תרגילי חזרה

① תהא $f(x,y)$ פונקציה רציפה. למצוא $a, b, \alpha(y), \beta(y)$ כך שיתקיים:

$$\int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{4x-x^2}} f(x,y)\,dy + \int_2^{2+\sqrt{2}} dx \int_0^{4x-x^2-2} f(x,y)\,dy = \int_a^b dy \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)\,dx$$

② לרשום שטח של התחום המישורי המוגדר ע"י $1 \le x^2-y^2 \le 4$, $|y| \le \frac{1}{2}x$

③ יהיו

$$I_1 = \iiint_{x^2+y^2+(z-1)^2\le 1} \frac{dx\,dy\,dz}{x^2+y^2+z^2} \qquad I_2 = \iiint_{x^2+y^2+z^2\le 1} \frac{dx\,dy\,dz}{x^2+y^2+(z+1)^2} \qquad I_3 = \iiint_{x^2+(y-\frac{1}{2})^2+z^2\le 1} \frac{dx\,dy\,dz}{x^2+(y+\frac{1}{2})^2+z^2}$$

להראות ש $I_1 = I_2 = I_3$ ולחשב $I_1 = ?$

④ יהי G גוף בעל נפח $V(G)=\pi$ ויהי שטאר ההתאמה:

$$\begin{cases} x = 2u+v-w \\ y = 4u-3v+2w \\ z = 2u-v \end{cases}$$

בגוף מוזרק לכדור B בעל רדיוס R במרחב (u,v,w). למצוא $R=?$

⑤ יהי V התחום המרחבי שהוא החיתוך של שני הגלילים:

$$x^2+z^2 \le a^2 \qquad x^2+y^2 \le a^2$$

להוכיח ש:

$$\iiint_V f(z)\,dx\,dy\,dz = 4\int_{-a}^{a} f(z)\cdot(a^2-z^2)\,dz$$

⑥ יהי L הקו המוגדר ע"י המשוואה: $|x|+|y|=2$

לחשב את האינטגרל הקווי (סוג I)

$$\oint_L e^{x+y}\,\hat{n}\circ(\hat{i}+\hat{j})\,ds$$

כאשר $\hat{n}$ וקטור יחידה. (מה המשמעות הגיאומטרית של האינטגרל?)

⑦ נתון עקום רציונלי מישורי ע"י: $x^2+xy+y^2=3$

ונתונה פרמטריזציה שלו:

$$\begin{cases} x = \cos t + \sqrt{3}\sin t \\ y = \cos t - \sqrt{3}\sin t \end{cases} \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

(א) לחשב (אינטגרל קווי מסוג 2):

$$\oint_\gamma \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2+xy+y^2}$$

(ב) יהי D התחום המישורי שכולו העקום. לחשב את שטחו.

(8) יהי S טורוס עם פרמטריזציה

$$\begin{cases} x=(R+a\cos\varphi)\cos\theta \\ y=(R+a\cos\varphi)\sin\theta \\ z=a\sin\varphi \end{cases} \qquad 0<a<R \qquad 0\le\varphi\le 2\pi \quad 0\le\theta\le 2\pi$$

<u>עכשיו לא נכון</u>

(א) התלק של המרחב שמחוץ לטורוס S הוא תחום קשיר ופשוט קשר

(ב) האינטגרל המשטחי הבא (שלם):

$$\iint_S = x\,dy\,dz - y\,dz\,dx + z\,dx\,dy$$

של השדה $\bar{F}(x,y,z)=(x,-y,z)$ דרך הטורוס (עם נורמל חיצוני) שווה לנפח התחום שחוסם הטורוס.

(ג) האינטגרל המשטחי הבא: $\iint_S (\bar{\nabla}\times\bar{F})\circ\hat{n}\,d\mu$ שווה אפס

(9) יהא V גוף במרחב $\mathbb{R}^3$ שגבולו הוא משטח תלק ויפה-בדרך S עם נורמל חיצוני $\hat{n}$. ותהא $u(x,y,z)$ פונקציה ממחלקה C^2.

להוכיח ש:

$$\iiint_V \Delta u\,dx\,dy\,dz = \iint_S \frac{\partial u}{\partial \hat{n}}\,d\mu$$

(10) נסמן ב S את השפה של הגוף שנלוא בין התרוג $z=\sqrt{x^2+y^2}$ <u>מלמעלה</u>

לבין הכדור $x^2+y^2+z^2=4$ <u>מלמטה</u>

נסמן ב S_1 את החלק הכדורי של המשטח S

וב S_2 את חלקו התחתי של S

(א) לחשב את שטח המשטח S

(ב) למצוא את מרכז המסה של המשטח S בהנחה שהוא הומוגני

(ג) יהי $\bar{F}(x,y,z)$ שדה וקטורי אשר $\mathrm{rot}(\bar{F})=\hat{k}$ לחשב

$$\iint_{S_1} \mathrm{rot}(\bar{F})\circ\hat{n}\,d\mu$$

מה הוא מבטא?

תרגילי חזרה

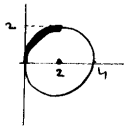
פתרונות

(1)
$$\int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{4x-x^2}} f(x,y)\,dy + \int_2^{2+\sqrt{2}} dx \int_0^{4x-x^2-2} f(x,y)\,dy = \int_a^b dy \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)\,dx$$

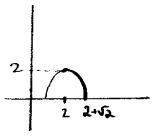
לצורה את הפונקציות: $\begin{cases} y=\sqrt{4x-x^2} \\ 0\le x\le 2 \end{cases}$ $\begin{cases} y=4x-x^2-2 \\ 2\le x\le 2+\sqrt{2} \end{cases}$

שמגדירות את תחומי האינטגרציה הבאים שמאל.

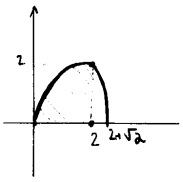
$\begin{cases} y=\sqrt{4x-x^2} \\ 0\le x\le 2 \end{cases} \Leftarrow \begin{cases} y^2=4x-x^2 \\ 0\le x\le 2,\ y>0 \end{cases} \Leftarrow \begin{cases} y^2+(x-2)^2=4 \\ 0\le x\le 2 \\ 0\le y \end{cases}$ רבע מעגל



$\begin{cases} y=4x-x^2-2 \\ 2\le x\le 2+\sqrt{2} \end{cases} \Leftarrow \begin{cases} y=-(x-2)^2+2 \\ 2\le x\le 2+\sqrt{2} \end{cases}$ קשת של פרבולה



לחשב $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ כאשר D הוא התחום



התחום D מתקיים $0\le y\le 2 \Leftarrow$ $\boxed{a=0,\ b=2}$

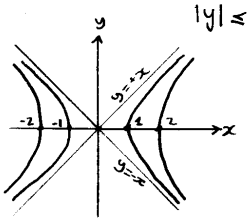
צריך לתאר את רבע המעגל: $\begin{cases} x=\alpha(y) \\ 0\le y\le 2 \end{cases}$ $\Leftarrow \begin{cases} y^2+(x-2)^2=4 \\ 0\le x\le 2 \\ 0\le y\le 2 \end{cases}$ $x=2\pm\sqrt{4-y^2}$, $0\le x\le 2$, $0\le y\le 2$

ומכיוון ש $0\le x\le 2$ אין צריך סימן - $\Leftarrow$ $\boxed{\alpha(x)=2-\sqrt{4-y^2}}$

צריך לתאר את $\begin{cases} x=\beta(y) \\ 0\le y\le 2 \end{cases}$ $\begin{cases} y=2-(x-2)^2 \\ 2\le x\le 2+\sqrt{2} \\ 0\le y\le 2 \end{cases} \Leftarrow \begin{cases} x=2\pm\sqrt{2-y} \\ 2\le x\le 2+\sqrt{2} \\ 0\le y\le 2 \end{cases}$

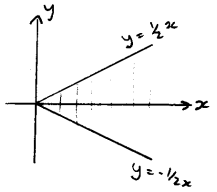
מכיוון ש $2\le x$ אין צריך סימן + $\Leftarrow$ $\boxed{\beta(x)=2+\sqrt{2-y}}$

(2) לצורה תחלה את התחום המישורי שמוגדר ע"י $1\le x^2-y^2\le 4$, $|y|\le\frac{1}{2}x$

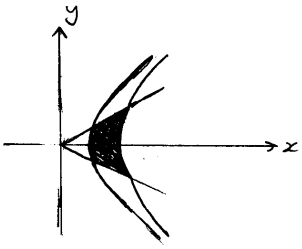


$x^2-y^2=4$ ו- $x^2-y^2=1$ הן שתי הפרבולות

תרגילי חזרה



(שכיר בחצי המישור הימני): $\begin{cases} 0 \le x \\ -\frac{1}{2}x \le y \le \frac{1}{2}x \end{cases} \iff |y| \le \frac{1}{2}x$



והתחום המבוקש:

$$\begin{cases} 1 \le x^2-y^2 \le 4 \\ -\frac{x}{2} \le y \le \frac{x}{2}, \quad x>0 \end{cases}$$

$$\iff$$

$$\begin{cases} 1 \le x^2-y^2 \le 4 \\ -\frac{1}{2} \le \frac{y}{x} \le \frac{1}{2}, \quad 0<x \end{cases}$$

בהלפה משתנים: $\begin{cases} u = x^2-y^2 \\ v = y/x \end{cases}$

נקבל תחום מלבני: $\begin{cases} 1 \le u \le 4 \\ -\frac{1}{2} \le v \le \frac{1}{2} \end{cases}$ ויעקוביאן:

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \det\begin{pmatrix} 2x & -2y \\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \end{pmatrix} = 2-2\frac{y^2}{x^2} = 2(1-v^2)$$

ולמציין הבתחום כי $v^2<1$ אז:

$$|J| = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \frac{1}{2}\left|\frac{1}{1-v^2}\right| = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-v^2}$$

לכן

$$S = \iint_D 1\,dx\,dy = \iint_{D^*} 1\cdot|J|\,du\,dv = \int_1^4 du \int_{-1/2}^{1/2} \frac{dv}{2(1-v^2)} = \frac{3}{2}\int_{-\frac{1}{2}}^{1/2} \frac{dv}{1-v^2}$$

פירוק לשברים חלקיים:

$$\frac{1}{(1-v^2)} = \frac{1}{(1+v)(1-v)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+v} + \frac{1}{1-v}\right)$$

ולכן:

$$S = \frac{3}{4}\int_{-1/2}^{1/2}\left(\frac{1}{1+v} + \frac{1}{1-v}\right)dv = \frac{3}{4}\ln\left(\frac{1+v}{1-v}\right)\Big|_{-\frac{1}{2}}^{1/2} = \frac{3}{4}\left(\ln 3 - \ln\frac{1}{3}\right) = \frac{3}{2}\ln 3$$

(3) $I_2 = \iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le 1} \frac{dx\,dy\,dz}{x^2+y^2+(z+1)^2}$ בהלפה משתנים: $\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})}\right| = 1 \Leftarrow \begin{cases} \tilde{x} = x \\ \tilde{y} = y \\ \tilde{z} = z+1 \end{cases}$

ונקבל:

$$I_2 = \iiint\limits_{\tilde{x}^2+\tilde{y}^2+(\tilde{z}-1)^2\le 1} \frac{d\tilde{z}\,d\tilde{y}\,d\tilde{x}}{\tilde{x}^2+\tilde{y}^2+\tilde{z}^2} = I_1$$

$I_3 = \iiint\limits_{x^2+(y-\frac{1}{2})^2+z^2\le 1} \frac{dx\,dy\,dz}{x^2+(y+\frac{1}{2})^2+z^2}$ בהלפה משתנים: $\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})}\right| = |(-1)| = 1 \Leftarrow \begin{cases} \tilde{x} = x \\ \tilde{y} = z \\ \tilde{z} = y-1/2 \end{cases}$

ומקבלים

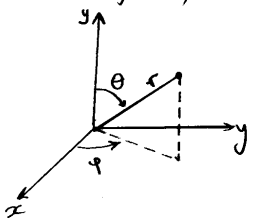
$$I_3 = \iiint\limits_{\tilde{x}^2+(\tilde{z}-1)^2+\tilde{y}^2} \frac{d\tilde{z}\,d\tilde{y}\,d\tilde{x}}{\tilde{x}^2+\tilde{z}^2+\tilde{y}^2} = I_1$$

תרגילי חזרה

נחשב

$$I_1 = \iiint\limits_{x^2+y^2+(z-1)^2\le 1} \frac{dx\,dy\,dz}{x^2+y^2+z^2}$$

נעבור לקואורדינטות כדוריות

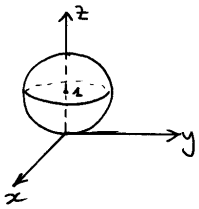


$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

$$|J| = r^2\sin\theta$$

$$0\le\theta\le\pi$$
$$0\le\varphi\le 2\pi$$

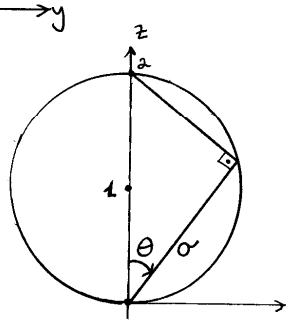
נמצא את תמונת התחום $D = \{x^2+y^2+(z-1)^2\le 1\}$ תחת ההעתקה



בכדור φ: $0\le\varphi\le 2\pi$! $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$

התחום של r תלוי בערך θ:

$$0\le r\le a = a(\theta)$$



$$\frac{a}{2} = \cos\theta \Rightarrow a = 2\cos\theta$$

ולכן

$$0\le r\le 2\cos\theta$$

$$I_1 = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{2\cos\theta} \frac{1}{r^2}\cdot r^2\sin\theta\, dr = 2\pi\int_0^{\pi/2} 2\sin\theta\cos\theta\, d\theta$$

$$= 2\pi\int_0^{\pi/2}\sin 2\theta\, d\theta = 2\pi\left.\frac{-\cos 2\theta}{2}\right|_0^{\pi/2} = 2\pi$$

(4)

$$\pi = V(G) = \iiint\limits_G 1\, dx\,dy\,dz$$

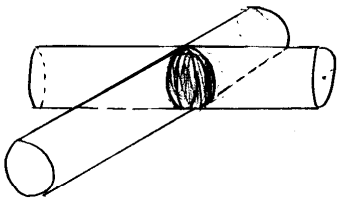
בהעתקה $\begin{cases} x = 2u+v-w \\ y = 4u-3v+2w \\ z = 2u-v \end{cases}$ מעבירה את G לכדור עם רדיוס R

$$\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| = \left|\det\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}\right| = 6$$

ולכן

$$\pi = \iiint\limits_G 1\, dx\,dy\,dz = 6\iiint\limits_B du\,dv\,dw = 6\cdot\underbrace{\frac{4}{3}\pi R^3}_{\text{נפח כדור}}$$

למכאן $\Leftarrow$ $R^3 = 1/8$ $\Leftarrow$ $R = 1/2$



5) נחשב את האינטגרל המשולש

$$I=\iiint_V f(z)\,dx\,dy\,dz$$

<u>ע"י חתכים</u>

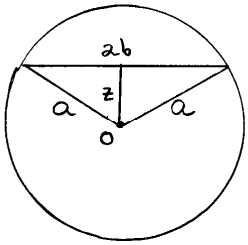
נסמן ב $S(z)$ את החתך האופקי של הגליל V בגובה z

אם העובי של החתך הוא dz ושטחו $S(z)$ אז תרומת החתך לאינטגרל היא

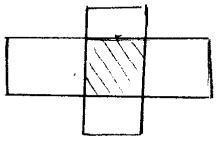
$f(z)\cdot S(z)\cdot dz$ כלומר:

$$I=\int_{z=-a}^{a} f(z)\cdot S(z)\cdot dz$$

<u>נחשב את שטחו של חתך אופקי בגובה z</u>



החתך הוא <u>ריבוע</u>

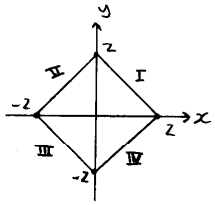


צלע הריבוע $=2b$ כאשר $b^2+z^2=a^2$

$\Leftarrow$ $b=\sqrt{a^2-z^2}$ $\Leftarrow$ $S(z)=(2b)^2=4(a^2-z^2)$

ומקבלים: $$I=4\int_{-a}^{a} f(z)\cdot(a^2-z^2)\,dz$$

6) נחשב את האינטגרל הקווי (סוג 1)



$L: |x|+|y|=2$

$$I=\int_L e^{x+y}\,\hat{n}\circ(\hat{i}+\hat{j})\,ds$$

<u>על צלע I</u> $y=2-x$

$\hat{n}=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$ $\Leftarrow$ $\hat{n}\circ(\hat{i}+\hat{j})=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

פרמטריזציה: $\begin{cases}x=t\\ y=2-t\end{cases}$ $0\le t\le 2$ $\Leftarrow$ $ds=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,dt=\sqrt{2}\,dt$

ולכן: $$I_1=\int_0^2 e^{t+(2-t)}\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\,dt=2e^2\int_0^2 dt=4e^2$$

<u>על צלע II</u> $y=x+2$

$\hat{n}=\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1)$ $\Leftarrow$ $\hat{n}\circ(\hat{i}+\hat{j})=0$ $\Leftarrow$ $I_2=0$

על צלע III $y=-2-x$

$\hat{n}=\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,-1) \Rightarrow \hat{n}\circ(\hat{i}+\hat{j})=-\frac{2}{\sqrt{2}}=-\sqrt{2}$

פרמטריזציה: $\begin{cases}x=t\\ y=-2-t\end{cases}$ $t:-2\to 0$ $\Rightarrow ds=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,dt=\sqrt{2}\,dt$

$\Rightarrow I_3=\int_{-2}^{0} e^{t+(-2-t)}(-\sqrt{2})\cdot\sqrt{2}\,dt=-2e^{-2}\int_{-2}^{0}dt=-\frac{4}{e^2}$

על צלע IV $y=-2+x$

$\hat{n}=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1) \Rightarrow \hat{n}\circ(\hat{i}+\hat{j})=0 \Rightarrow I_4=0$

בסה"כ $I=I_1+I_2+I_3+I_4=4\left(e^2-\frac{1}{e^2}\right)$

משמעות פיסיקלית יהי $\vec{F}(x,y)=e^{x+y}(\hat{i}+\hat{j})$ אז $I=\int_L \vec{F}(x,y)\circ\hat{n}\,ds$

הגדל $\vec{F}(x,y)\circ\hat{n}\,ds$ מבטא שטף של השדה דרך אלמנט אורך ds

ולכן I הוא השטף של השדה דרך הסקיום L (כלפי חוץ)

7 (ג)

$$I=\oint_\gamma \frac{-y\,dx+x\,dy}{x^2+xy+y^2}=\oint_\gamma P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy \underset{\text{גרין}}{=} \iint_D [Q'_x-P'_y]\,dx\,dy$$

$$P(x,y)=\frac{-y}{x^2+xy+y^2} \Rightarrow P'_y=\frac{-(x^2+xy+y^2)+y(x+2y)}{(x^2+xy+y^2)^2}=\frac{-x^2+y^2}{(x^2+xy+y^2)^2}$$

$$Q(x,y)=\frac{x}{x^2+xy+y^2} \Rightarrow Q'_x=\frac{(x^2+xy+y^2)-x(2x+y)}{(x^2+xy+y^2)^2}=\frac{-x^2+y^2}{(x^2+xy+y^2)^2}$$

כלומר $Q'_x-P'_y=0$ ולכן $I=0$

(ד) נקח $\begin{matrix}Q(x,y)=x\\ P(x,y)=0\end{matrix} \Rightarrow Q'_x-P'_y=1$ ולכן לפי גרין:

$$\oint_\gamma x\,dy=\oint_\gamma P\,dx+Q\,dy=\iint_D [Q'_x-P'_y]\,dx\,dy=\iint_D 1\,dx\,dy=\text{שטח } D$$

נשתמש בפרמטריזציה הנתונה כדי לחשב את האינטגרל הקווי האחרון.

(שימו לב שגם בלי הנוסחא הפרמטריזציה היא בכיוון חיובי)

ונקבל $dy=(-\sin t-\sqrt{3}\cos t)\,dt$ $\Leftarrow$ $\begin{cases} x=\cos t+\sqrt{3}\sin t \\ y=\cos t-\sqrt{3}\sin t \end{cases}$

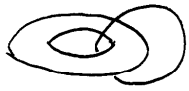
$0\le t\le 2\pi$

$$\int_0^{2\pi}\underbrace{(\cos t+\sqrt{3}\sin t)}_{x(t)}\cdot\underbrace{(-\sin t-\sqrt{3}\cos t)\,dt}_{dy} = \int_0^{2\pi}(-4\cos t\sin t-\sqrt{3})\,dt$$

$$=-2\int_0^{2\pi}\sin 2t\,dt-2\pi\sqrt{3} = \cancel{\cos 2t\Big|_0^{2\pi}}^{\,0}-2\pi\sqrt{3} = -2\pi\sqrt{3}$$

המסקנה היא שבפרמטריזציה הנכונה היא בכיוון שלילי ולשלם התחום הוא $2\pi\sqrt{3}$

8 (א) התלק של המרחב שמחוץ לטורוס S



<u>אין תחום פשוט קשיר</u>

(כי לא ניתן לכווץ כל "לולאה" בתחום זה לנקודה)

(ב) האינטגרל המשלחי (שלם)

$$I=\iint_S x\,dy\,dz-y\,dz\,dx+z\,dx\,dy$$

הוא אינטגרל <u>משלחי מסוים</u>

$$I=\iint_S \vec{F}(x,y,z)\circ\hat{n}\,d\mu$$

לפי משפט גאוס

$$I=\iiint_V \vec{\nabla}\circ\vec{F}\,dx\,dy\,dz$$

$$I=\iiint_V 1\,dx\,dy\,dz \Leftarrow \vec{\nabla}\circ\vec{F}=1 \Leftarrow \vec{F}=x\hat{i}-y\hat{j}+z\hat{k}$$

וכרגע בקיים נפח התחום שמתוך הטורוס

(ג) לפי משפט סטוקס

$$\iint_S \vec{\nabla}\times\vec{F}\,d\mu = \oint_\gamma \vec{F}\circ d\vec{r}$$

כאשר האינטגרל הקווי (מימין) המתרחש מתושב על הלקוחים γ שהוא השפה של המשטח S

אבל הטורוס S הוא <u>משטח ללא שפה</u> ולכן $\oint_\gamma \vec{F}\circ d\vec{r}=0$

(9)

$$\Delta u=\nabla^2 u=\nabla\circ(\nabla u)$$

ולכן לפי משפט גאוס:

$$I=\iiint_V \Delta u\,dx\,dy\,dz=\iiint_V \nabla\circ(\nabla u)\,dx\,dy\,dz=\iint_S \nabla u\circ\hat{n}\,d\mu$$

אבל $u\in C^2$ (פונקציה גלולה) $\Leftarrow$ $\nabla u\circ\hat{n}=\frac{\partial}{\partial\hat{n}}u$ ומכאן ש:

$$I=\iint_S \frac{\partial u}{\partial\hat{n}}\,d\mu$$

10) ב) השטח הוא האינטגרל המשטחי (סוג 1):

$$S\cap Ce = \iint_S d\mu = \iint_{S_1} d\mu + \iint_{S_2} d\mu$$

<u>נחשב את השטח של S_1</u>

פרמטריזציה:

$$\begin{cases} x = 2\sin\theta\cos\varphi \\ y = 2\sin\theta\sin\varphi \\ z = 2\cos\varphi \end{cases} \qquad \begin{matrix} 0\le\varphi\le 2\pi \\ \frac{\pi}{4}\le\theta\le\pi \end{matrix}$$

$$\iint_{S_1} d\mu = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\pi/4}^{\pi} |\vec r_\theta\times\vec r_\varphi|\, d\varphi$$

$$|\vec r_\theta\times\vec r_\varphi| = \sqrt{EG-F^2} = 4\sin\theta \Leftarrow \begin{cases} E = x_\theta'^2 + y_\theta'^2 + z_\theta'^2 = \dots = 4 \\ G = x_\varphi'^2 + y_\varphi'^2 + z_\varphi'^2 = \dots = 4\sin^2\theta \\ F = x_\theta' x_\varphi' + y_\theta' y_\varphi' + z_\theta' z_\varphi' = \dots = 0 \end{cases}$$

ולכן:

$$\iint_{S_1} d\mu = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\pi/4}^{\pi} 4\sin\theta\, d\theta = 8\pi\,(-\cos\theta)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} = 8\pi\left(1+\frac{1}{\sqrt2}\right)$$

<u>נחשב את השטח של S_2</u>

פרמטריזציה (כגרף של פונקציה) $z=\sqrt{x^2+y^2}$

וקל לבדוק שתחום הפרמטרים (x,y) שמתאים ל S_2 הוא $x^2+y^2\le 2$

$$\iint_{S_2} d\mu = \iint_{x^2+y^2\le 2} \sqrt2\, dx\,dy = \sqrt2\cdot\underbrace{\pi\sqrt2^2}_{\text{שטח עיגול}} = 2\sqrt2\pi \Leftarrow |\vec r_x\times\vec r_y| = \sqrt{1+f_x'^2+f_y'^2} = \sqrt2$$

<u>בסה"כ</u> שטח המשטח S הוא $2\pi(4+3\sqrt2)$

ג) נסמן ב (x_0,y_0,z_0) את מרכז המסה. משיקולי סימטריה $x_0=y_0=0$

$$z_0 = \frac{1}{M}\iint_S z\, d\mu \Leftarrow$$

בגלל שצפיפות המסה משתנה $=1$

$$M = 2\pi(4+3\sqrt2) = \text{שטח } S$$

נחשב את $\iint_S z\,d\mu$ בנפרד על S_1 ועל S_2

<u>על S_1</u> עם אותה פרמטריזציה כמו קודם $|\vec r_\theta\times\vec r_\varphi| = 4\sin\theta$

$$\iint_{S_1} z\,d\mu = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \underbrace{2\cos\theta}_{z}\cdot 4\sin\theta\, d\theta \Leftarrow$$

$$=8\pi\int_{\pi/4}^{\pi}\sin 2\theta = 8\pi\cdot\left.\frac{-\cos 2\theta}{2}\right|_{\pi/4}^{\pi} = -4\pi$$

על S_2

$$\iint_{S_2} z\,d\mu = \iint_{x^2+y^2\le 2}\underbrace{\sqrt{x^2+y^2}}_{z}\cdot\sqrt{2}\,dx\,dy$$

עם שטח פרמטריזציה כמו קודם: $\sqrt{1+f_x'^2+f_y'^2}=\sqrt{2}$

נעבור לקואורדינטות קוטביות $\begin{cases}x=r\cos\varphi\\ y=r\sin\varphi\end{cases}$ $\quad 0\le\varphi\le 2\pi,\ 0\le r\le\sqrt{2}$ $\quad |J|=r$

נקבל:

$$\sqrt{2}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\sqrt{2}}r^2\,dr = 2\sqrt{2}\pi\cdot\frac{(\sqrt{2})^3}{3}=\frac{8\pi}{3}$$

ולכן

$$\iint_S z\,d\mu = \frac{8\pi}{3}-4\pi = \frac{-4\pi}{3}$$

ונקבל ש:

$$z_0 = \frac{-2}{3(4+3\sqrt{2})}$$

ב) לפי משפט סטוקס

$$\iint_{S_1}\mathrm{rot}(\bar F)\circ\hat n\,d\mu = \oint_\gamma \bar F\circ d\bar r = I$$

כאשר γ הוא העקום שמאפיין את השפה של S_1

השפה של S_1 הוא המעגל: $\begin{cases}x^2+y^2=2\\ z=\sqrt{2}\end{cases}$ (מעגל התיחס בין הכדור לבין החרוט)

ולכל משטח אחר $\bar S$ כאשר γ הוא שפתו יתקיים:

$$I=\iint_{\bar S}\mathrm{rot}(\bar F)\circ\hat n\,d\mu$$

נבחר בתור $\bar S$ את העיגול: $\begin{cases}x^2+y^2\le 2\\ z=\sqrt{2}\end{cases}$ ("המכסה")

כיוון המנורמל החיצוני ל $\bar S$ הוא $\hat n=\hat k$ ולכן $\mathrm{rot}(\bar F)\circ\hat n=1$

ונקבל

$$I=\iint_{\bar S}1\,d\mu = \underbrace{\pi\cdot(\sqrt{2})^2}_{\text{שטח } \bar S}=2\pi$$

ותוך מבלבל את הצפיפה של $\bar G=\mathrm{rot}(\bar F)=\hat k$ לאורך המעגל γ.