כתיבה גולמית של מספר: $\tilde{a} = (\pm) d_k d_{k-1} ... d_0 . d_{-1} d_{-2} ... d_{-m}$

מניחים שהמספר מעוגל נכון. הכוונה היא ש $\tilde{a} = \sum_{i=-m}^{k} d_i \cdot 10^m$.

דורשים שהספרה המובילה, d_k תהיה שונה מאפס.

m - מספר הספרות הדצימליות (=שאחרי הנקודה). הוא מהווה מדד ל $|\Delta a|$- השגיאה בערך מוחלט.

t - מספר הספרות המשמעותיות - *significant digit* - סה"כ הספרות הידועות במספר ללא ספירת האפסים ההתחלתיים. נקבל: $t = k + m + 1$. הוא הווה מדד ל $\left|\frac{\Delta a}{a}\right|$ - השגיאה היחסית.

לדוגמה: $\tilde{a} = 0.0247$

במספר הזה יש 3 ספרות משמעותיות, כלומר $t = 3$. $(k = -2)$

מספר הספרות הדצימליות הוא 4, כלומר $m = 4$. (להיזהר מאפסים מוספים)

שגיאת ההעגלה האפשרית נמצאת ב d_{-n} כי הספרה הזאת מעוגלת. נקבל $|\Delta a| \le \frac{1}{2} \cdot a^{-m}$.

$\tilde{a} = (\pm) d_k . ... \cdot 10^{t-m-1}$ (נעביר את כל הספרות מלבד הראשונה אל ימין הנקודה העשרונית)

לכן: $|\tilde{a}| \ge d_k \cdot 10^{t-m-1}$

$$\left|\frac{\Delta a}{a}\right| \le \frac{|\Delta a|_{\max}}{|a|} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 10^{-m}}{|a|} \le \frac{\frac{1}{2} \cdot 10^{-m}}{d_k \cdot 10^{t-m-1}} \le \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{d_k} \cdot 10^{-t+1}$$

<u>התפשטות השגיאה:</u>

נניח ש $y = y(x_1, x_2, ..., x_n)$ אבל במקום לחשב אותו אנחנו מסוגלים לחשב רק את $\tilde{y}$ כך ש $\Delta y = \tilde{y} - y$. רוצים לחשב חסם על $|\Delta y|$.

$\Delta y = (\Delta y)_{IN} + (\Delta y)_A$ כאשר:

$(\Delta y)_{IN}$ הוא התרומה של השגיאה בנתונים $x_1, x_2, ..., x_n$ בהנחה שהמשך החישוב מתבצע באמצעות מחשב אידיאלי.

$(\Delta y)_A$ הוא התרומה של השגיאה כתוצאה מהחישוב הלא אידיאלי, בהנחה שהנתונים הם מדויקים.

המטרה היא לקבל ביטויים מפורשים (ככל שניתן) עבור החסמים של $(\Delta y)_{IN}$ ושל $(\Delta y)_A$.

$$|\Delta y|_{tottal} \le |(\Delta y)_{IN}| + |(\Delta y)_A|$$

נדבר על $(\Delta y)_{IN}$ - שגיאת הקלט.

$y = y(x_1, x_2, ..., x_n)$

בפועל אין לנו את $x_1, x_2, ..., x_n$ אלא את $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, ..., \tilde{x}_n$.

ידוע לנו שיש שגיאות בנתונים: Δx_i היא השגיאה בנתון x_i.

ידוע לנו חסם על השגיאות: $|\Delta x_i|$.

$\Delta y = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\right) \Delta x_i + O(\Delta x^2)$ (פיתוח הנוסחה של y לטור)

נקבל את $\left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\right)$ בנקודה המוכרת לנו: $\left(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, ..., \tilde{x}_n\right)$ - לכן נוסיף שגיאה בסדר של $O\left(\Delta x^2\right)$.

מסקנה: $|\Delta y| \le \sum_{i=1}^{n} \left|\left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\right)\right| \cdot |\Delta x_i|$ זוהי השגיאה המוחלטת.

מהי השגיאה היחסית?

$$\left|\frac{\Delta y}{y}\right| \le \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{|y|} \cdot \left|\left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\right)\right| \cdot |\Delta x_i|$$

דרך אחרת: $\frac{d \ln y}{dx} = \frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx}$. לכן: $\left|\frac{\Delta y}{y}\right| \le \sum_{i=1}^{n} \left|\left(\frac{\partial \ln y}{\partial x_i}\right)\right| \cdot |\Delta x_i|$

דוגמה: $y = x_1 + x_2$

$$|\Delta y| = 1 \cdot |\Delta x_1| + 1 \cdot |\Delta x_2|$$

מה היה קורה לו $y = x_1 - x_2$? נקבל: $|\Delta y| = |-1| \cdot |\Delta x_1| + |-1| \cdot |\Delta x_2|$ כלומר בדיוק אותו הדבר.

<u>משפט:</u> בפעולת חיבור או חיסור בין שני משתנים החסם בשגיאה בתוצאה שווה לסכום חסמי השגיאות בנתונים.

דוגמה: $y = x_1 \cdot x_2$

נשתמש בנוסחה: $\left|\frac{\Delta y}{y}\right| = \sum_{i=1}^{n} \left|\left(\frac{\partial \ln y}{\partial x_i}\right)\right| \cdot |\Delta x_i|$ (חסם על השגיאה היחסית)

נרשום: $\ln y = \ln x_1 + \ln x_2$

$$\left|\frac{\Delta y}{y}\right| = \frac{1}{|x_1|} \cdot |\Delta x_1| + \frac{1}{|x_2|} \cdot |\Delta x_2| = \left|\frac{\Delta x_1}{x_1}\right| + \left|\frac{\Delta x_2}{x_2}\right|$$

ומה אם $y = x_1 \cdot x_2^{-1}$?

אז $\ln y = \ln x_1 - \ln x_2$ ושוב נקבל אותו הדבר (בגלל הערך המוחלט).

<u>משפט:</u> בפעולת כפל, השגיאה היחסית שווה לסכום השגיאות היחסיות בנתונים

<u>הגדרה: מספר מצב של הבעיה</u> *condition number*.

יסומן ב: C_P. זהו מספר שבאמצעותו נביע את רגישות החישוב לשגיאה אפשרית בקלט.

$$C_P = \left|\frac{\Delta y}{y}\right| / \left|\frac{\Delta x}{x}\right|$$

כלומר: $\left|\frac{\Delta y}{y}\right| = C_p \cdot \left|\frac{\Delta x}{x}\right|$

נמשיך בפיתוח של C_P: $C_P = \left|\frac{\Delta y}{y}\right| / \left|\frac{\Delta x}{x}\right| = \left|\frac{1}{y}\frac{\partial y \Delta x}{\partial x}\right| / \left|\frac{\Delta x}{x}\right| = \left|\frac{x}{y}\frac{\partial y}{\partial x}\right| = \left|x\frac{\partial \ln y}{\partial x}\right|$

אם $C_P >> 1$ אז נאמר שהבעיה היא: *ill condition*, כלומר שאם יש שגיאה קלה בקלט, אנו עלולים לקבל שגיאה גדולה בתוצאה.

אם $C_P \approx 1$ אז נאמר שהבעיה היא: *well condition*

אם $C_P << 1$ אז נאמר שהבעיה לא רגישה.

דוגמה: $y=\sqrt{1+x^3}$ עבור $x>-1$.

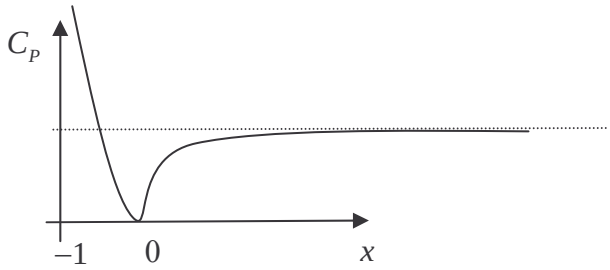
באמצעות הנוסחה: $C_P=\left|x\frac{\partial \ln y}{\partial x}\right|$

$$C_P=\left|x\cdot\frac{d\ln\left(1+x^3\right)^{\frac{1}{2}}}{dx}\right|=\left|\frac{3}{2}\cdot\frac{x^3}{1+x^3}\right|$$

כלומר עבור $x\to\infty$ נקבל $C_P\to\frac{3}{2}$

עבור $x\to-1$ נקבל $C_P\to\infty$ כלומר *ill condition*

עבור $x\to 0$ נקבל $C_P\to 0$



מסקנה: חישובים שווי ערך מבחינה מתמטית, עלולים להיות שונים מאוד מבחינת הצטברות השגיאה.

$f_3(x_0)$, $f_2(x_0)$, $f_1(x_0)$

נניח נתונות שלוש פונקציות שב x_0 כולן שוות. באיזו מהן כדאי להשתמש?

עדיף להשתמש בזו שה- C_P שלה הוא הנמוך ביותר.

דוגמה: $y\left(\sqrt{2}\right)=\left(\sqrt{2}-1\right)^6=\frac{1}{\left(\sqrt{2}+1\right)^6}$. הבעיה היא שמשתמשים ב $x\approx\sqrt{2}$ כלומר ב x שהוא קירוב של $\sqrt{2}$.

$f_1(x)=(x-1)^6$ ו $f_2(x)=(x+1)^{-6}$. באיזו מהן נעדיף להשתמש?

$C_{P1}=\left|x\frac{\partial \ln f_1}{\partial x}\right|=\left|\frac{6x}{x-1}\right|$ ועבור $x=1.414$ (קירוב ל $\sqrt{2}$) נקבל $C_{P1(x=1.414)}=20.5$

$C_{P2}=\left|x\frac{\partial \ln f_2}{\partial x}\right|=\left|\frac{6x}{x+1}\right|$ ועבור $x=1.414$ (קירוב ל $\sqrt{2}$) נקבל $C_{P2(x=1.414)}=3.5$

מסקנה - החישוב השני פחות רגיש לשגיאה בערך פי 6.

באמצעות הנוסחה מקודם: $\left|\frac{\Delta y}{y}\right|=C_p\cdot\left|\frac{\Delta x}{x}\right|$ נוכל לחשב את השגיאה היחסית בתוצאה.

<u>איבוד ספרות משמעותיות</u> loss of significant digits

נניח שמבצעים איזשהו חישוב: $y=y(x_1,x_2)$ ובכל אחד ממשתני הקלט x_1,x_2 יש t ספרות משמעותיות. מסתבר שב y יש $t-l$ ספרות משמעותיות (כלומר l ספרות משמעותיות פחות מב x_1,x_2). כלומר איבדנו ספרות דיוק.

נקבל: $\left|\frac{\Delta x}{x}\right| \le \frac{1}{2}\cdot 10^{-t+1}$ ו $\left|\frac{\Delta y}{y}\right| \le \frac{1}{2}\cdot 10^{-t+1+l}$

<u>תופעת ההתבטלות</u> cancellation

נניח $y = x_1 - x_2$ כאשר x_1, x_2 מספרים קרובים, כלומר המנה שלהם קרובה ל-1 כלומר $\left|\frac{x_1}{x_2} - 1\right| << 1$.

נקבל: $|\Delta y| << |x_1|, |x_2|$.

זה גורם להגברת השגיאה היחסית: $\left|\frac{\Delta y}{y}\right| = \frac{|\Delta y|}{|y|} = \frac{|\Delta x_1| + |\Delta x_2|}{|x_1 - x_2|} >> \frac{|\Delta x_1|}{|x_1|}$

זה קורה בנוסחאות: $y = f(x) - f(x \pm \delta)$, $y = f(x \pm \delta) - f(x)$

<u>דוגמה:</u>

רוצים לפתור את המשוואה: $y^2 - 56y + 1 = 0$ (הנתונים 1 ו 56 נתונים ללא שגיאה)

עובדים עם מחשב שיש בו 5 ספרות משמעותיות בהעגלה.

$y_1 = 28 - \sqrt{28^2 - 1} = 28.000 - 27.982 = 0.018$ כלומר $t = 2$

$y_2 = 28 + \sqrt{28^2 - 1} = 28.000 + 27.982 = 55.982$ כלומר $t = 5$

קיבלנו שבאחד מהפתרונות איבדנו 3 ספרות משמעותיות!!!

<u>דרכי טיפול: לאתר מראש</u>

0. פתרון בכוח - נבצע את החישוב מראש עם יותר ספרות. (אם היינו מחשבים את y_1 מראש אם 8 ספרות היינו נשארים בסוף עם 5 ספרות).

1. שימוש בנוסחה אחרת לקבלת התוצאה:

למשל בדוגמה הקודם נשתמש בנוסחאות ויאטה: $y_1 \cdot y_2 = \frac{c}{a} = 1$ לכן $y_1 = \frac{1}{y_2}$

נשתמש בנוסחה מקודם עבור מכפלה, כאשר $x_1 = 1$, $\Delta x_1 = 0$, $x_2 = y_2$ ו $\Delta x_2 = \Delta y_2$

$$\left|\frac{\Delta y}{y}\right| = \left|\frac{\Delta x_1}{x_1}\right| + \left|\frac{\Delta x_2}{x_2}\right|$$

לכן: $y_1 = \frac{1}{y_2} = \frac{1}{55.982} = 0.017862$ - כעת הצלחנו לשמור על אותו מספר ספרות משמעותיות - 5.

2. פיתוח טיילור:

נניח: $y = f(x) - f(x+\delta)$. נפתח לתור טיילור:

$$y = f(x) - \left[f(x) + f(x)'\cdot\delta + R_1\right] = -f'(x)\cdot\delta + R_1 \approx -f'(x)\cdot\delta$$

$$\left|\frac{R_1}{y}\right| = \left|\frac{\frac{1}{2}f''(\xi)\cdot\delta^2}{f'(x)\cdot\delta}\right| = \frac{1}{2}\left|\frac{f''(\xi)}{f'(x)}\right|\cdot\delta$$ עבור $\xi \in (x, x+\delta)$

בדוגמה הקודמת: $y = 28 - \sqrt{28^2 - 1}$. בצורה הכללית: $\sqrt{x} - \sqrt{x+\delta}$ כאשר $x = 28^2, \delta = -1$.

הפונקציה: $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$, $f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$, $f''(x) = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}$

$$y=\cancel{x^{\frac{1}{2}}}-\left[\cancel{x^{\frac{1}{2}}}+\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\cdot\delta+\underbrace{\frac{1}{2}f''(\xi)\delta^2}_{R_1}\right]=-\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{28}}\cdot(-1)-R_1=0.017858-R_1$$

$$.\xi\in\left(28^2-1,28^2\right)\ ,R_1=-\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{\xi^{\frac{3}{2}}}(-1)^2$$

$$|R_1|\le 5.71\cdot 10^{-6}$$

$$\left|\frac{R_1}{y}\right|\approx\frac{5.7\cdot 10^{-6}}{1.18\cdot 10^{-2}}=3.2\cdot 10^{-4}$$

מסקנה: אם לוקחים את האיבר הראשון בפיתוח טיילור בלבד אז השגיאה היחסית תהיה בערך $3.2\cdot 10^{-4}$. זה בערך דיוק של $t=4$ ספרות.

$\left|\frac{\Delta a}{a}\right|\le\frac{1}{2}\cdot 10^{-4+1}=5\cdot 10^{-4}$ (חישוב של שגיאה יחסית כאשר נתונות ארבע ספרות משמעותיות).

לעומת זאת בחישוב הראשון השגיאה הייתה גדולה בהרבה - נשארנו עם 2 ספרות בלבד.

<u>צמצום תחום</u> range reduction

דוגמה: רוצים לחשב: $y=sin(12532.14)$

הארגומנט שלנו הוא 12532.14 שיש בו 7 ספרות משמעותיות, כלומר $t=7$ ונניח שהוא מעוגל נכון.
היינו רוצים שבתוצאה גם יהיו 7 ספרות משמעותיות. הבעיה היא שהמחשב משתמש בזהות:
$sin(x)=sin(x+2n\pi)$ (עבור n שלם) ומחשב עבור $0\le x\le 2\pi$.

$$12432.14-3988\pi=12432.14-12528.67=3.47$$

לכן המחשב יבצע $sin(3.47)$, כלומר קיבלנו $t=3$ ואיבדנו 4 ספרות משמעותיות.

את התופעה של צמצום תחום אפשר לאתר באמצעות רגישות:

$C_P=\left|\frac{x}{y}\cdot\frac{dy}{dx}\right|=\left|\frac{x}{sin(x)}\right|\cdot|cos(x)|=12532\cdot\left|\frac{cos(3.45)}{sin(3.47)}\right|>>1$ כלומר הבעיה היא *ill condition*