רציפות, נגזרות חלקיות ודיפרנציאבליות.

רציפות, נגזרות חלקיות ודיפרנציאבליות

תהא: $f(\underline{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) : D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ פונקציה של n משתנים

שמוגדרת בסביבה U של הנקודה: $\underline{x}^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ (כולל בנקודה)

$$\boxed{\text{הנגזרות החלקיות של } f \text{ קיימות בכל הסביבה } U \text{ ורק רציפות בנקודה } \underline{x}^0}$$

(תנאי מספיק לדיפרנציאבילי בנקודה)

$$\Downarrow \qquad \not\Uparrow$$

$$\boxed{f \text{ דיפרנציאבילי בנקודה } \underline{x}^0}$$

$$\not\Uparrow \qquad \Downarrow \qquad \not\Downarrow \qquad \not\Uparrow$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{הנגזרות החלקיות של } f \\ \text{קיימות בנקודה } \underline{x}^0\end{array}} \quad \begin{array}{c}\not\Rightarrow \\ \not\Leftarrow\end{array} \quad \boxed{\begin{array}{c}f \text{ רציפה בנקודה} \\ \underline{x}^0\end{array}}$$

(תנאי הכרחי לדיפרנציאבילות בנק')

(תנאי מספיק לדיפרנציאבילות בנק')

תרגיל 1

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4 y}{x^4+y^2} & , (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

נבדוק לגבי נכון

(א) $f(x,y)$ רציפה ב $(0,0)$ (ב) $f'_y(x,y)$ רציפה ב $(0,0)$

(ג) $f(x,y)$ דיפרנציאבילי ב $(0,0)$

פתרון

(א) השאלה היא האם $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^4 y}{x^4+y^2} \overset{?}{=} 0$

ותשובה היא שכן כי אם נסמן $u=x^2$, $v=y$ נקבל את הגבול $\lim\limits_{\substack{u\to 0^+\\ v\to 0}} \dfrac{u^2 v}{u^2+v^2}$

ומתקיים: $(\forall (u,v)\neq(0,0))$:

$$0 \leq \left|\frac{u^2 v}{u^2+v^2}\right| = \frac{|u|^2 \cdot |v|}{R^2} \leq \frac{R^3}{R^2} = R \xrightarrow[\substack{u\to 0^+\\ v\to 0}]{} 0$$

(ב) עבור $(x,y)\neq(0,0)$ הנגזרת החלקית של $f(x,y)$ לפי y היא

$$f'_y(x,y) = \frac{x^4(x^4+y^2) - 2y\,x^4 y}{(x^4+y^2)^2} = \frac{x^4(x^4-y^2)}{(x^4+y^2)^2}$$

ב $(0,0)$ נגזור לפי ההגדרה:

$$f'_y(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{0-0}{y} = 0$$

כלומר:

$$f'_y(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4(x^4-y^2)}{(x^4+y^2)^2} & , (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & , (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

רציפות, נגזרות חלקיות ודיפרנציאבליות.

השאלה היא האם $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^4(x^4-y^2)}{(x^4+y^2)^2} \overset{?}{=} 0$

נציב $u=x^2, v=y$ ונקבל את הגבול: $\lim\limits_{\substack{u\to 0^+\\ v\to 0}} \frac{u^2(u^2-v^2)}{(u^2+v^2)^2}$

ניתן לבדוק לאורך מסלולים כגון $v=ku$ ונקבל:

$$\lim_{u\to 0^+} \frac{u^2(u^2-k^2u^2)}{(u^2+k^2u^2)^2} = \lim_{u\to 0^+} \frac{u^4(1-k^2)}{u^4(1+k^2)^2} = \frac{1-k^2}{(1+k^2)^2}$$

ביטוי שתלוי ב-k

כלומר $f'_y(x,y)$ אינה רציפה ב-$(0,0)$

(ב) הנקודה המסוכנת לפרנציאבליות של $f(x,y)$ ב $(0,0)$ אינן מתקיים כי $f'_y(x,y)$ אינה רציפה שם.

הנגזרות ההכרחיות ה-I: רציפות ב $(0,0)$ מתקיים

הנגזרות ההכרחיות ה-II: קיומן נגזרות חלקיות ב $(0,0)$ מתקיים: ראינו ש $f'_y(0,0)=0$

ומנגזרת: $f'_x(0,0) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{0-0}{x} = 0$

נבדוק דיפרנציאבליות ב-$(0,0)$ עפ"י ההגדרה (למעשה עפ"י קריטריון שקול להגדרה)

השאלה היא האם: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{f(x_0+x,y_0+y)-f(x_0,y_0)-f'_x(x_0,y_0)\cdot x - f'_y(x_0,y_0)\cdot y}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} \overset{?}{=} 0$

ועבור $(x_0,y_0)=(0,0)$, $f'_x(0,0)=f'_y(0,0)=0$ נקבל:

$$(*)\quad \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{f(x,y)-f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^4 y}{(x^4+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} \overset{?}{=} 0$$

לכל $(x,y)\neq(0,0)$ מתקיים:

$$0 \le \left|\frac{x^4 y}{(x^4+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}\right| = \frac{|x|^4\cdot|y|}{(x^4+y^2)\cdot\sqrt{x^2+y^2}}$$

כדי לבדוק ביטוי כזה נעזרים באי-שוויון הממוצעים:

$$\sqrt{x^4 y^2} \le \frac{x^4+y^2}{2} \Rightarrow 2|x|^2\cdot|y| \le x^4+y^2$$ ומכאן ש:

$$\frac{|x|^4\cdot|y|}{(x^4+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} \le \frac{|x|^4\cdot|y|}{2|x|^2\cdot|y|\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{|x|^2}{2\sqrt{x^2+y^2}} \le \frac{R^2}{2R} \xrightarrow[\substack{x\to 0\\ y\to 0}]{} 0$$

מקיימים מכנה

לכן לפי סנדוויץ', הגבול (*) אכן שווה אפס והפונקציה דיפרנציאבלית ב $(0,0)$

תרגיל 2

$$f(x,y,z)=\begin{cases} \frac{x^3y^2z}{(x^2+y^2+z^2)^\alpha}, & (x,y,z)\neq(0,0,0) \\ 0, & (x,y,z)=(0,0,0)\end{cases}$$

עבור אילו ערכים של α מתקיימים התנאים הבאים בנקודה $(0,0,0)$:

(א) f רציפה (ב) קיימות נגזרות מכוונות בכל כיוון (ג) f דיפרנציאבלית.

פתרון

(א) השאלה היא לגבי אילו ערכים של α מתקיים: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0\\ z\to 0}} \frac{x^3y^2z}{(x^2+y^2+z^2)^\alpha} = 0$ (*)

אם נשים: (לגבי $(x,y,z)\neq(0,0,0)$)

$$0 \le \left|\frac{x^3y^2z}{(x^2+y^2+z^2)^\alpha}\right| = \frac{|x|^3\cdot|y|^2\cdot|z|}{R^{2\alpha}} \le \frac{R^6}{R^{2\alpha}} = R^{2(3-\alpha)}$$

נקבל שלגבי $\alpha<3$ מתקיים (*)

מצד שני, אם נקח $x=y=z$ נקבל: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^6}{3^\alpha\cdot x^{2\alpha}} = \frac{1}{3^\alpha}\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x^3}{x^\alpha}\right)^2$

ואם $\alpha\ge 3$ הגבול לא יהיה אפס

$\Leftarrow$ $f(x,y,z)$ רציפה ב-$(0,0,0)$ אמ"מ $\alpha<3$

(ב) יהי $\hat{n}=(n_1,n_2,n_3)$ וקטור יחידה כלשהו, אז לפונקציה $f(x,y,z)$ יש נגזרת מכוונת בכיוון $\hat{n}$ בנקודה $(0,0,0)$ אמ"מ קיים הגבול:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+n_1h,\ 0+n_2h,\ 0+n_3h)-f(0,0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{n_1^3n_2^2n_3\cdot h^6}{|\hat{n}|^2\cdot h^{2\alpha}}\cdot\frac{1}{h}$$

$$= n_1^3n_2^2n_3\lim_{h\to 0}\frac{h^5}{h^{2\alpha}}$$

התנאי הוא לכן: $2\alpha\le 5 \iff \alpha\le 2.5$

(ג) הנגזרת לפי סעיף ב' אפשר לראות שאם $\alpha>2.5$ אז הפונקציה אינה דיפרנציאבילית ב-$(0,0,0)$ (כי לפונקציה דיפרנציאבילית יש נגזרות מכוונות בכל כיוון).

אבל כדי להגיע לתשובה מדויקת נבדוק דיפרנציאבילית עפ"י ההגדרה:

השאלה היא לגבי אילו ערכים של α מתקיים:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0\\ z\to 0}}\frac{f(x,y,z)-f(0,0,0)-f'_x(0,0,0)\cdot x-f'_y(0,0,0)\cdot y-f'_z(0,0,0)\cdot z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = 0 \quad (**)$$

נחשב נגזרות חלקיות ב-$(0,0,0)$:

$$f'_x(0,0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0,0)-f(0,0,0)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{0-0}{x}=0$$

ובאופן דומה גם $f'_y(0,0,0)=f'_z(0,0,0)=0$

ומקבלים את הגבול:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0\\ z\to 0}}\frac{x^3y^2z}{(x^2+y^2+z^2)^{\alpha+1/2}}$$

עפ"י הערכה הסנדוויצ'ית:

$$0 \le \left| \frac{x^3 y^2 z}{(x^2+y^2+z^2)^{\alpha+1/2}} \right| \le \frac{R^6}{R^{2\alpha+1}}$$

נקבל שאם $2\alpha+1 < 6 \iff \alpha < 2.5$ אז הגבול שווה אפס $\Leftarrow$ f דיפרנציאבילי

ובמידה שזו לא נקרה $x=y=z$ נקבל: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^6}{3^{\alpha+\frac{1}{2}} \cdot x^{2\alpha+1}} = \frac{1}{3^{\alpha+1/2}} \lim\limits_{x\to 0} \frac{x^6}{x^{2\alpha+1}}$

ואם $6 \le 2\alpha+1 \iff 2.5 \le \alpha$ אז הגבול האחרון <u>איננו שווה אפס</u> $\Leftarrow$ f לא דיפרנציאבילי

<u>כלומר: $f(x,y,z)$ דיפרנציאבילי ב$(0,0,0)$ א.מ.מ. $\alpha < 2.5$</u>

<u>תרגיל 3</u>

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin^3 x + \alpha x y^2}{x^2+y^2} & , (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

למצוא את כל הערכים של α שעבורם:

(א) $f(x,y)$ רציפה ב$(0,0)$ (ב) $f(x,y)$ דיפרנציאבילי בכל המישור

(ג) $f(x,y)$ בעלת נגזרות מכוונות בכל כיוון בנק' $(0,0)$.

<u>פתרון</u>

(א) השאלה היא לגבי אילו ערכים של α מתקיים $(*)\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\sin^3 x + \alpha x y}{x^2+y^2} = 0$

מכיוון ש $|\sin x| \le |x|$ אז לכל $(x,y) \neq (0,0)$ מתקיים:

$$0 \le \left| \frac{\sin^3 x + \alpha x y}{x^2+y^2} \right| \le \frac{|\sin x|^3 + |\alpha| \cdot |x| \cdot |y|}{x^2+y^2} \le \frac{R^3 + |\alpha| \cdot R^3}{R^2} = R(1+\alpha) \xrightarrow[\substack{x\to 0\\ y\to 0}]{} 0$$

ומכאן ש$(*)$ מתקיים <u>לכל ערך של α</u>

(ב) לפי סעיף ג' לכל α הפונקציה $f(x,y)$ רציפה בכל $\mathbb{R}^2$.

כמו כן, לגבי נקודה $(x_0,y_0) \neq (0,0)$ כלשהי קל לראות שקיימת סביבה של (x_0,y_0) שבה הנגזרות החלקיות $f'_x(x,y), f'_y(x,y)$ מתקבלות מנגזרות הבלוי $\frac{\sin^3 x + \alpha x y}{x^2+y^2}$ לפי x או לפי y הן <u>בטוח רציפות</u> מה שמבטיח דיפרנציאבילי ב- (x_0,y_0).

כך נכון לכל α ולכל $(x,y) \neq (0,0)$ ולכן נרצה להדגיש דיפרנציאבילי ב $(0,0)$

נחשב נגזרות חלקיות $f'_x(0,0), \quad f'_y(0,0)$

רציפות, נגזרות חלקיות ודיפרנציאבליות.

$$f'_x(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin^3 x}{x^2}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^3 x}{x^3}=1$$

$$f'_y(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{0-0}{0}=0$$

הפונקציה דיפרנציאבילית ב $(0,0)$ א.ו.מ.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{f(x,y)-f(0,0)-f'_x(0,0)\cdot x-f'_y(0,0)\cdot y}{\sqrt{x^2+y^2}}=0 \qquad (**)$$

$$\Longleftrightarrow \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\frac{\sin^3 x+\alpha xy^2}{x^2+y^2}-x}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\sin^3 x+\alpha xy^2-x^3-xy^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}=0$$

בשלב זה הייתי רוצים להיעזר ב $\sin^3 x \sim x^3$ ומסתכן לפרוש ש:

$$(***)\quad \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}(\alpha-1)=0$$

אבל בדרך לכולם יותר מקוריים ולהשתמש בפיתוח הבא:

$$\left(\sin x=x+o(x^2)\ \text{זה כמו}\right)\qquad \sin x=x+O(x^3) \Longleftarrow \sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\dots$$

$$\sin^3 x=\left(x+O(x^3)\right)^3=x^3+\underbrace{3x^2O(x^3)}_{O(x^5)}+3x\cdot O(x^6)+O(x^9)$$

כלומר $\sin^3 x=x^3+O(x^5)$ ומכאן שלכל $(x,y)\neq(0,0)$ אפשר לרשום:

$$0\le\left|\frac{\sin^3 x-x^3}{(x^2+y^2)^{3/2}}\right|=\frac{|O(x^5)|}{R^3}\le\frac{O(R^5)}{R^3}\xrightarrow[\substack{x\to 0\\ y\to 0}]{}0$$

ולכן הגבול $(**)$ שווה אפס א.ו.מ. $\quad (***)\ \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}(\alpha-1)=0$

הכרח ש $\alpha=1$ הוא תנאי מספיק

והוא אם תנאי הכרחי כי לכל $y=x$ נקבל: $\lim_{x\to 0}\frac{x^3(\alpha-1)}{\sqrt{8}\,x^3}=\frac{\alpha-1}{\sqrt{8}}$

בסה"כ $f(x,y)$ דיפרנציאבילית ב $(0,0)$ א.ו.מ. $\alpha=1$

(d) השאלה לגבי אלו ערכים של α, לכל וקטור יחידה $\hat{n}=(n_1,n_2)$ קיים הגבול

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(n_1h,n_2h)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sin^3(n_1h)+\alpha n_1n_2^2h^3}{|\hat{n}|^2\cdot h^3}$$

והתשובה היא שהגבול הנ"ל קיים לכל α.