תזכורת - נתונה משוואה $f(x)=0$ ומחפשים את השורש שלה. כלומר, מהו ה x שפותר את המשוואה.

השתמשנו בשיטת האיטרציה של ניוטון רפסון:

השיטה: בוחרים x_n - מחשבים את $f(x_n)$ ובוחרים ב x_{n+1} בנקודה שבה המשיק לנקודה x_n פוגע בציר ה- x. כלומר: $x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ עבור $n=0,1,2,...$

אם $\varepsilon_n=x_n-\alpha$ כאשר α הוא השורש, כלומר ε_n הוא השגיאה באיטרציה ה n, אז:

$\frac{|\varepsilon_{n+1}|}{|\varepsilon_n^{\,2}|}=\frac{1}{2}\left|\frac{f''(\xi)}{f'(x_n)}\right|$ עבור $\xi\in(x_n,\alpha)$.

כאשר $n\to\infty$ נקבל: $\frac{|\varepsilon_{n+1}|}{|\varepsilon_n^{\,2}|}=C=\frac{1}{2}\left|\frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)}\right|\geq 0$

תנאי מספיק להתכנסות:

אם קיימת סביבה (סימטרית) I סביב α שבה $\frac{1}{2}\left|\frac{f''(x)}{f'(y)}\right|<m$ עבור m קבוע, לכל x,y בסביבה, אז תהיה התכנסות בשיטת ניוטון רפסון.

כלומר קיים $x_0\in I$ שאם נתחיל ממנו אז תהיה התכנסות אל הפתרון: $\lim_{n\to\infty}x_n=\alpha$.

הוכחה: הנחנו $f'(x),f''(x)$ רציפות ו $f'(\alpha)\neq 0$.

נרשום את המשוואה עבור $n=0$: $\frac{|\varepsilon_1|}{|\varepsilon_0^{\,2}|}=\frac{1}{2}\left|\frac{f''(\xi)}{f'(x_0)}\right|<m$

נדרוש: $\left|\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0}\right|<m\varepsilon_0<1$

בוחרים את x_0 כך ש $|x_0-\alpha|\cdot m<1$, $x_0\in I$

$|x_1-a|<|x_0-\alpha|\Leftarrow\varepsilon_1\in I$ ובאופן דומה נוכיח עבור כל n ש $\varepsilon_n\in I$.

$$\left|\frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n^{\,2}}\right|<m$$

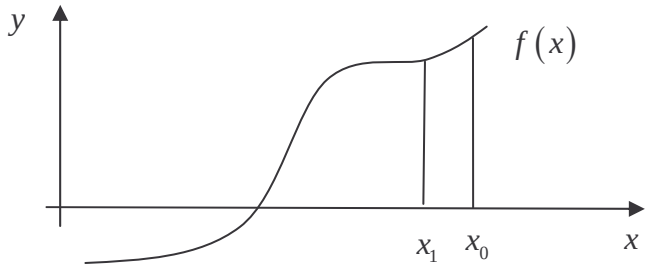
נכפיל את שני האגפים ב $m\varepsilon_n^{\,2}$ ונקבל: $m|\varepsilon_{m+1}|<(m\varepsilon_n)^2$

$m|\varepsilon_{m+1}|<(m\varepsilon_n)^2<...<(m\varepsilon_0)^{2^n}$ והביטוי הימני, $(\varepsilon_0 m)^{2^n}$ שואף לאפס.

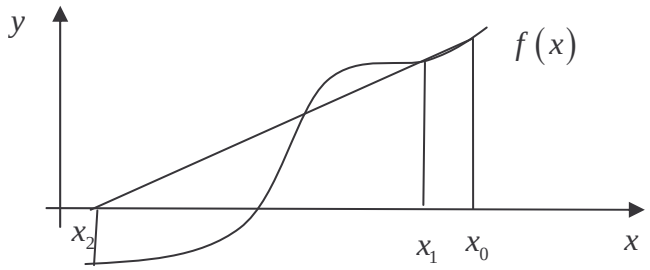
<u>שילוב שיטות: חציה + ניוטון רפסון</u>

יודעים שהשורש נמצאים בקטע (a,b)

<u>שיטת ה secant (מיתר?)</u>



מנחשים שתי נקודות התחלה: x_0, x_1. דרך שתי הנקודות מעבירים מיתר.
מחשבים את השיפוע ביניהן ומציירים מיתר - איפה שהוא פוגע בציר ה- x - שם קובעים את הנקודה הבאה x_2.



מחשבים את השיפוע: $f'(x_n) = \dfrac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

זוהי שיטה דו נקודתית.

ניתוח התכנסות:

אינטרפולציה (ליניארית): קירוב הפונקציה באמצעות ישר העובר בין שתי נקודות על הפונקציה.

נראה שכאשר מבצעים אינטרפולציה ליניארית קיימת נוסחה לשגיאה:

$$f(x) = \underbrace{f(x_n) + \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}(x - x_n)}_{\text{קירוב של קו ישר}} + \frac{1}{2} f''(\xi)(x - x_{n-1})(x - x_n)$$

עבור $\xi \in [x, x_n, x_{n-1}]$ כלשהו (כלומר $\xi \in [\min\{x_n, x, x_{n-1}\}, \max\{x_n, x_{n-1}, x\}]$)

$|\varepsilon_{n+1}| = \dfrac{1}{2}\left|\dfrac{f''(\xi)}{f'(\xi')}\right||\varepsilon_n||\varepsilon_{n-1}|$ עבור $\xi' \in (x_n, x_{n-1})$, $\xi \in (x_n, x_{n-1}, \alpha)$.

אם יש התכנסות, אז $x_n, x_{n-1} \to \alpha$. במקרה כזה: $|\varepsilon_{n+1}| = C \cdot |\varepsilon_n||\varepsilon_{n-1}|$ ו $C = \dfrac{1}{2}\left|\dfrac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)}\right|$.

(כמו בשיטת ניוטון רפסון)

מהו קצב ההתכנסות? נראה שסדר ההתכנסות גדול מ 1 וקטן מ 2.

הנוסחה $|\varepsilon_{n+1}| = C \cdot |\varepsilon_n||\varepsilon_{n-1}|$ התקבלה מתוך ניתוח האיטרציות.

נניח $\left|\varepsilon_{n+1}\right| = K\left|\varepsilon_n\right|^p$ (כדי לחסוך נזניח בהמשך את הערך המוחלט)

נקבל גם: $\varepsilon_n = K\varepsilon_{n-1}{}^p$

נציב את שתי המשוואות הללו ב $\left|\varepsilon_{n+1}\right| = C\cdot\left|\varepsilon_n\right|\left|\varepsilon_{n-1}\right|$ ונקבל:

$$\varepsilon_n{}^{p-1-\frac{1}{p}} = \frac{C}{K^{1+\frac{1}{p}}} = const$$

מצד ימין רשום קבוע. מצד שמאל רשום איזשהו משתנה ε_n, בחזקה קבועה.

זה אפשרי רק כאשר הקבוע הוא 1 והחזקה היא אפס - כלומר: $p-1-\frac{1}{p}=0$.

נפתור את המשוואה ונקבל: $p=\frac{1}{2}\left(1\pm\sqrt{5}\right)$. הנחנו שיש התכנסות, ולכן נבחר בערך החיובי:

$$p=\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{5}\right)=1.618$$

תנאי מספיק להתכנסות, כמו בניוטון רפסון - מספיק לבחור את x_0, x_1 בסביבה I כנ"ל.

כלומר $\frac{1}{2}\left|\frac{f''(x)}{f'(y)}\right| < m$ לכל $x, y \in I$.

$$\left|m\varepsilon_0\right|, \left|m\varepsilon_1\right| < 1$$

<u>שיטת steffensen:</u>

$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{g(x_n)}$ כאשר $g(x)=\frac{f\left(x+f(x)\right)-f(x)}{f(x)}$ עבור $n=0,1,2,...$.

נשים לב ש: $g(x)=\frac{f\left(x+f(x)\right)-f(x)}{f(x)} \approx f'(x)$.

נפתח את הפונקציה הזאת לטור טיילור ונראה מה נקבל.

$$f\left(x+f(x)\right)-f(x) = f(x)+f'(x)\cdot f(x)+R-f(x) = f'(x)\cdot f(x)$$

השארית היא $R=O\left(\left(f(x)\right)^2\right)$

לכן בסך הכל $g(x)\approx\frac{f'(x)f(x)}{f(x)} = f'(x)$.

ההתכנסות היא ל $f(x)=0$.

ניתוח התכנסות: $\left|\frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n{}^2}\right| = \frac{1}{2}\left|\frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)}\left[1+f'(\alpha)\right]\right|$

שיטת Regular Falsi:

מתחילים בשתי נקודות x_0, x_1 שיש בהן חילוף סימן, כלומר $f(x_0)\cdot f(x_1)<0$ (מזכיר את שיטת החציה).

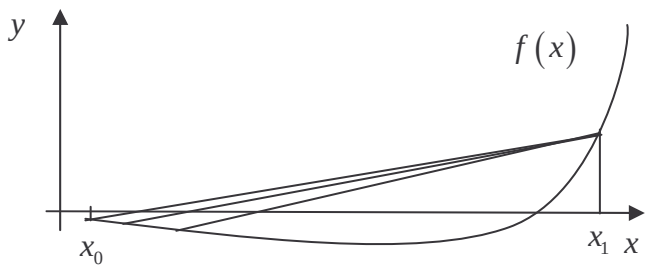
השורש נמצא בנקודה $\alpha \in (x_0, x_1)$.

נחבר בין הנקודות באמצעות מיתר ונקבע את הנקודה x_2 לנקודה שבה המיתר חותך את ציר ה x.

כעת נבדוק מי מהזוגות x_0, x_2 ו x_1, x_2 מקיים $f(x_0)\cdot f(x_2)<0$ או $f(x_2)\cdot f(x_1)<0$ ונמשיך מהזוג שמקיים זאת. זוהי שיטה דו נקודתית.

ההתכנסות מובטחת, אבל קשה לחשב את קצב ההתכנסות.

נניח שהפונקציה סוטה הרבה מהקו הישר:



נקבל שבמקרה זה השיטה הרבה פחות יעילה משיטת החצייה - בכל איטרציה נקטין את הטווח האפשרי בהרבה פחות מחצי.

לכן עדיף לשלב בין שתי השיטות - בכל איטרציה לבדוק האם נצמצם את התחום ביותר מחצי, ואם כן אז להשתמש ב RF ואם לא, אז להשתמש בשיטת החצייה באיטרציה הזו.

התיאוריה הכללית של שיטות איטרציה חד נקודתיות:

"נקודת שבת" fixed point, one point.

$x_{n+1}=\varphi(x_n)$ עבור $n=0,1,2,\ldots$

$\varphi(x)$ היא פונקצית איטרציה רציפה.

הפונקציה יוצרת סדרה: $x_0, x_1, x_2, \ldots, \varphi(x_n), \ldots$

נניח שיש התכנסות: $\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha$.

$$\alpha=\lim_{n\to\infty} x_n=\lim_{n\to\infty}\varphi(x_{n-1})\underset{*}{=}\varphi\left(\lim_{n\to\infty} x_{n-1}\right)=\varphi(\alpha)$$

* - נובע מרציפות הפונקציה φ.

מתקיימת המשוואה $\alpha=\varphi(\alpha)$.

המטרה המקורית הייתה לפתור את המשוואה $f(x)=0$.

ננסה ניסוח מהצורה: $x=\varphi(x)$.

נבצע איטרציות: $x_1=\varphi(x_0), x_2=\varphi(x_1), \ldots$

אם $x_0, x_1, \ldots, x_n$ סדרה מתכנסת, אז פתרנו את המשוואה.

נקודת השבת של הניסוח $x=\varphi(x)$ הוא פתרון של המשוואה המקורית.

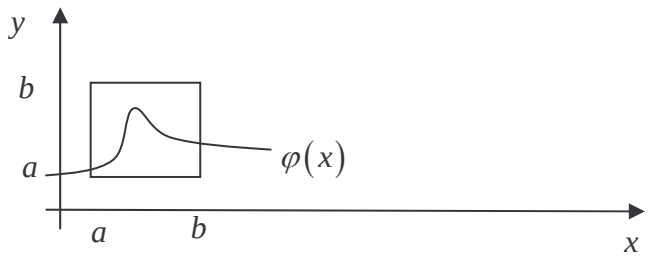
דוגמה: $f(x)=x^3-x-5=0$. מחפשים פתרון למשווה הזאת.

א. נעביר אגפים ונקבל: $x=x^3-5=\varphi_1(x)$

ב. $x^3=x+5$ ולכן $x=(x+5)^{\frac{1}{3}}=\varphi_2(x)$

ג. $x^3-x=5$ ולכן $x=\dfrac{5}{x^2-1}=\varphi_3(x)$

משפט: אם $\varphi\in C[a,b]$ ו $\varphi(x)\in[a,b]$ לכל $x\in[a,b]$ אז ל φ יש נקודת שבת $\alpha\in[a,b]$.
כלומר: אם φ רציפה בתחום $[a,b]$ והערך שלה בתחום זה הוא בטווח $[a,b]$ אז יש לה נקודת שבת $\alpha=\varphi(\alpha)$ בתוך אותו התחום:



<u>הוכחה</u>:
אם $a=\varphi(a)$ או $b=\varphi(b)$ אז סיימנו.
אחרת: קיים $a<\varphi(a)$ וגם $b>\varphi(b)$
מגדירים: $g(x)=\varphi(x)-x$, $C[a,b]$ (זוהי גם פונקציה רציפה).
$g(a)>0, g(b)<0$ ולכן קיימת נקודה $\alpha\in[a,b]$ כך ש $\alpha=\varphi(\alpha)$

אם בנוסף למה שהוכחנו קודם גם מתקיים $|\varphi'(x)|\le m<1$ לכל $x\in(a,b)$ אזי α הוא שורש יחיד ב$[a,b]$.
<u>הוכחה</u>: בסתירה: נניח שקיימים שני שורשים (שתי נקודות שבת):
$\alpha=\varphi(\alpha),\beta=\varphi(\beta)$ בתוך התחום $[a,b]$.
$\alpha-\beta=\varphi(\alpha)-\varphi(\beta)=\varphi'(\xi)(\alpha-\beta)$ עבור $\xi\in(a,b)$. (ממשפט ערך הביניים?)
אבל אנחנו יודעים ש $|\varphi'(x)|\le m<1$ ולכן:
$|\alpha-\beta|=|\varphi'(\xi)||\alpha-\beta|\le m|\alpha-\beta|<|\alpha-\beta|$ - קיבלנו סתירה, לא יכול להיות שגודל קטן מעצמו.

נניח שמתקיים הנ"ל, אזי האיטרציה $x_{n+1}=\varphi(x_n)$ עם $x_0\in[a,b]$, $n=0,1,2,\ldots$ מתכנסת ל α.

<u>הוכחה</u>: כל $x_n\in[a,b]$ עבור $n=0,1,2,\ldots$.

$$x_n-\alpha=\varphi(x_{n-1})-\varphi(\alpha)=\varphi'(\xi)(x_{n-1}-\alpha)$$

$$|x_n-\alpha|=|\varphi'(\xi)||x_{n-1}-\alpha|,\qquad \xi\in(x_{n-1},\alpha)$$

$$|x_1-\alpha|=|\varphi'(\xi)||x_0-\alpha|\le m|x_0-\alpha|$$

$$|x_2-\alpha|<|x_1-\alpha|\ ,\ |x_1-\alpha|<|x_0-\alpha|$$

קיבלנו: $\left|x_n-\alpha\right|\le\left|x_{n-1}-\alpha\right|\cdot m\le\left|x_{n-2}-\alpha\right|\cdot m^2\ldots\le m^n\left|x_0-\alpha\right|\to 0$

אם $m<1$ אז $\lim\limits_{n\to\infty} m^n=0$

נחזור לדוגמה הקודמת: $f\left(x\right)=x^3-x-5=0$. מחפשים פתרון בתחום: $x\in\left[1.5,2\right]$.

נסתכל על $x=\left(x+5\right)^{\frac{1}{3}}=\varphi_2\left(x\right)$ - זוהי פונקציה מונוטונית עולה בקטע.

$\varphi_2\left(1.5\right)=\left(6.5\right)^{\frac{1}{3}}>1.5$ מכיוון שזוהי פונקציה מונוטונית עולה, זהו המינימום בקטע.

$\varphi_2\left(2\right)=\left(7\right)^{\frac{1}{3}}<2$ - לכן זהו המקסימום של הפונקציה בקטע.

לכן התנאים של החלק הראשון של המשפט מתקיימים:

לכל x המקיים $x\in\left[1.5,2\right]$ מתקיים $\varphi_2\left(x\right)\in\left[1.5,2\right]$.

לכן קיים $\alpha=\varphi_2\left(\alpha\right)$.

$\left|\varphi'\left(x\right)\right|=\left|\dfrac{1}{3\left(x+5\right)^{\frac{2}{3}}}\right|<\dfrac{1}{3}<1$ - זוהי פונקציה יורדת בקטע הנ"ל.

לכן גם התנאים של החלק השני של המשפט מתקיימים.

לכן α הוא יחיד בקטע הזה.

נבחר $x_0=2$. נבצע איטרציות: $x_{n+1}=\varphi\left(x_n\right), n=0,1,2,\ldots$

נקבל: $x_1=1.912931$ $x_2=1.904967$ $x_3=1.904235$