שדה וקטורי משמר ופונק' פוטנציאל (בשני מימדים).
אינטגרלים משטחיים מסוג ראשון ומסוג שני.

שדה וקטורי משמר ופוטנציאל (בשני מימדים)

יהי $D \subseteq \mathbb{R}^2$ תחום (= קבוצה פתוחה וקשירה) במישור.

הגדרה פונק' וקטורית $\bar{F}(x,y) = P(x,y)\hat{i} + Q(x,y)\hat{j}$ רציפה בתחום D נקראת

שדה וקטורי משמר (שדה פוטנציאלי) ב-D אם קיימת פונק' סקלרית $u(x,y): D \to \mathbb{R}$

מתמלקה C^1 ב-D כך ש: $\forall (x,y) \in D: \quad \bar{\nabla} u(x,y) = \bar{F}(x,y)$

טענה 1 (מקבילות על תחום כללי $D \subseteq \mathbb{R}^2$)

שדה וקטורי $\bar{F}(x,y)$ רציף בתחום $D \subseteq \mathbb{R}^2$ הינו שדה משמר ב-D אמ"מ לכל מסלול סגור, $\Gamma \subset D$ מתקיים $\oint_\Gamma \bar{F}(x,y) \circ d\bar{r} = 0$

מכך נובע, אם $\bar{F}(x,y)$ שדה משמר ב D ! $u(x,y)$ פונק' פוטנציאל, אז לכל שתי נקודות $A,B \in D$ ולכל מסלול $C \subset D$ שמתחבר בין A ל B מתקיים

$$\int_C \bar{F}(x,y) \circ d\bar{r} \equiv \int_{A \to B} \bar{F}(x,y) \circ d\bar{r} = u(B) - u(A)$$

טענה 2 (מקבילות על תחומים **פשוטי קשר** = "ללא חורים")

יהי $D \subseteq \mathbb{R}^2$ תחום **פשוט קשר** !- $\bar{F}(x,y) = P(x,y)\hat{i} + Q(x,y)\hat{j}$

שדה וקטורי **מתמלקה C^1** ב-D, אז $\bar{F}(x,y)$ הוא שדה משמר ב D אמ"מ.

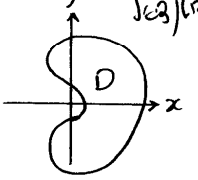
$$\forall (x,y) \in D: \quad Q'_x(x,y) = P'_y(x,y)$$

דוגמא 1 השדה הוקטורי $\bar{F}(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2}\hat{i} + \frac{x}{x^2+y^2}\hat{j}$

הינו שדה וקטורי מתמלקה C^1 ב $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ (המישור ללא הראשית) שמקיים

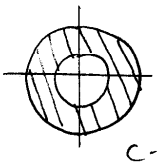
$$\forall (x,y) \neq (0,0): \quad Q'_x(x,y) = P'_y(x,y)$$

ולכן מובטח שבכל תחום **פשוט קשר** $D \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ תהיה לו פונק' פוטנציאל



בהינתן תחום שבתחום D שאינו חותך את ציר x פונק' הפוטנציאל הינו מהצורה: $u(x,y) = \mathrm{Arctan}\left(\frac{x}{y}\right) + c$

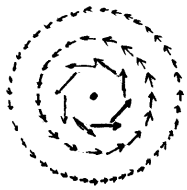
לעומת זאת התחום $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ כולו, או בכל תחום שמקיף את הראשית אין לשדה $\bar{F}(x,y)$ הנ"ל פונק' פוטנציאל.



(*) אחת האפשרויות להראות זאת הינו לחשב אינטגרל מסוג ב' של השדה על מעגל היחידה-C

$$\oint_C \bar{F}(x,y) \circ d\bar{r} = +2\pi \neq 0$$

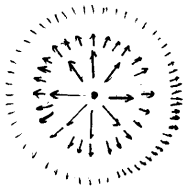
שדה וקטורי משמר ופונק' פוטנציאל (בשני מימדים).
אינטגרלים משטחיים מסוג ראשון ומסוג שני.



$\vec{F}(x,y)=\frac{-y}{x^2+y^2}\hat{i}+\frac{+x}{x^2+y^2}\hat{j}$

<u>דוגמה של דוגמא 1</u>

שדה "משיקי" פרופורציוני הפוך לרדיוס



$\vec{F}(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2}\hat{i}+\frac{y}{x^2+y^2}\hat{j}$

<u>דוגמה של דוגמא 2</u>

שדה רדיאלי פרופורציוני הפוך לרדיוס

<u>תרגיל 1</u>

יהי: $\vec{F}(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2}\hat{i}+\frac{y}{x^2+y^2}\hat{j}$ $\quad (x,y)\neq(0,0)$

(א) להראות שהכל תחום <u>פשוט קשר</u> $D\subseteq\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$ יש לו פונק' פוטנציאל

(ב) יהי D תחום במישור שאינו נחתך עם ציר x, מקבלו פונקציה פוטנציאל ב D

(ג) הראו שפונקציה הפוטנציאל שמצאתם בסעיף ב' היא פונק' פוטנציאל <u>בכל</u> $\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$ ומסביר מקור לו איך סתירה.

(ד) הראו באופן ישיר ש- $\oint_C \vec{F}(x,y)\circ d\vec{r}=0$ כאשר C היא כל היחידה

ותשבו $\int_{(-1,2)\to(0,5)} \vec{F}(x,y)\circ d\vec{r}$ עבור מסלול שאינו עובר בראשית.

<u>פתרון</u>

(א) השדה הוקטורי הנתון שייך למחלקה C^∞ ב $\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$. נסמן: $\vec{F}(x,y)=P(x,y)\hat{i}+Q(x,y)\hat{j}$

כאשר $P(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2}$ $\qquad Q(x,y)=\frac{y}{x^2+y^2}$

עבור $(x,y)\neq(0,0)$ מתקיים: $Q'_x=y\cdot\frac{-2x}{x^2+y^2}$ $\qquad P'_y=x\cdot\frac{-2y}{x^2+y^2}$

כלומר ב $\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$ מתקיים $(*)\quad Q'_x=P'_y$

ולכן מבטיח שרשדה הוא שדה משמר בכל תחום <u>פשוט קשר</u> $D\subset\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$

(ב) יהי D תחום שאינו חותך את ציר x $(y\neq0)$. אז קיימת $u(x,y):D\to\mathbb{R}$

כך ש $\vec{\nabla}u(x,y)=\vec{F}(x,y)$ $\iff$

$(1)\quad u'_x=\frac{x}{x^2+y^2}\qquad (2)\quad u'_y=\frac{y}{x^2+y^2}$

נבדוק ל (1) אינטגרציה לפי x (כאשר y הוא פרמטר $\neq0$) $\Leftarrow$

$u=\int\frac{x}{x^2+y^2}dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x}{x^2+y^2}dx$

באינטגרל האחרון, המונה הוא נגזרת של המכנה (נגזרת לפי x) $\Leftarrow$ $u=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+C(y)$

נגזר לפי y ונציב ב (2) $\Leftarrow$ $\frac{y}{x^2+y^2}+C'(y)=u'_y=\frac{y}{x^2+y^2}$ $\Leftarrow$ $C'(y)=0$ $\Leftarrow$ $C(y)\equiv C$

שדה וקטורי משמר ופונק' פוטנציאל (בשני מימדים).
אינטגרלים משטחיים מסוג ראשון ומסוג שני.

כלומר: $u(x,y) = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+C$

ב) הפונקציה $u(x,y)$ מתמלקה C^1 בכל $\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$ והיא מקיימת

$$\vec{\nabla} u(x,y) = \vec{F}(x,y) \quad : \forall (x,y)\neq(0,0)$$

כלומר היא פונקציית פוטנציאל בכל $\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$

בגלל אינה סתירה כי התנאי: $P'_y = Q'_x$ (*) מתקיים שלא קיים פונק' פוטנציאל בתחום כלשהו.

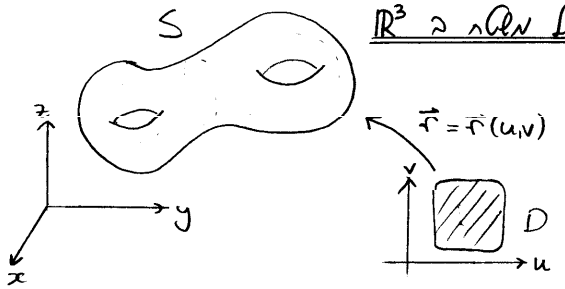
(3) כדי לתשב אינטגרל מסוג 2 על מעגל היחידה נקח פרמטריזציה $x=\cos t$, $y=\sin t$

$$\Leftarrow \oint_C \vec{F}(x,y)\circ d\vec{r} = \int_0^{2\pi}\left[\frac{\cos t}{1}\cdot(-\sin t)+\frac{\sin t}{1}\cdot(\cos t)\right]dt = 0$$

כמו כן

$$\int_{(-1,2)\to(0,5)} \vec{F}(x,y)\circ d\vec{r} = u(0,5)-u(-1,2) = \frac{1}{2}\ln(25)-\frac{1}{2}\ln(5) = \frac{1}{2}\ln(5)$$

<u>משטח של משטח ב $\mathbb{R}^3$</u>



יהי $S\subset\mathbb{R}^3$ <u>משטח ב $\mathbb{R}^3$</u> שניתן ע"י <u>פרמטריזציה</u>: $\vec{r}(u,v): D\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$

כאן $\vec{r}(u,v) = x(u,v)\cdot\hat{i} + y(u,v)\cdot\hat{j} + z(u,v)\cdot\hat{k}$

ומניחים ש: $\vec{r}(u,v)$ מתמלקה C^1 ב- $\bar{D}$ ול: $\vec{r}'_u(u,v)\times\vec{r}'_v(u,v)\neq\underline{0}$

<u>השטח של המשטח S נתון ע"י</u>

$$\iint_D |\vec{r}'_u\times\vec{r}'_v|\,du\,dv$$

נהוג לסמן:

$$\begin{cases} E = x'^2_u + y'^2_u + z'^2_u \\ F = x'_u x'_v + y'_u y'_v + z'_u z'_v \\ G = x'^2_v + y'^2_v + z'^2_v \end{cases}$$

ונסמנים אלה: $|\vec{r}'_u\times\vec{r}'_v| = \sqrt{EG-F^2}$

(*) אם המשטח S הוא <u>גרף של פונק'</u> $z=f(x,y)$, $(x,y)\in D$, $f\in C^1(\bar{D})$

אז $\vec{r}(x,y) = (x,y,f(x,y))$ מתקיים: $|\vec{r}'_x\times\vec{r}'_y| = \sqrt{1+f'^2_x+f'^2_y}$

שדה וקטורי משמר ופונק' פוטנציאל (בשני מימדים).
אינטגרלים משטחיים מסוג ראשון ומסוג שני.

תרגיל לחשב שטח פנים של כדור ברדיוס R

בתרון פרמטריזציה של הכדור: $\vec{r}(\varphi,\theta) = (R\cos\varphi\sin\theta,\ R\sin\varphi\sin\theta,\ R\cos\theta)$

$(\varphi,\theta) \in [0,2\pi]\times[0,\pi]$

$x'_\varphi = -R\sin\varphi\sin\theta$ $\qquad$ $x'_\theta = R\cos\varphi\cos\theta$

$y'_\varphi = R\cos\varphi\sin\theta$ $\qquad$ $y'_\theta = R\sin\varphi\cos\theta$

$z'_\varphi = 0$ $\qquad$ $z'_\theta = -R\sin\theta$

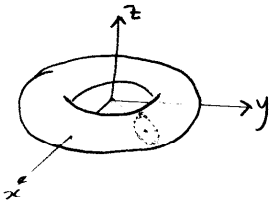
$$\Leftarrow \quad \begin{aligned} E &= x'^2_\varphi + y'^2_\varphi + z'^2_\varphi = R^2\sin^2\theta \\ F &= x'_\varphi x'_\theta + y'_\varphi y'_\theta + z'_\varphi z'_\theta = 0 \\ G &= x'^2_\theta + y'^2_\theta + z'^2_\theta = R^2 \end{aligned}$$

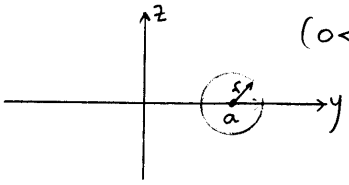
ומצאנו: $|\vec{r}'_\varphi \times \vec{r}'_\theta| = \sqrt{EG-F^2} = R^2\sqrt{\sin^2\theta} \underset{0\le\theta\le\pi}{=} R^2\sin\theta$

שטח פני הכדור הוא לכן: $\iint_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\sqrt{EG-F^2}\,d\theta\,d\varphi = R^2\cdot\int_0^{2\pi}d\varphi\cdot\int_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta = R^2\cdot 2\pi\cdot 2 = 4\pi R^2$

תרגיל ב

יהי T טורוס המתקבל מסיבוב המעגל $(y-a)^2+z^2=r^2$ סביב ציר z





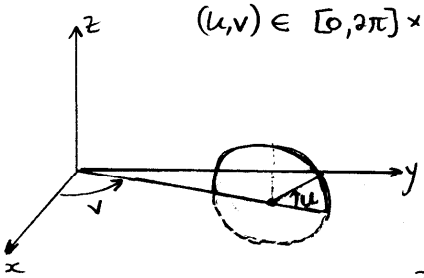
$(0<r<a)$

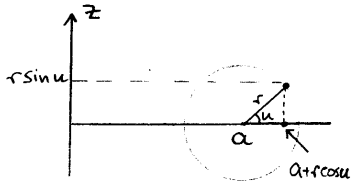
לחשב את שטח הפנים של הטורוס.

בתרון פרמטריזציה אפשרית

$\vec{r}(u,v) = [(a+r\cos u)\cos v,\ (a+r\cos u)\sin v,\ r\sin u]$

$(u,v) \in [0,2\pi]\times[0,2\pi]$





כמו: $x'_u = -r\sin u\cos v$ $\qquad$ $x'_v = -(a+r\cos u)\sin v$

$y'_u = -r\sin u\sin v$ $\qquad$ $y'_v = (a+r\cos u)\cos v$

$z'_u = r\cos u$ $\qquad$ $z'_v = 0$

$$\Leftarrow \quad \begin{cases} E = r^2 \\ G = (a+r\cos u)^2 \\ F = 0 \end{cases}$$

שדה וקטורי משמר ופונק' פוטנציאל (בשני מימדים).
אינטגרלים משטחיים מסוג ראשון ומסוג שני.

ומכאן ש:

$$|\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v| = \sqrt{EG-F^2} = r(a+r\cos u) > 0$$

$$\text{שטח} = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} r(a+r\cos u)\,du\,dv = r\cdot\int_0^{2\pi} dv \cdot \int_0^{2\pi}(a+r\cos u)\,du$$

$$= r\cdot 2\pi\cdot\left(2\pi a + r\sin u\Big|_0^{2\pi}\right) = 4\pi^2 ra$$

אינטגרל משטחי מסוג 1

תרגיל 4 לחשב את המסה של חצי כדור ברדיוס a: $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2 \\ z\geq 0 \end{cases}$

אם צפיפות המסה המשטחית נתונה ע"י:

$\rho(x,y,z) = z$ גרם/ס"מ^2

פתרון אם נסמן את המשטח $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2 \\ z\geq 0 \end{cases}$ ב-S אז צריך לחשב

אינטגרל משטחי מסוג 1 $\quad m = \iint_S \rho(x,y,z)\,d\mu$

אם $\vec{r}(u,v): D\subseteq\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ היא פרמטריזציה של המשטח S אז

$$m = \iint_D \rho(u,v)\cdot|\vec{r}'_u\times\vec{r}'_v|\,du\,dv$$

נניח את חצי הכדור של הכדור $x^2+y^2+z^2=a^2$ כגרף של פונקציה

$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$, $x^2+y^2\leq a^2$

כלומר הפרמטריזציה היא $\vec{r}(x,y) = (x,\ y,\ \sqrt{a^2-x^2-y^2})$

$$D = \{(x,y) \mid x^2+y^2\leq a^2\}$$

הפרמטריזציה נראית $(z=f(x,y))$ מתקיים $|\vec{r}'_x\times\vec{r}'_y| = \sqrt{1+f_x'^2+f_y'^2}$

כאן $f(x,y)=\sqrt{a^2-x^2-y^2} \Rightarrow f_x = \frac{-x}{\sqrt{\ }}$, $f'_y = \frac{-y}{\sqrt{\ }}$

ולכן $|\vec{r}'_x\times\vec{r}'_y| = \sqrt{1+\frac{x^2+y^2}{a^2-x^2-y^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$

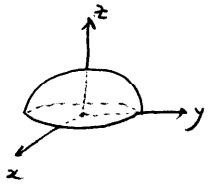
כמו כן $\rho = z = \sqrt{a^2-x^2-y^2}$

ולכן:

$$m = \iint_{x^2+y^2\leq a^2}\sqrt{a^2-x^2-y^2}\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\,dx\,dy = a\iint_{x^2+y^2\leq a^2} 1\,dx\,dy = a\cdot\pi a^2 = \pi a^3$$

שדה וקטורי משמר ופונק' פוטנציאל (בשני מימדים).
אינטגרלים משטחיים מסוג ראשון ומסוג שני.

תרגיל 5 למרכז מרכז מסה עבור חצי כדור ברדיוס a: $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2 \\ z\geq 0 \end{cases}$
אם צפיפות המסה המשטחית קבועה $\rho\equiv 1$.



פתרון
משיקולי סימטריה $x_0=y_0=0$
ולכן: $z_0=\frac{1}{M}\iint_S z\cdot\rho\, d\mu$

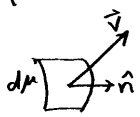
שטח פנים של חצי כדור ברדיוס a = $M=2\pi a^2$

ובמקרה קרוב תישבון: $\iint_S z\cdot 1\, d\mu=\pi a^3$ ומכאן ש: $z_0=\frac{a}{2}$

אינטגרל משטחי מסוג 2

נניח שבמשטח שמתאר אמה הוא S מוגדרת בנוסף צורם, שמהירות בנק (x,y,z) נתונה ע"י: $\vec{V}(x,y,z)$

יש לחשב את שטף הנוזל דרך המבנה (= כמה הנוזל שעבר דרך המבנה ביחידת זמן)



(*) נתבונן באלמנט שטח $d\mu$ של המבנה עם נורמל יחידה $\hat{n}$
הרכיב של מהירות הנוזל בכיוון הנורמל הוא $\hat{n}\,(\vec{V}\circ\hat{n})$
ולכן כמות הנוזל שחצה את יחידת השטח $d\mu$ ביחידת זמן הוא: $(\vec{V}\circ\hat{n})\,d\mu$
כלומר: $\text{שטף}=\iint_S(\vec{V}\circ\hat{n})\,d\mu$

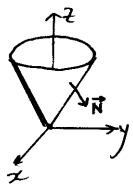
(*) אם $\vec{r}=\vec{r}(u,v)$ הוא פרמטריזציה של המשטח S אז

$$\iint_S(\vec{V}\circ\hat{n})\,d\mu=\iint_D(\vec{V}\circ\hat{n})\,|\vec{r}_u\times\vec{r}_v|\,du\,dv$$

כמו כן $\hat{n}=\frac{\vec{r}_u\times\vec{r}_v}{|\vec{r}_u\times\vec{r}_v|}$ <= $\vec{N}=\vec{r}_u\times\vec{r}_v$

ולכן: $\text{שטף}=\iint_D\vec{V}\circ\vec{N}\,du\,dv=\iint_D\underbrace{\vec{V}\circ(\vec{r}_u\times\vec{r}_v)}_{\text{מכפלה מעורבת}}\,du\,dv$

תרגיל 6
לחשב אינטגרל משטחי מסוג 2 של השדה $\vec{F}=x^2\hat{i}+y^2\hat{j}+z^2\hat{k}$
על גזרה התחתון של החרוט $\begin{cases} z^2=x^2+y^2 \\ 0\leq z\leq 2 \end{cases}$



שדה וקטורי משמר ופונק' פוטנציאל (בשני מימדים).
אינטגרלים משטחיים מסוג ראשון ומסוג שני.

פתרון המשטח נתון כגרף של פונק'ה $z = f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$

$x^2+y^2 \le 2$

ולכן הנורמל **החיצוני** למשטח יהיה $\vec{N} = (f'_x,\ f'_y,\ -1)$

$$\vec{N} = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},\ -1\right)$$

כמו כן, **על המשטח** מתקיים: $\vec{F}(x,y) = x^2\hat{i} + y^2\cdot\hat{j} + \underbrace{(x^2+y^2)}_{z^2}\hat{k}$

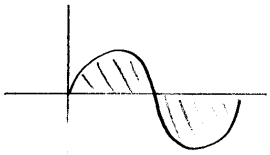
והאינטגרל המבוקש הוא:

$$\iint_S \vec{F}(x,y,z)\circ\hat{n}\,d\mu = \iint_D \vec{F}\circ\vec{N}\,dxdy = \iint_{x^2+y^2\le 2}\left(\frac{x^3+y^3}{\sqrt{x^2+y^2}} - (x^2+y^2)\right)dxdy$$

נעבור לקואורדינטות קוטביות: $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$ $\quad |J| = r$

נקבל:

$$\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^2 dr\left(\frac{r^3\cos^3\varphi + r^3\sin^3\varphi}{r} - r^2\right)\cdot r = \int_0^2 r^3 dr\cdot\int_0^{2\pi}(\cos^3\varphi + \sin^3\varphi - 1)\,d\varphi$$



מתקיים $\int_0^{2\pi}\cos^3\varphi\,d\varphi = \int_0^{2\pi}\sin^3\varphi\,d\varphi = 0$

ולכן האינטגרל האחרון שווה ל- $\left.\frac{r^4}{4}\right|_0^2\cdot(-2\pi) = -8\pi$