעורב $\tilde{x}\tilde{y}$ נבחר $\alpha = \pi/4 \Leftarrow$ $\cos 2\alpha = 0,\ \sin 2\alpha = 1$

ונקבל צורה קנונית: $\dfrac{\tilde{x}^2}{\sqrt{2}^2} - \dfrac{\tilde{y}^2}{\sqrt{2}^2} = d$

אם למשל $d=1$ אז נראה היפרבולה קנונית עם אסימפטוטות: $\tilde{y}=\pm\tilde{x}$



מסקנה: הנה תמונה רשת וכניסה שלאו נגע אליו בתיכנון

ציר עקום ריבועי מסובב

נתון עקום ריבועי מסובב (1) $ax^2+bxy+cy^2=d$

את (1) אפשר לרשום בצורה מטריצית (בדקו) (1*) $(x,y)\begin{pmatrix} a, & b/2 \\ b/2, & c\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y\end{pmatrix}=d$

$A=\begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c\end{pmatrix}$ מטריצה ממשית סימטרית $\Leftarrow$ לכסינה

כלומר דומה למטריצה אלכסונית $D=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}$ כאשר λ_1,λ_2 ממשיים

בנוסף אפשר להניח בלי הגבלת כלליות ש $\lambda_1\neq\lambda_2$

כי לפי מטריצה ממשית סימטרית 2x2 יקרה ש $\lambda_1=\lambda_2$ אז מ.מ. המטריצה סקלרית

ובמקרה כזה היא כבר אלכסונית $\Leftarrow$ העקום (1) כבר בצורה קנונית רצויה.

עתה A ממשית סימטרית $\Leftarrow$ קיימת מטריצה אורתוגונית $U=\begin{pmatrix} \cos\alpha, & -\sin\alpha \\ \sin\alpha, & \cos\alpha\end{pmatrix}$

כך ש: (2) $A=U\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}U^T$

מציבים (2) ב (1*) נקבל: (1**) $(x,y)U\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}U^T\begin{pmatrix} x \\ y\end{pmatrix}=d$

נגדיר שהסיבוב מערכת צירים הנתונה α קיים הקשר: $\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y}\end{pmatrix}=U^T\begin{pmatrix} x \\ y\end{pmatrix}$

ולכן גם:

$$(\tilde{x},\tilde{y})=\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y}\end{pmatrix}^T=\left[U^T\begin{pmatrix} x \\ y\end{pmatrix}\right]^T=(x,y)U$$

ונקבל ש: (1**) $(\tilde{x},\tilde{y})\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y}\end{pmatrix}=d$

נמצאנו בצורה קנונית רצויה: $\lambda_1\tilde{x}^2+\lambda_2\tilde{y}^2=d$

הערה

כדי לבצע את סדר העקום מספיק למצוא את הערכים λ_1,λ_2 של A
כדי למצוא את זווית הסיבוב צריך למצוא גם את המטריצה האורתוגונית U.

תרגיל 6:

לצרוב את העקום $5x^2+4xy+8y^2=16$ (*)

פתרון נכתוב בצורה מטריצית: $(x,y)\begin{pmatrix}5&2\\2&8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=16$ (*)

נמצא ע"ע של $A=\begin{pmatrix}5&2\\2&8\end{pmatrix}$ $\Leftarrow$ $\det(A-\lambda I)=(5-\lambda)(8-\lambda)-4=(\lambda-9)(\lambda-4)$

$\Leftarrow$ הע"ע של A הם $\lambda_1=9,\ \lambda_2=4$.

ונבנה שבמערכת $\tilde{x}\tilde{y}$ המתקבלת מסיבוב בצורה המתאימה נקבל

$$(\tilde{x},\tilde{y})\begin{pmatrix}9&0\\0&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{x}\\\tilde{y}\end{pmatrix}=16$$

$$\Leftrightarrow$$

$$9\tilde{x}^2+4\tilde{y}^2=16$$ משוואת אלפסה

בניית המטריצה האיזומטרית U וציור צורת הסיבוב

נמצא וקטורים עצמיים מתאימים: $V_1=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ וקטור עצמי של $\lambda_1=9$

$V_2=\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$ וקטור עצמי של $\lambda_2=4$

קל להבחין ש $V_1\perp V_2$

(וזה יקרה תמיד עבור A ממשית סימטרית 2×2 עם שני ע"ע שונים $\lambda_1\neq\lambda_2$)

עכשיו אותם כדי לקבל וקטורים באורך 1:

$$U_1=\begin{pmatrix}1/\sqrt5\\2/\sqrt5\end{pmatrix}\qquad U_2=\begin{pmatrix}-2/\sqrt5\\1/\sqrt5\end{pmatrix}$$

$\Leftarrow$ המטריצה האיזומטרית היא מטריצה שעמודותיה הן U_1 ! U_2

$$U=\begin{pmatrix}\cos\alpha&-\sin\alpha\\\sin\alpha&\cos\alpha\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/\sqrt5&-2/\sqrt5\\2/\sqrt5&1/\sqrt5\end{pmatrix}$$ $\Leftarrow$

$\Leftarrow$ $\begin{cases}\cos\alpha=1/\sqrt5\\ \sin\alpha=2/\sqrt5\end{cases}$ $\Leftarrow$ $\begin{cases}0<\alpha<\pi/2 & \text{(נמצאת ברבע I)}\\ tg\,\alpha=2\end{cases}$ $\Leftarrow$ צורת הסבב $\alpha=Arctg\,2$

תרגיל 7 לצרוב את העקום $5x^2+6x+4xy-12y+8y^2=7$

פתרון כדי לקבל צורה קנונית מסובבת נעתיק בהזזה: נניח $x=\tilde{x}-a$, $y=\tilde{y}-b$

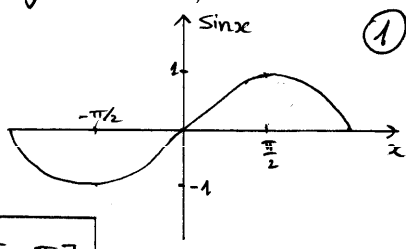
אחרי פתיחת סוגריים: $5\tilde{x}^2+(6-10a-4b)\tilde{x}+4\tilde{x}\tilde{y}+(-12-16b-4a)\tilde{y}+8\tilde{y}^2=7-5a^2+6a-12b-8b^2-4ab$

נדרוש שהמקדם של $\tilde{x}$ והמקדם של $\tilde{y}$ יתאפסו $\Leftarrow$ $a=1,\ b=-1$

ונסיים: $5\tilde{x}^2+4\tilde{x}\tilde{y}+8\tilde{y}^2=16$ ונמצא צורה קנונית מסובבת שבה סיפלנו בתרגיל (6).

פונקציות טריגונומטריות הפוכות (חצרה)

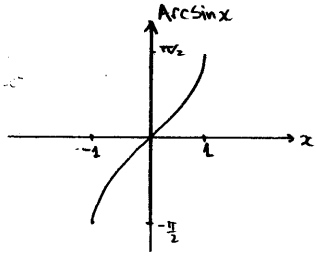
(1)



בתחום $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ היא עולה ממש

ויש לה שם פונקציה הפוכה Arcsin

$$\boxed{\text{Arcsin}\, x : [-1, 1] \longrightarrow [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}]}$$

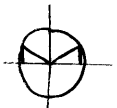


דוגמא: למצוא את כל הפתרונות של $\sin x = 1/2$

פתרון אחד: $x_1 = \text{Arcsin}\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$

זה הפתרון היחיד בקטע $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

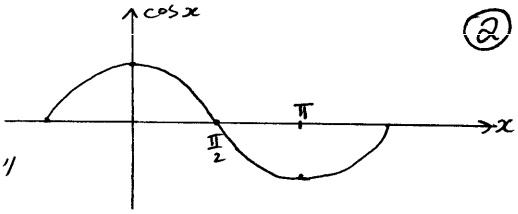
בתחום $[-\pi, \pi]$ יש פתרון נוסף $x_2 = \pi - x_1 = \frac{5\pi}{6}$



$\sin x = \sin(\pi - x)$

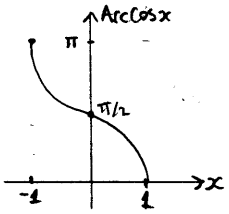
לסכום כל הפתרונות הם: $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$ או $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$

(2)



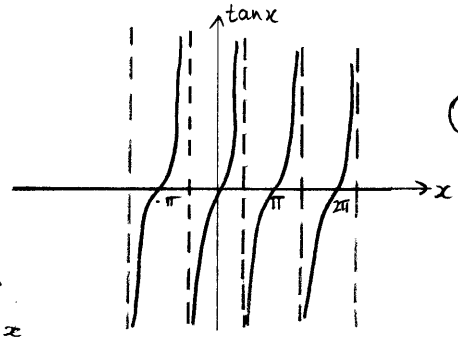
בתחום $[0, \pi]$ היא יורדת ממש

ויש לה שם פונקציה הפוכה Arccos x

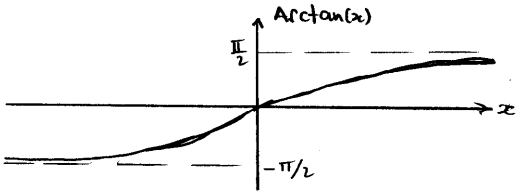


$$\boxed{\text{Arccos}\, x : [-1, 1] \longrightarrow [0, \pi]}$$

(3)



$$\boxed{\text{Arctan}(x) : (-\infty, \infty) \rightarrow (-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2})}$$



נגזרות

$$\text{Arcsin}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \text{Arccos}'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \text{Arctan}'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$