<u>תזכורת:</u>

כאשר מתקיים ש $f(x)=(x-\alpha)^q\cdot g(x)$ כך ש $q\ge 2$ ו $\infty > g(\alpha)\ne 0$

אז α הוא שורש מריבוי q.

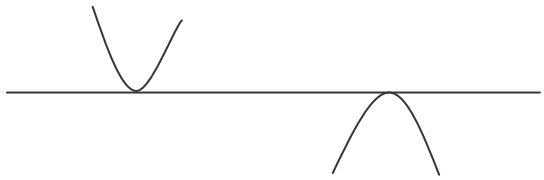
$$f(\alpha)=f'(\alpha)=f''(\alpha)=\ldots=f^{(q-1)}(\alpha)=0$$

$$f^{(q)}(\alpha)\ne 0$$

אם q הוא זוגי אז אין חילוף סימן וניתן לרשום זאת בצורה הבאה: $f(\alpha^+)\cdot f(\alpha^-)>0$

הפונקציה משיקה לציר בנקודת השורש אבל לא מחליפה סימן.

זה יראה בערך כך:



במקרים כאלה אי אפשר להשתמש בשיטות כמו שיטת החציה.

מה עושים? נרשום: $u(x)=\dfrac{f(x)}{f'(x)}=0$

למשוואה הזאת יש שורש פשוט ב $x=\alpha$.

נקבל:

$$u(x)=\frac{f(x)}{f'(x)}=\frac{(x-a)^q\,g(x)}{q(x-a)^{q-1}\cdot g(x)+(x-\alpha)^q\,g'(x)}=\frac{x-a}{A(x)}$$

כאשר: $A(x)=q+\left(x-a+\dfrac{g(x)}{g'(x)}\right)$ בנוסף, $A(\alpha)=q\ne 0$

שיטת ניוטון רפסון עבור שורש מרובה: $x_{n+1}=x_n-\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

הבעיה היא שהנגזרת $f'(\alpha)=0$ - כלומר, אי אפשר לחלק.

נרשום: $\varphi(x)=x-\dfrac{f(x)}{f'(x)}=x=u(x)=x-\dfrac{(x-\alpha)}{A(x)}$ כעת אין בעיה לחלק כי $A(\alpha)=q\ne 0$

מהו סדר ההתכנסות p?

$$\varphi'(x)=1-\frac{1}{A^2(x)}\left[A(x)-(x-\alpha)\cdot A'(x)\right]$$

בנקודה $x=\alpha$ נקבל: $\varphi'(\alpha)=1-\dfrac{1}{A(\alpha)}=1-\dfrac{1}{q}$ והערך הזה חיובי עבור $q\ge 2$.

מסקנה - $p=1$ כאשר $q\ge 2$ - אף על פי שבשיטה המקורית סדר ההתכנסות היה $p=2$.

(אם הנגזרת של פונקצית האיטרציה לא מתאפסת, אז ההתכנסות היא מסדר ראשון)

נסמן: $c=1-\dfrac{1}{q}$ - קבוע השגיאה לא תלוי בפונקציה אלא רק בריבוי של השורש.

מה עושים? נשנה את שיטת האיטרציה על ידי הכפלה ב q: נקבל:

$$x_{n+1} = x_n - q\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$\varphi(x) = x - q\frac{f(x)}{f'(x)} = x - q\frac{(x-\alpha)}{A(x)}$$

$$\varphi'(x) = 1 - q\frac{1}{A^2(x)}\left[A(x) - (x-\alpha)\cdot A'(x)\right]$$

$$\varphi'(\alpha) = 1 - q\frac{1}{A(\alpha)} = 1 - q\frac{1}{q} = 1 - 1 = 0$$

מסקנה: $q \geq 2$, $p = 2$.

הבעיה: איך נדע מראש מהו q?

ננסה **<u>להעריך</u>** את q מתוך האיטרציות: $c = 1 - \frac{1}{q}$.

(אפשר לבצע זאת עבור q קטן - עבור $q \approx 100$ יהיה קשה להבדיל בין $1 - \frac{1}{100}$ ל $1 - \frac{1}{99}$ למשל).

דוגמה:

$$f(x) = \left(e^{-x} - x\right)\left(\ln(x) + x\right) = 0$$

ידוע שקיים שורש: $\alpha \in [0.1, 1.1]$ ורוצים למצוא אותו ואת q בניוטון רפסון עם $x_0 = 0.3$

ננחש ש $q = 1$: $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

נקבל:

x_n האיטרציה	$e_n = \lvert x_n - x_5 \rvert$ המרחק מהפתרון	e_{n+1}/e_n^2 אם $p=2$ זה קבוע	e_{n+1}/e_n אם $p=1$ זה קבוע
$x_0 = 0.3000$		2.16	0.55
$x_1 = 0.4144$		3.51	0.50
$x_2 = 0.4855$		6.25	0.44
$x_3 = 0.5250$		10.80	
$x_4 = 0.5457$			
$x_5 = 0.5563$			

מסקנה: $p = 1$ (רואים שהיחס בין השגיאות בין שתי איטרציות עוקבות הוא פחות או יותר קבוע)
לכן $q \geq 2$.

עבור איטרציות מסדר ראשון נצפה ש: $\frac{|\varepsilon_{n+1}|}{|\varepsilon_n|} = c < 1$

אבל $c = 1 - \frac{1}{q}$, לכן סביר להניח ש $q = 2$ כי אז $\frac{|\varepsilon_{n+1}|}{|\varepsilon_n|} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

כיצד נבדוק זאת: נבצע איטרציה עם $q=2$: $x_{n+1}=x_n-2\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

כעת נקבל:

e_{n+1}/e_n אם $p=1$ זה קבוע	e_{n+1}/e_n^2 אם $p=2$ זה קבוע	$e_n=\lvert x_n-x_3\rvert$ המרחק מהפתרון	x_n האיטרציה
0.14	0.54		$x_0=0.3000$
0.016	0.39		$x_1=0.5288$
	…		$x_2=0.5666$
	const...		$x_3=0.5671$

ניתן לראות שההתייצבות של הספרות מהירה בהרבה.

מתייצב לקבוע שונה מאפס

ירידה חזקה.

לכן סדר ההתכנסות כעת הוא $p=2$ וההנחה ש $q=2$ היא נכונה.

עבור $p=1$ כדאי לבדוק את היחס: $\frac{\lvert x_n-x_{n-1}\rvert}{\lvert x_{n-1}-x_{n-2}\rvert}=c$

<u>פתרון של מערכת משוואות</u>

$$f_1(x_1,x_2,x_3)=0$$
$$f_2(x_1,x_2,x_3)=0 \qquad \text{מטריצה בגודל } n\times n$$
$$f_3(x_1,x_2,x_3)=0$$

בצורה וקטורית: $\bar{x}=\bar{\alpha}\ ,\ \bar{f}(\bar{x})=0$

נניח שקיימת נקודת התחלה לאיטרציות: $\bar{x}^{(0)}$ (כלומר ווקטור התחלה)

רוצים לפתור את המשוואה $\bar{f}(\bar{x})=0$.

מבצעים לינאריזציה: $\bar{f}\left(\bar{x}^{(0)}\right)+J\left(\bar{x}^{(0)}\right)\cdot\left(\bar{x}^{(0)}-\bar{x}^{(\alpha)}\right)=0$

J - מטריצת היעקוביאן - מטריצה בגודל $n\times n$.

$$[J]_{n\times n}=\frac{d\bar{f}}{d\bar{x}}=\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3}\\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3}\\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3}\end{pmatrix}$$

בצורה של איטרציה נרשום זאת: $\bar{x}^{(k+1)}=x^{(k)}-J^{-1}_{\left(\bar{x}^{(k)}\right)}\cdot\bar{f}\left(\bar{x}^{(k)}\right)$

בעיה, יש כאן שימוש במטריצה הופכית של המטריצה J , וזה דבר שלוקח הרבה זמן לחשב.

לכן נרשום במקום זאת: $\bar{x}^{(k+1)}=x^{(k)}+\bar{y}^{(k)}$

כאשר $\bar{y}^{(k)}$ מתקבל ע"י פתרון המשוואה: $J_{\left(\bar{x}^{(k)}\right)}\bar{y}^{(k)}=-\bar{f}\left(x^{(k)}\right)$

חישוב הווקטור $\bar{y}^{(k)}$ הוא הרבה יותר יעיל מאשר מציאת המטריצה ההופכית $J^{-1}_{\left(\bar{x}^{(\bar{k})}\right)}$.

<u>"נורמה"</u> סימון: $\|\bar{x}\|$

סקלר שמודד גודל של מטריצה או גודל של וקטור.

נדבר על ה"נורמה" של המרחק מהשורש, כי אין לנו מרחק ישיר מהשורש, כי מדובר במטריצה ולא במספר אחד.

נורמת המקסימום: $\|\bar{x}\|_\infty=\max_i|x_i|$ - כלומר הערך המקסימאלי שמופיע בווקטור.

ניתן גם לרשום באותו אופן נורמה של מטריצה: $\|A_{n\times n}\|$ ולהגדיר את נורמת המקסימום של המטריצה $\|A_{n\times n}\|_\infty$ סכום השורה המקסימאלי.

שיטת ניוטון צפויה להתכנס בדרך כלל כאשר $\bar{x}^{(0)}$ קרוב מספיק ל $\bar{\alpha}$.

כאשר יש התכנסות בדרך כלל מתקיים: $\left\|\bar{x}^{(k+1)}-\bar{\alpha}\right\|_\infty\le\frac{M}{2}\left(\left\|\bar{x}^{(k)}-\alpha\right\|_\infty\right)^2$ - כלומר, סדר ההתכנסות הוא לפחות 2.

M הוא החסם של הנורמה של נגזרות פונקצית האיטרציה $G(x)=\bar{x}-J^{-1}\bar{f}(\bar{x})$ בסביבת השורש.

<u>נקודת שבת עבור מערכת משוואות</u>

נתונה מערכת $\overline{f}(x)=0$ בגודל $n\times n$ שרוצים לפתור.

מתוך המערכת הזאת ניצור מערכת $\overline{x}=\overline{\varphi}(x)$.

דוגמה:	נרשום במקום זאת:
$f_1(x_1,x_2)=0$	$x_1=\varphi(x_1,x_2)$
$f_2(x_1,x_2)=0$	$x_2=\varphi(x_1,x_2)$

נקבל: $\overline{x}^{(k+1)}=\overline{\varphi}\left(x^{(k)}\right)$ עבור $k=0,1,2,3,...$ כאשר הנקודה ההתחלתית היא $\overline{x}^{(0)}$.

בדרך כלל מתקבלת התכנסות מהצורה: $\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{\left\|\overline{x}^{(k+1)}-\alpha\right\|_\infty}{\left\|\overline{x}^{(k)}-\alpha\right\|_\infty}=c<1$ $(c>0)$

<u>פתרון מערכת ליניארית:</u>

באופן כללי מסמנים: $A\overline{x}=\overline{b}$, מערכת $n\times n$ כאשר $\det(A)\neq 0$.

<u>פתרון יעיל:</u> לא באמצעות כלל קרמר: הסיבוכיות שלו היא $O(n!)$

א. שיטות ישירות - מספר סופי של הצבות לקבלת הפתרון.
ב. שיטות איטרטיביות.

<u>שיטות ישירות:</u>

מערכת משולשת:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+...+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{22}x_2+...+a_{2n}x_n=b_2 \\ \vdots \quad 0 \\ a_{nn}x_n=b_n \end{cases}$$

פתרון של משוואה כזאת הוא קל.

$$x_n=\frac{b_n}{a_{nn}} \qquad x_{n-1}=\frac{b_{n-1}=a_{n-1,n}x_n}{a_{n-1}a_{n-1}}$$ וכו'.

הפתרון דורש בערך $\frac{1}{2}n^2+n$ פעולות.

<u>שיטת החילוץ של גאוס</u> Gauss elimination- נתונה מערכת שהיא לא משולשת. נבצע עליה פעולות חוקיות על העמודות או על השורות ונביא אותה לצורה משולשת.

$$(1)\ a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1$$
$$(2)\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2$$
$$(3)\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3$$

$\left(\frac{a_{21}}{a_{11}}\right)\times(1)$ נחסיר מ (2) $\qquad$ $\left(\frac{a_{31}}{a_{11}}\right)\times(1)$ נחסיר מ (3) $\qquad$ נסמן: $m_{21}=\left(\frac{a_{21}}{a11}\right)$

נקבל:

$$(2')\ a_{22}^{(2)}x_2 + a_{23}^{(2)}x_3 = b_2^{(2)}$$
$$(3')\ a_{32}^{(2)}x_2 + a_{33}^{(2)}x_3 = b_3^{(2)}$$

כעת משוואה $(2')$ כבר מתאימה לצורה המשולשת.

$\left(\frac{a_{32}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}}\right)\times(2')$ נחסיר מ (3)

נקבל: $(3'')\ \ +a_{33}^{(3)}x_3 = b_3^{(3)}$ כעת קיבלנו מערכת משולשת.

כמה פעולות הדבר הזה לוקח? בערך $\frac{1}{3}n^3+\frac{1}{2}n^2$ פעולות.

מסקנה: פתרון מערכת בשיטת החילוץ של גאוס לוקח $O\left(n^3\right)$ פעולות.

המטריצה שהתקבלה: $u = \begin{pmatrix} a^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \dots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \dots & a_{2n}^{(2)} \\ & 0 & \dots & \vdots \\ & & 0 & a_{nn}^{(n)} \end{pmatrix}$

אם $L = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ m_{21} & 1 & & \\ m_{31} & m_{32} & 1 & \\ \vdots & \dots & & 1 \end{pmatrix}$ אז $A = Lu$

נכפיל את המשוואה $A = Lu$ ב $\bar{x}$ מצד ימין ונקבל: $A\bar{x} = \left(L\bar{u}\right)\bar{x}$. אבל $A\bar{x} = \bar{b}$ לכן:

$A\bar{x} = \left(Lu\right)\bar{x} = L\underbrace{\left(u\bar{x}\right)}_{\bar{g}} = \bar{b}$ (נסמן $u\bar{x} = \bar{g}$) נקבל: $L\bar{g} = \bar{b} \Rightarrow \bar{g}$ $\qquad u\bar{x} = \bar{g} \Rightarrow \bar{x}$

$$\det\left(A\right) = \underbrace{\det\left(L\right)}_{=1}\cdot\det\left(u\right) = \det\left(u\right) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}^{(i)}$$

איך מוצאים הופכי של מטריצה?

נתונה המטריצה A ומחפשים את המטריצה A^{-1}. נגדיר מטריצה: $X = A^{-1}$.

נסתכל על המערכת: $AX = I$ כאשר I היא מטריצת היחידה.

לדוגמה:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

נסמן: $\begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{pmatrix} = \bar{y}$ $\quad \begin{pmatrix} x_{21} \\ x_{22} \end{pmatrix} = \bar{z}$

וכעת נפתור את המשוואות: $A\bar{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $A\bar{z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ מה המוקש בשיטת החילוץ של גאוס? בכל שלב צריך לחלק באיזשהו מספר $\left(\frac{a_{21}}{a_{11}}\right)\times(1)$. מה קורה אם באיזשהו שלב צריך לחלק באפס או במספר קרוב לאפס? מחליפים בין השורות.

<u>שיטות איטרטיביות</u>
החיסרון של השיטה של גאוס היא שהיא לא מתחשבת בכך שהרבה פעמים המטריצה A היא מטריצה דלילה - כלומר, חלק גדול מהאיברים שלה ההם אפס.

<u>שיטת יעקובי *Jacobi*</u> :

בשורה מספר i מחלצים את x_i ורושמים: $x_i = \frac{1}{a_{ii}}\left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j\right]$

עבור $i = 1,2,...,n$ (מנחים ש $a_{ii} \neq 0$)

קיבלנו צורה איטרטיבית: $x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right]$

השיטה הזאת ניתנת ל"מיקבול - פרלליזציה" - הרצה במקביל על כמה מעבדים נפרדים.

התכנסות מובטחת מכל $\bar{x}^{(0)}$ כאשר ל A דומיננטיות אלכסונית.
למטריצה A דומיננטיות אלכסונית אם $|a_{ii}| > \sum_{j\neq i}|a_{ij}|$ לכל i.
(כלומר האיבר על האלכסון גדול מסכום כל שאר האיברים באותה שורה).

<u>שיטת גאוס זידל:</u> משתמשים באיברים שחישבנו באותה איטרציה:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right]$$

שיטה זאת לא ניתנת למיקבול כל כך בקלות.

<u>דיוק הפתרון באופן כללי למערכת</u> $A\bar{x} = \bar{b}$
מניחים שיש שגיאה ב $\bar{b}$ - $\delta\bar{b}$ ושגיאה ב A - δA.
מה אפשר לדעת על השגיאה בתוצאה $\delta\bar{x}$?
הניתוח מתבצע באמצעות נורמות.

הגדרנו בעבר מספר מצב Cp בשביל למדוד רגישות של חישוב לשגיאה.
נגדיר $K(A)$ - מספר המצב של המטריצה A שימדוד את הרגישות של המטריצה לשגיאות.

$$K(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$$

אם $K(A) >> 1$ אז זה אומר שהמטריצה ההופכית קרובה לאפס, או שהדטרמיננטה של המטריצה קרובה לאפס. במקרה כזה נאמר שהמטריצה חולנית - $ill-condition$.
אחרת נאמר שמטריצה מוגדרת היטב: $well-condition$.

חסם על השגיאה היחסית - מספר המצב של המטריצה כפול סכום השגיאות היחסיות במטריצה A ובווקטור $\bar{b}$. - $\frac{\|\delta\bar{x}\|}{\|x\|} \leq K(A)\left[\frac{\|\delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\delta\bar{b}\|}{\|\bar{b}\|}\right]$

אם השגיאה היחסית במחשב חסומה על ידי u אז:

$$\frac{\|\delta\bar{x}\|}{\|x\|} \leq K(A)\left[\frac{\|\delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\delta\bar{B}\|}{\|\bar{B}\|}\right] \leq K(A)\cdot 2u$$