נקודות קיצון, ונקודות קיצון תחת אילוצים.

תרגיל 1 למצוא נקודות אקסטרמום של: $u(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$

פתרון

נקודות קריטיות (=נקודות "חשודות") הן אלו שהקו:
$$\begin{cases} u'_x(x,y) = 0 \\ u'_y(x,y) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 3y = 0 \\ 3y^2 - 3x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = y \\ y^2 = x \end{cases} \Leftrightarrow (0,0) \text{ ו } (1,1)$$

מכיוון ש: $u(x,y) \in C^2$ אז אפשר לבדוק האם כל אחת מהנקודות הנ"ל היא נקודת מקסימום\מינימום מקומי או נקודת אוכף ע"י בדיקת מטריצת ההסיאן:

$$H = \begin{pmatrix} u_{xx}, & u_{xy} \\ u_{xy} & u_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix}$$

$$H|_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \qquad H_{(1,1)} = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$$

מטריצת ההסיאן שונה מאפס =>

(*) אם H מוגדרת חיובית (להלן) אז הנקודה הקריטית תהיה נק' מינימום מקומי

(*) אם H מוגדרת שלילית (להלן) אז הנקודה הקריטית תהיה נק' מקסימום מקומי

(*) אם הסימן של H איין מוגדר אז הנקודה הקריטית היא נקודת אוכף

<u>מבחן סילבסטר למיון מטריצה סימטרית 2x2</u> תהא $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \neq 0$

(1) אם $|A| > 0$ אז:

$a>0 \Leftarrow$ A חיובית (להלן), $a<0 \Leftarrow$ A שלילית (להלן)

(2) אם $|A| < 0$ אז הסימן של A איין מוגדר

(*) שימו לב שאשר $|A| = 0$ המבחן לא מספק אינפורמציה

בדוגמה שלנו:

$H|_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \Leftarrow \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = -9 < 0 \Leftarrow$ הסימן איין מוגדר $\Leftarrow$ <u>$(0,0)$ אוכף</u>

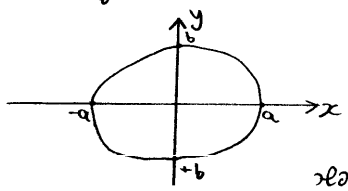
$H|_{(1,1)} = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} \Leftarrow \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} = 27 > 0$, $a_{11} = 6 > 0 \Leftarrow$ מטריצה חיובית להלן

$\Leftarrow$ <u>$(1,1)$ מינימום מקומי</u>

תרגיל 2

למצוא את נקודות האקסטרמום של הפונקציה $u(x,y) = xy\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$

בתרגול תחום ההגדרה של הפונקציה הוא התחום שבולמה האלפסה $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$



$u(x,y)$ רציפה בתחום זה (עד השפה)

והפנים של התחום היא מחלקה C^∞

יחד עם כן, על שפת התחום הפונקציה מתאפסת ולכן אפשר להתעניין רק במציאת נקודות אקסטרמום פנימיות (אבל כדי למצוא מקס' ומינימום גלובלים צריך בסוף לבדוק את השפה בהשמה)

הנקודות הקריטיות בפנים של התחום הן אלו שבהן:

$$\begin{cases} u'_x(x,y)=0 \\ u'_y(x,y)=0 \end{cases} \iff \begin{cases} y\sqrt{} + xy\cdot\dfrac{-\frac{2x}{a^2}}{2\sqrt{}}=0 \\ x\sqrt{} + xy\cdot\dfrac{-\frac{2y}{b^2}}{2\sqrt{}}=0 \end{cases} \iff \begin{cases} \dfrac{y\left(1-2\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)}{\sqrt{}}=0 \\ \dfrac{x\left(1-\frac{x^2}{a^2}-2\frac{y^2}{b^2}\right)}{\sqrt{}}=0 \end{cases}$$

המערכת האחרונה שקולה ל-

$$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \quad \text{או} \quad \begin{cases} y=0 \\ 1-\frac{x^2}{a^2}-2\frac{y^2}{b^2}=0 \end{cases} \iff \begin{cases} y=0 \\ x=\pm a \end{cases}$$

$$\text{או} \quad \begin{cases} 1-2\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0 \\ x=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=0 \\ y=\pm b \end{cases}$$

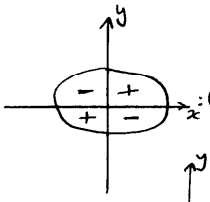
$$\text{או} \quad \begin{cases} 1-2\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0 \\ 1-\frac{x^2}{a^2}-2\frac{y^2}{b^2}=0 \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{y^2}{b^2}=1-2\frac{x^2}{a^2} \\ 1-\frac{x^2}{a^2}-2+4\frac{x^2}{a^2}=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2=\frac{a^2}{3} \\ y^2=b^2/3 \end{cases}$$

נקודות על השפה ולכן לא נחקור אותן.

הנקודות הקריטיות בפנים התחום הן:

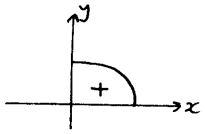
$$(0,0),\ \left(\frac{a}{\sqrt3},\frac{b}{\sqrt3}\right),\ \left(-\frac{a}{\sqrt3},\frac{b}{\sqrt3}\right),\ \left(\frac{a}{\sqrt3},-\frac{b}{\sqrt3}\right),\ \left(-\frac{a}{\sqrt3},-\frac{b}{\sqrt3}\right)$$

הנקודה (0,0) היא נקודת אוכף



כי $u(0,0)=0$ ובנוסף הסימן של $u(x,y)$ הוא בהתאם לשרטוט:

הנקודות $\left(\frac{a}{\sqrt3},\frac{b}{\sqrt3}\right)$! $\left(-\frac{a}{\sqrt3},-\frac{b}{\sqrt3}\right)$ הן נקודות מקסימום



הסבר: נתבונן בחלק של התחום שמוכל ברבע ה-I

מלבד בתחום סגר וחסום ולכן הפונקציה הרציפה $u(x,y)$ מקבלת בו מינימום ומקסימום.

על האלפסה הלא רצויים $u(x,y)=0$ ואילו בפנים של תחום זה $u(x,y)>0$ ⇐ המינימום מתקבל על השפה והמקס בנקודה הקריטית הפנימית: $\left(\frac{a}{\sqrt3},\frac{b}{\sqrt3}\right)$.

באופן דומה הנקודות $\left(-\frac{a}{\sqrt3},\frac{b}{\sqrt3}\right)$! $\left(\frac{a}{\sqrt3},-\frac{b}{\sqrt3}\right)$ הן נקודות מינימום

תרגיל 3 למצוא נקודות אקסטרמום של $u(x,y,z) = xy^2z^3(1-x-2y-3z)$

בתחום $x,y,z>0$

פתרון התחום הוא הפנים של האוקטנט הראשון. זה תחום פתוח שבו $u \in C^\infty$.

נמצא נקודות קריטיות:

$$\begin{cases} u'_x(x,y,z)=0 \\ u'_y(x,y,z)=0 \\ u'_z(x,y,z)=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y^2z^3(1-x-2y-3z)-xy^2z^3=0 \\ 2xyz^3(1-x-2y-3z)-2xy^2z^3=0 \\ 3xy^2z^2(1-x-2y-3z)-3xy^2z^3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2z^3(1-2x-2y-3z)=0 \\ 2xyz^3(1-x-3y-3z)=0 \\ 3xy^2z^2(1-x-2y-4z)=0 \end{cases}$$

ובתחום $x,y,z>0$ זה שקול ל-

$$\begin{cases} 2x+2y+3z=1 \\ x+3y+3z=1 \\ x+2y+4z=1 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=z=1/7$$

כדי לבדוק האם הנקודה הקריטית $(\frac{1}{7},\frac{1}{7},\frac{1}{7})$ נחשב את ההסיאן באותה נקודה

$$H=\begin{pmatrix} u_{xx} & u_{xy} & u_{xz} \\ u_{yx} & u_{yy} & u_{yz} \\ u_{zx} & u_{zy} & u_{zz} \end{pmatrix}$$

מקבלים:

$$H\Big|_{(\frac{1}{7},\frac{1}{7},\frac{1}{7})} = \frac{-1}{7^5}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 6 \\ 3 & 6 & 12 \end{pmatrix}$$

מבחן סילבסטר למיון מטריצה סימטרית חצות

תהא A מטריצה סימטרית חצות

(*) אם כל המינורים הראשיים של A חיוביים אז A מוגדרת חיובית (למלכין)

(*) אם המינורים הראשיים בעלי סימנים מתחלפים ! $a_{11}<0$

אז A מוגדרת שלילית (למלכין)

במקרה שלנו המינורים הראשיים של המטריצה $\frac{-1}{7^5}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 6 \\ 3 & 6 & 12 \end{pmatrix}$ הם

$$M_1 = a_{11} = \frac{-2}{7^5} < 0, \quad M_2 = \det\left\{\frac{-1}{7^5}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}\right\} = \frac{1}{7^{10}}\cdot 8 > 0$$

$$M_3 = \det(A) = \frac{-1}{7^{15}}\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 6 \\ 3 & 6 & 12 \end{vmatrix} = \frac{-48}{7^{15}} < 0$$

המינורים בעלי סימנים מתחלפים ומתחילים ב $M_1 = a_{11} < 0$ $\Leftarrow$ המטריצה שלילית (למלכין)

$\Leftarrow$ הנקודה $(\frac{1}{7},\frac{1}{7},\frac{1}{7})$ היא נקודת מקסימום מקומי

ערכי קיצון תחת אילוצים

תרגיל 4 למצוא נקודות קיצון של $f(x,y,z)=xy^2z^2$ על המישור $x+y+z=13$

שאלה נניח ש (x_0,y_0,z_0) היא נקודה על המישור שבה $f(x,y,z)$ מקבלת את הערך המקסימלי שלה על המישור, האם בהכרח:

$$\begin{cases} f'_x(x_0,y_0,z_0)=0 \\ f'_y(x_0,y_0,z_0)=0 \\ f'_z(x_0,y_0,z_0)=0 \end{cases}$$

תשובה לא - כי יתכן שקיימת נקודת בסביבה של (x_0,y_0,z_0) שאינן על המישור שבהן $f(x,y,z)$ מקבלת ערך גדול יותר מאשר ב (x_0,y_0,z_0) $\Leftarrow$ כאשר אין נקודת אקסטרמום מקומי (והנגזרות לא בהכרח יתאפסו)

פתרון

כדי למצוא נקודות קיצון של $f(x,y,z)$ תחת האילוץ: $x+y+z=13$ (*)

נלפי (*) $\Leftarrow$ $x=13-y-z$ ומכאן שצריך למצוא מינימום/מקסימום של הביטוי

$g(y,z)=(13-y-z)y^2z^2$ (עבור $(y,z)\in\mathbb{R}^2$)

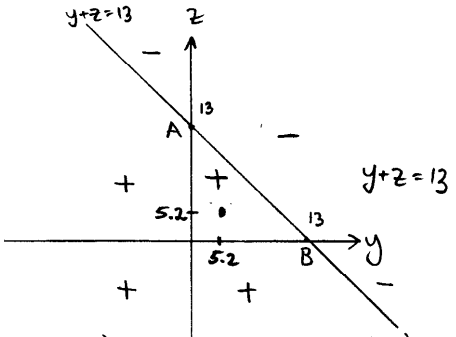
נמצא נקודות קריטיות של $g(y,z)$ ב $\mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} g'_y(y,z)=0 \\ g'_z(y,z)=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -y^2z^2+(13-y-z)2yz^2=0 \\ -y^2z^2+(13-y-z)2y^2z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} yz^2(26-3y-2z)=0 \\ y^2z(26-2y-3z)=0 \end{cases}$$

$y=0$ או $z=0$ או $\begin{cases} 3y+2z=26 \\ 2y+3z=26 \end{cases}$

$\Leftrightarrow$ $y=z=5.2$



הפונקציה $g(y,z)=(13-y-z)y^2z^2$ מתאפסת על ציר y על ציר z ועל הישר $y+z=13$ מחוצה לשלש היא חיובית ומעליו שלילית

$\Leftarrow$ בנקודה $(0,0)$ נקודת מינימום מקומית כי $g(0,0)=0$ ובסביבת הנקודה $g(x,y)\geq 0$

בנקודה $(5.2,5.2)$ נקודת מקס מקומית כי היא חייבת להיות נקודת המקס שמקבלת $g(x,y)$ במשולש הסגור ΔOAB.

<u>מסקנה</u> הפונקציה $f(x,y,z)$ מקבלת מינימום מקומי <u>ביחס למישור</u> ב- $(13,0,0)$
והיא מקבלת מקסימום מקומי <u>ביחס למישור</u> ב- $(2.6, 5.2, 5.2)$

<u>תרגיל 5</u> למצוא נקודות קיצון של $f(x,y) = x+2y$ תחת האילוץ $x^2+y^2=1$

<u>פתרון</u>

במקרה זה לא ניתן לחלץ מהאילוץ $(*)\ x^2+y^2=1$ את אחד המשתנים
אבל לכל נקודה (x_0,y_0) על המעגל $x^2+y^2=1$ יש סביבה שבה ניתן לחלץ
$y=y(x)$ או $x=x(y)$

<u>נשתמש בשיטת כופלי לגרנז'</u>

נגדיר את האילוץ בדרך: $g(x,y)=0$ $(*)$ כאשר $g(x,y)=x^2+y^2-1$
ונבנה את פונקציית לגרנז' של הבעיה:
$$F(x,y,\lambda) = f(x,y)+\lambda\cdot g(x,y)$$

<u>המשפט מגדיר את הדבר הבא:</u>

אם (x_0,y_0) היא נקודת קיצון של $f(x,y)$ תחת האילוץ $g(x,y)=0$
כך ש: (1) $f(x,y), g(x,y)$ מתמלקה C^1 בסביבה של (x_0,y_0)
(ב) בסביבה של (x_0,y_0) ניתן לחלץ מהאילוץ $g(x,y)=0$
את $y=y(x)$ או את $x=x(y)$ (בפונקציות גזירות ברציפות)
אז קיים λ_0 (כופל לגרנז') כך ש:
$$(**)\quad \begin{cases} F'_x(x_0,y_0,\lambda_0)=0 \\ F'_y(x_0,y_0,\lambda_0)=0 \\ F'_\lambda(x_0,y_0,\lambda_0)=0 \end{cases}$$

במקרה שלנו אנו יודעים שלכל נקודה על המעגל $x^2+y^2=1$ יש סביבה שבה ניתן
לחלץ $x=x(y)$ או $y=y(x)$ (גזירות ברציפות), אבל <u>באופן כללי</u>
אם בכל נקודה שמקיימת את האילוץ $g(x,y)=0$ לפחות אחת מהנגזרות
$g'_x(x,y)=2x$, $g'_y(x,y)=2y$ שונה מאפס, אז תנאי (ב) יבטא המשפט
הפונקציה הסתומה. (ובאותה לכל נקודה על המעגל מקיים $x\neq 0$ או $y\neq 0$)

<u>נחפש נקודות (x,y,λ) שיקיימו את (**)</u>

$$(**)\begin{cases} f'_x(x,y)+\lambda g'_x(x,y)=0 \\ f'_y(x,y)+\lambda g'_y(x,y)=0 \\ g(x,y)=0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1+2\lambda x=0 \\ 2+2\lambda y=0 \\ x^2+y^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{-1}{2\lambda} \\ y=-\frac{1}{\lambda} \\ x^2+y^2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=2x \\ x^2+y^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} \left(\frac{1}{\sqrt5},\frac{2}{\sqrt5}\right) \\ \left(\frac{-1}{\sqrt5},-\frac{2}{\sqrt5}\right) \end{matrix}$$

המעגל $x^2+y^2=1$ הוא קבוצה סגורה וחסומה ב $\mathbb{R}^2$ ולכן הפונקציה הרציפה $f(x,y)$ מקבלת בקבוצה זו מינימום ומקסימום. ערכי הקיצון יכולים להתקבל רק בשתי הנקודות שמצאנו, ומתוך ערכי הפונקציה בהם מסיקים:

$f(-\frac{1}{\sqrt5},-\frac{2}{\sqrt5})=-\sqrt5$ – מינימום $\qquad$ $f(\frac{1}{\sqrt5},\frac{2}{\sqrt5})=\sqrt5$ – מקסימום.

<u>תרגיל 6</u>

למצוא מינימום ומקסימום של $f(x,y,z)=x^8+y^8+z^8$ על הספרה $x^2+y^2+z^2=1$

<u>בתרגיל</u> צריך למצוא ערכי קיצון של $f(x,y,z)$ תחת האילוץ (*) $g(x,y,z)=0$

כאשר $g(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-1$

נבנה את פונקציית לגרנז' של הבעיה: $F(x,y,z,\lambda)=f(x,y,z)+\lambda g(x,y,z)$

בגלל שלכל נקודה (x_0,y_0,z_0) על הספרה יש סביבה שבה האילוץ $g(x,y,z)=0$

מאפיין: $x=x(y,z)$ או $y=y(x,z)$ או $z=z(x,y)$

(כדי להראות זאת בעזרת משפט הפונקציה הסתומה צריך לוודא שבכל נקודה (x_0,y_0,z_0)

על הספרה מתקיים $g'_x\neq0$ או $g'_y\neq0$ או $g'_z\neq0$)

הנקודות הקריטיות הן אלה שבהן: $\vec{\nabla}F(x,y,z,\lambda)=\underline{0}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f'_x+\lambda\cdot g'_x=0\\ f'_y+\lambda\cdot g'_y=0\\ f'_z+\lambda\cdot g'_z=0\\ g(x,y,z)=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x^7+2\lambda x=0\\ 8y^7+2\lambda y=0\\ 8z^7+2\lambda z=0\\ x^2+y^2+z^2=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(8x^6+2\lambda)=0\\ y(8y^6+2\lambda)=0\\ z(8z^6+2\lambda)=0\\ x^2+y^2+z^2=1\end{cases}$$

<u>אפשרות א'</u> הנחה ש $x,y,z\neq0$ נקבל $x^6=y^6=z^6=-\frac{\lambda}{4}$ ומ $x^2+y^2+z^2=1$

$\Leftarrow$ $x^2=y^2=z^2$ ומ $3x^2=1$ $\Leftarrow$ $x^2=y^2=z^2=\frac{1}{3}$

מקבלים 8 נקודות על הספרה הערך של f בנקודות אלה הוא $f(x,y,z)=\frac{3}{3^4}=\frac{1}{27}$

<u>אפשרות ב'</u> נניח שלפחות מבין x,y,z שווים אפס והשלישי שונה מאפס. יש סה"כ דרכים

ולכן נניח בה"כ ש $x\neq0$ $y=z=0$ $\Leftarrow$ $x^6=-\frac{\lambda}{4}$ ומ $x^2=1$

מקבלים את הנקודות $(-1,0,0)$, $(1,0,0)$ הערך של f בהן הוא $f(x,y,z)=1$

<u>אפשרות ג'</u> נניח שבדיוק אחד מבין x,y,z שווה אפס, ובה"כ נניח $z=0$ ונקבל:

$x^6=y^6=-\frac{\lambda}{4}$ ומ $x^2+y^2=1$ $\Leftarrow$ $x^2=y^2=\frac{1}{2}$ מקבלים $(\pm\frac{1}{\sqrt2},\pm\frac{1}{\sqrt2},0)$

הערך של f בנקודות אלה הוא $f(x,y,z)=\frac{2}{2^4}=\frac{1}{8}$

<u>בסה"כ</u> הערך המקסימלי של f על הספרה הוא 1 והערך המינימלי $\frac{1}{27}$