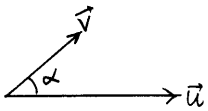
א. וקטורים במרחב. ב. קבוצות פתוחות \ סגורות \ קשירות

וקטורים

יהיו $\vec{u}=(u_1,u_2,u_3)$ $\quad \vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$ $\quad \vec{w}=(w_1,w_2,w_3)$

אורך של וקטור $|\vec{u}|=\sqrt{u_1^2+u_2^2+u_3^2}$ (לפעמים גם $\|\vec{u}\|$)

מכפלה סקלרית



$$\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\alpha=u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3$$

תכונות

$$\vec{u}\cdot\vec{u}=|\vec{u}|^2\ ,\quad \vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}\ ,\quad (\alpha\vec{u}+\beta\vec{v})\cdot\vec{w}=\alpha\vec{u}\cdot\vec{w}+\beta\vec{v}\cdot\vec{w}$$

כמו כן $\vec{u}\perp\vec{v} \iff \vec{u}\cdot\vec{v}=0$ (כאשר הוקטורים אינם וקטור האפס)

תרגיל 1 להוכיח את הזהויות הבאות:

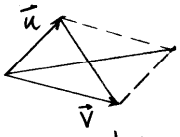
(א) $|\vec{u}+\vec{v}|^2+|\vec{u}-\vec{v}|^2=2(|\vec{u}|^2+|\vec{v}|^2)$ מה המשמעות הגאומטרית?

(ב) $\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{4}\left(|\vec{u}+\vec{v}|^2-|\vec{u}-\vec{v}|^2\right)$

פתרון נעזר בעובדה ש- $|\vec{w}|^2=\vec{w}\cdot\vec{w}$

(א)
$$|\vec{u}+\vec{v}|^2+|\vec{u}-\vec{v}|^2=(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v})+(\vec{u}-\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})=\vec{u}\cdot\vec{u}+\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}\cdot\vec{u}+\vec{v}\cdot\vec{v}+$$
$$+\vec{u}\cdot\vec{u}-\vec{u}\cdot\vec{v}-\vec{v}\cdot\vec{u}+\vec{v}\cdot\vec{v}=2(\vec{u}\cdot\vec{u}+\vec{v}\cdot\vec{v})=2(|\vec{u}|^2+|\vec{v}|^2)$$

משמעות גאומטרית: סכום ריבועי האלכסונים של מקבילית שווה לסכום ריבועי הצלעות.



(ב)
$$|\vec{u}+\vec{v}|^2-|\vec{u}-\vec{v}|^2=(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v})-(\vec{u}-\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})=$$
$$=|\vec{u}|^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}+|\vec{v}|^2-\left(|\vec{u}|^2-2\vec{u}\cdot\vec{v}+|\vec{v}|^2\right)=4\vec{u}\cdot\vec{v}$$

אי-שוויון קושי שוורץ $|\vec{u}\cdot\vec{v}|\le\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|$ יש שוויון אמ"מ $\vec{u},\vec{v}$ תלויים לינארית (על אותו ישר)

(*) באופן כללי ב- $\mathbb{R}^n$ אי-שוויון קושי שוורץ הוא: $\left|\sum_{k=1}^{n}u_kv_k\right|\le\sqrt{\sum_{k=1}^{n}u_k^2}\cdot\sqrt{\sum_{k=1}^{n}v_k^2}$

תרגיל 2 הוכיחו את שני אי-שוויון המשולש:

(א) $\|\vec{u}+\vec{v}\|\le\|\vec{u}\|+\|\vec{v}\|$ $\qquad$ (ב) $\left|\|\vec{u}\|-\|\vec{v}\|\right|\le\|\vec{u}-\vec{v}\|$

פתרון
$$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2=(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v})=\|\vec{u}\|^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}+\|\vec{v}\|^2\le\|\vec{u}\|^2+2|\vec{u}\cdot\vec{v}|+\|\vec{v}\|^2$$
$$\underset{\text{אי קושי שוורץ}}{\le}\|\vec{u}\|^2+2\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|+\|\vec{v}\|^2=\left(\|\vec{u}\|+\|\vec{v}\|\right)^2$$

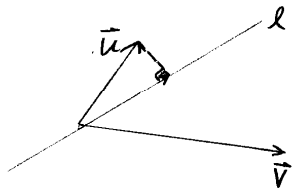
בסה"כ $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2\le\left(\|\vec{u}\|+\|\vec{v}\|\right)^2 \Longleftarrow \|\vec{u}+\vec{v}\|\le\|\vec{u}\|+\|\vec{v}\|$

אי השוויון (ב) שקול ל- $-\|\vec{u}-\vec{v}\|\le\|\vec{u}\|-\|\vec{v}\|\le\|\vec{u}-\vec{v}\|$

שני האגפים נובעים מ(א) למשל אגף ימין שקול ל- $\|\vec{u}\|\le\|\vec{v}\|+\|\vec{u}-\vec{v}\|$ (מה זה נובע מ-1 ?)

תרגיל 3 יהיו $\vec{u}=(1,2,3)$ $\vec{v}=(3,2,1)$

למצוא את ההיטל של $\vec{u}$ בכיוון הישר שהוא חוצה הזווית בין $\vec{u}$ ל $\vec{v}$



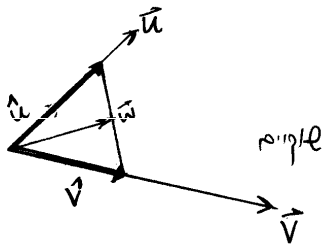
פתרון

נמצא תחילה את כיוון של חוצה הזווית

נעבור את שני הוקטורים:

$$\hat{u}=\frac{1}{\|\vec{u}\|}\vec{u}=\frac{1}{\sqrt{14}}(1,2,3)$$

$$\hat{v}=\frac{1}{\|\vec{v}\|}\vec{v}=\frac{1}{\sqrt{14}}(3,2,1)$$



שני וקטורי היחידה $\hat{u},\hat{v}$ פורשים משולש שווה שוקיים

חוצה הזווית הוא בכיוון הוקטור

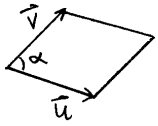
$$\vec{w}=\hat{v}+\frac{1}{2}(\hat{u}-\hat{v})=\frac{1}{2}(\hat{u}+\hat{v})=\frac{1}{\sqrt{14}}(2,2,2)$$

נעבור אותו ונקבל $\|\vec{w}\|=\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{14}} \Rightarrow \hat{w}=\frac{1}{\|\vec{w}\|}\vec{w}=\frac{1}{\sqrt{12}}(2,2,2)=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$

ההיטל של הוקטור $\vec{u}$ בכיוון חוצה הזווית הוא: $(\vec{u}\circ\hat{w})\hat{w}=(2,2,2)$

מכפלה וקטורית התוצאה הוא וקטור: $\vec{w}=\vec{u}\times\vec{v}$

אורכו של הוקטור הוא $\|\vec{u}\times\vec{v}\|=\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|\cdot|\sin\alpha|$



שדה זה שווה לשטח המקבילית שנפרשת ע"י $\vec{u}$ ו $\vec{v}$

כיוון של הוקטור הוקטור $\vec{w}=\vec{u}\times\vec{v}$ ניצב ל $\vec{u}$ ול-$\vec{v}$

ומשאת נקבעת לפי כלל היד הימנית.

תכונות $(\alpha\vec{u}+\beta\vec{v})\times\vec{w}=\alpha\vec{u}\times\vec{w}+\beta\vec{v}\times\vec{w}$, $\vec{u}\times\vec{v}=-\vec{v}\times\vec{u}$

בנוסף: $\vec{u}\parallel\vec{v}$ אזי $\vec{u}\times\vec{v}=0$ (בפר) $(\vec{u}\times\vec{u}=0)$

$$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{k} & \hat{j}\\ u_1 & u_2 & u_3\\ v_1 & v_2 & v_3\end{vmatrix}$$

תרגיל 4

(א) לחשב את שטח המשולש שקודקודיו הם $P_1:(1,2,3)$, $P_2:(3,2,1)$, $P_3:(1,1,1)$

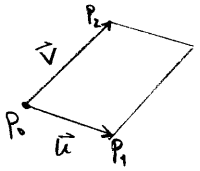
(ב) יהיו $\vec{u}$ $\vec{v}$ שני וקטורים ב $\mathbb{R}^3$ אשר $\|u\|=4$ $\|\vec{v}\|=2$

והזווית ביניהם היא $30°$. חשבו את שטח המשולש שנפרש ע"י שני הוקטורים

$\vec{a}=3\vec{u}-5\vec{v}$ $\vec{b}=7\vec{u}+4\vec{v}$

פתרון

(א) נתבונן בשני הוקטורים



$$\vec{u} = P_1 - P_0 = (2,1,0)$$
$$\vec{v} = P_2 - P_0 = (0,1,2)$$

שטח המקבילית שבה פרשים הוא $\|\vec{u}\times\vec{v}\|$

ושטח המשולש המבוקש הוא בדיוק חצי השטח הנ"ל.

$$\vec{u}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2\hat{i} - 4\hat{j} + 2\hat{k}$$

ולכן: $S_A = \frac{1}{2}\|\vec{u}\times\vec{v}\| = \frac{1}{2}\sqrt{24} = \sqrt{6}$

(ב) שטח המשולש שנפרש ע"י הוקטורים $\vec{a},\vec{b}$ הוא $\frac{1}{2}\|\vec{a}\times\vec{b}\|$

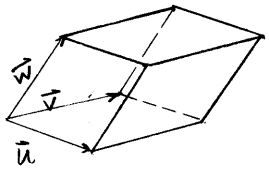
$$\vec{a}\times\vec{b} = (3\vec{u}-5\vec{v})\times(7\vec{u}+4\vec{v}) = 21\,\cancelto{0}{\vec{u}\times\vec{u}} + 12\vec{u}\times\vec{v} - 35\vec{v}\times\vec{u} - 20\cancelto{0}{\vec{v}\times\vec{v}}$$
$$= 47\,\vec{u}\times\vec{v}$$

ולכן $S_A = \frac{1}{2}\|\vec{a}\times\vec{b}\| = \frac{1}{2}\|47\vec{u}\times\vec{v}\| = \frac{1}{2}\cdot 47\,\underset{4}{\|\vec{u}\|}\cdot\underset{2}{\|\vec{v}\|}\cdot\underset{1/2}{|\sin\alpha|} = 94$

מכפלה מעורבת

$$\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w}) = (\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{w} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

התוצאה היא סקלר שווה בערכו המוחלט לנפח המקבילון שנפרש ע"י $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$



$(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{w} = 0$ אומר שלושת הוקטורים תלויים לינארית (באותו מישור)

תרגיל 5

להוכיח ש $(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{u} = (\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{v} = 0$

פתרון (הוכחה 4 הסברים:

(1) הוקטור $\vec{w}=\vec{u}\times\vec{v}$ נוצר ע"י $\vec{u}$ וגם ל $\vec{v}$ $\Leftarrow$ $\vec{w}\cdot\vec{u} = \vec{w}\cdot\vec{v} = 0$

(2) $(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{u} = -(\vec{v}\times\vec{u})\cdot\vec{u} = -\vec{v}\cdot\underset{0}{(\vec{u}\times\vec{u})} = 0$ ובאופן דומה $(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{v} = 0$

(3) $(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{u} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix} = 0$ וכנ"ל גם $(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{v} = 0$

(4) שלושת הוקטורים $\vec{u},\vec{v},\vec{u}$ תלויים לינארית $\Leftarrow$ המקבילון שבהם פרשם הוא מעיין $\Leftarrow$ שטחו אפס.

הקישור של ישרים ומישורים במרחב יתורגל במעבדת Mathnet

הגדרות פתיחות קבוצות סגירות הגבולות קשירות והגדרות חסימות

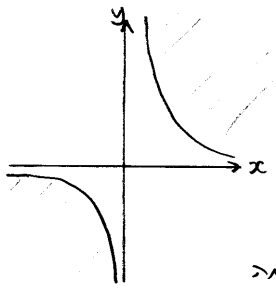
תרגיל 6 לפניכם כמה מהקבוצות הבאות לקבוע האם היא קבוצה פתוחה, קבוצה סגורה קבוצה קשירה, קבוצה חסומה.

(א) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid xy\geq 1\}$ (ב) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \frac{x}{x^2+y^2}\geq 1\}$

(ג) תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x,y,z)=\frac{1}{xyz}$

(ד) תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x,y,z)=\frac{xyz}{(x^2+y^2)(x^2+z^2)(y^2+z^2)}$

(ה) $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid z=-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\}$

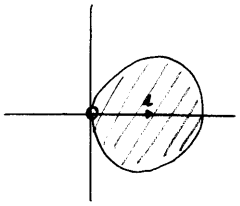


פתרון

(א) השוויון $xy=1$ מתקיים על ההיפרבולה

$\Leftarrow$ אי השוויון $xy\geq 1$ מגדיר קבוצה לא פתוחה, כן סגורה, לא קשירה ולא חסומה

(ב) $\frac{x}{x^2+y^2}\geq 1 \iff \begin{cases}(x,y)\neq(0,0)\\ x\geq x^2+y^2\end{cases} \iff \begin{cases}(x,y)\neq(0,0)\\ 1\geq (x-1)^2+y^2\end{cases}$



מעגל בעיגול שמרכזו ב $(1,0)$ ורדיוסו 1 כולל שפתו ולא הנקודה $(0,0)$ שעל השפה

קבוצה זו: לא פתוחה, לא סגורה, קשירה וחסומה.

(ג) הפונקציה איננה מוגדרת אם $xyz=0$ כלומר אם $x=0$ (מישור yz) או $y=0$ (מישור xz) או $z=0$ (מישור xy)

תחום ההגדרה הוא כל המרחב $\mathbb{R}^3$ פחות שלושת המישורים הנ"ל.

כאן קבוצה: פתוחה, לא סגורה, לא חסומה ולא קשירה.

(ד) הפונקציה איננה מוגדרת אם: $x=y=0$ (ציר z) או $x=z=0$ (ציר y) או $y=z=0$ (ציר x)

תחום ההגדרה הוא כל המישור $\mathbb{R}^3$ פחות שלושת הצירים. קבוצה כזו היא: פתוחה, לא סגורה, קשירה, לא חסומה.

א. וקטורים במרחב. ב. קבוצות פתוחות \ סגורות \ קשירות

(ה) השוויון $z = -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ מגדיר ב $\mathbb{R}^3$ משטח ריבועי

(הקבוצה שקיבלה ע"י $P(x,y,z)=0$ → פולינום בשלושה משתנים מעלה 2)

*הרעיון בציור משטחים כללי הוא לחתוך אותם עם מישורים כגון:

$z=c$ (מישור מקביל למישור xy)

$y=c$ (מישור מקביל למישור xz)

$x=c$ (מישור מקביל למישור yz)

כל חיתוך כזה יתן עקומה ריבועית מישורית אחרי שנבנה עקומות אלו ניסה לשרטט את המשטח כולו.

(*) במקרה הספציפי הנתון, המשטח $z = -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$

הוא גם גרף של פונקציה: $z = f(x,y)$

ולכן נתחיל בציור קווי הגובה של הפונקציה: $f(x,y)$

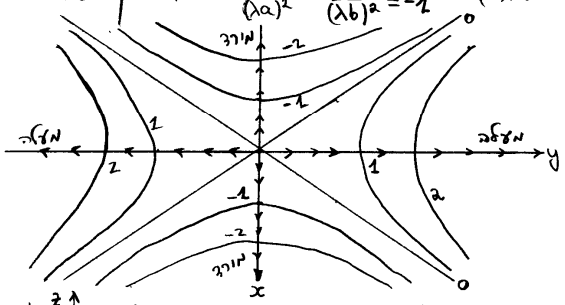
$$f(x,y)=c \iff -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = c$$

(1) אם $c=0$ מקבלים שני ישרים: $y = \pm \frac{b}{a}\cdot x$

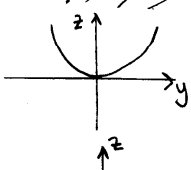
(2) אם $c=-\lambda^2<0$ נקבל היפרבולה $\frac{x^2}{(\lambda a)^2} - \frac{y^2}{(\lambda b)^2} = 1$ עם אסימפטוטות $y=\pm\frac{b}{a}x$

(3) אם $c=+\lambda^2>0$ נקבל היפרבולה (דמויה) $\frac{x^2}{(\lambda a)^2} - \frac{y^2}{(\lambda b)^2} = -1$ עם אותן אסימפטוטות

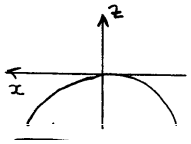
מפת קווי הגובה:



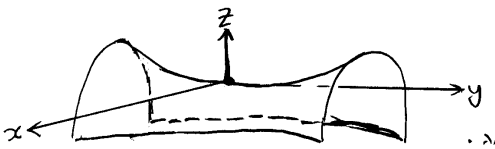
חיתוך של המשטח עם מישור yz $(x=0)$ <= $z=\frac{y^2}{b}$ פרבולה



חיתוך של המשטח עם מישור xz $(y=0)$ <= $z=-\frac{x^2}{a^2}$ פרבולה



המשטח הוא משטח אוכף



מסקנה: הקבוצה הנתונה (ב $\mathbb{R}^3$) הוא סגורה, לא פתוחה, קשירה ולא תמומה.