<u>פתרון מערכת משוואות</u>: $A\bar{x}=\bar{b}$ בגודל $n\times n$.

הגדרנו מספר מצב עבור המטריצה: $K(A)=\|A\|\cdot\|A^{-1}\|$

באמצעות הגדרת נורמת המקסימום של המטריצה: $\|A\|_\infty=\max\sum_{\text{על שורה}}|a_{i,j}|$

מה השגיאה שתיווצר באגף שמאל כאשר יש שגיאה באגף ימין? $A(\bar{x}+\delta\bar{x})=\bar{b}+\delta\bar{b}$

נקבל: $\bar{x}+\delta\bar{b}=A^{-1}b+A^{-1}\delta\bar{b}$ מכיוון ש $\bar{x}=A^{-1}b$ נקבל: $\delta\bar{b}=A^{-1}\delta\bar{b}$.

על פי ההגדרה: $\bar{b}=A\bar{x}$. לכן $\|\bar{b}\|=\|A\bar{x}\|\le\|A\|\cdot\|\bar{x}\|$. אפשר לרשום גם: $\frac{\|\bar{b}\|}{\|A\|}\le\cdot\|\bar{x}\|$

$$\frac{\|\delta\bar{x}\|}{\|\bar{x}\|}=\frac{\|A^{-1}\delta\bar{b}\|}{\|\bar{x}\|}\le\frac{\|A^{-1}\|\|\delta\bar{b}\|}{\|\bar{x}\|}\le\underbrace{\|A^{-1}\|\|A\|}_{K(A)}\frac{\|\delta\bar{b}\|}{\|\bar{b}\|}$$

כלומר השגיאה היחסית ב $\bar{x}$ היא לכל היותר השגיאה היחסית ב $\bar{b}$ כפול מספר המצב של המטריצה A.

בפועל יש שגיאה ב A ולכן נגרמת שגיאה בתוצאה $\bar{x}$. כלומר: $(A+\delta A)(\bar{x}+\delta\bar{x})=\bar{b}$.

נפתח את זה: $A\bar{x}+\delta A(\bar{x}+\delta\bar{x})+A\delta\bar{x}=\bar{b}$. ידוע ש $A\bar{x}=\bar{b}$ ולכן: $\delta A(\bar{x}+\delta\bar{x})+A\delta\bar{x}=0$.

באמצעות מניפולציה פשוטה נגיע ל: $\frac{\|\delta\bar{x}\|}{\|\bar{x}+\delta\bar{x}\|}\le K(A)\cdot\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}$.

בדרך כלל $\delta\bar{x}<<\bar{x}$ ולכן השגיאה היחסית ב $\bar{x}$ שוב חסומה על ידי השגיאה היחסית במטריצה A כפול מספר המצב של המטריצה A.

<u>שיטת איטרציה</u>

באופן כללי עבור מערכות ליניאריות: $\bar{x}^{(k+!)}=B\bar{x}^{(x)}+\bar{c}$ עבור $k=1,2,...$

עבור $k\to\infty$ נקבל $\bar{x}=B\bar{x}+\bar{c}$

יעקובי: $x_i^{(k+1)}=\frac{1}{a_{ii}}\left[\sum_{\substack{i=1\\i\ne j}}^{n}a_{ij}x_j^{(k)}+b_i\right]$

במקרה זה:

$$B=\begin{pmatrix}0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & -\frac{a_{13}}{a_{11}}\cdots & -\frac{a_{1N}}{a_{11}}\\ -\frac{a_{21}}{a_{11}} & 0 & & \\ -\frac{a_{31}}{a_{11}} & & 0 & \\ \vdots & & & \\ -\frac{a_{N1}}{a_{11}} & & & 0\end{pmatrix}\qquad \bar{c}=\left\{\frac{b_i}{a_{ii}}\right\}$$

נחשב את השגיאות בכל איטרציה: $\bar{\varepsilon}^{(k+1)}=B\bar{\varepsilon}^{(k)}$ - ווקטור השגיאה.

נחסום את השגיאה: $\|\bar{\varepsilon}^{(k+1)}\|\le\|B\|\cdot\|\bar{\varepsilon}^{(k)}\|$.

נקבל שיש התכנסות של השגיאה כאשר $\|B\|<1$. ההתכנסות תהיה מכל $\bar{x}^{(0)}$.

נניח שלמטריצה B יש ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים בלתי תלויים ליניארית.
הערכים העצמיים: $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$
הווקטורים העצמיים: $\bar{u}_1, \bar{u}_2, ..., \bar{u}_n$ כלומר: $A\bar{u}_i = \lambda_i \bar{u}_i$

$$\bar{\varepsilon}^{(0)} = \alpha_1\bar{u}_1 + \alpha_2\bar{u}_2 + ... + \alpha_n\bar{u}_n \qquad \bar{\varepsilon}^{(1)} = B\bar{\varepsilon}^{(0)} = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\lambda_i\bar{u}_i \qquad \bar{\varepsilon}^{(2)} = B\bar{\varepsilon}^{(1)}$$

נקבל: $\bar{\varepsilon}^{(k)} = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\lambda_i^k\bar{u}_i$. מתי זה שואף לאפס?

נגדיר: $\rho(B) = \max\{|\lambda_i| \mid 1 \le i \le n\}$ - הרדיוס הספקטראלי של המטריצה.

התכנסות מובטחת מכל $\bar{x}^{(0)}$ התחלתי, אם ורק אם $\rho(B) < 1$ - הרדיוס הספקטראלי קטן מאחד.

<u>קירוב פונקציות</u>

מעוניינים לקרב $f(x)$ על ידי $f^*(x)$ שהיא פונקציה בעלת תכונות עדיפות מבחינה מתמטית ו/או חישובית.
מה זה תכונות עדיפות מבחינה מתמטית / חישובית? משהו שקל יחסית לחשב.

איך נתונה הפונקציה $f(x)$?
היא יכולה להיות נתונה באופן רציף (נוסחה) או באופן דיסקרטי (טבלת ערכים).
המעבר מפונקציה הנתונה באופן רציף לפונקציה הנתונה באמצעות טבלה הוא תמיד אפשרי.
הכיוון ההפוך הוא לרוב בלתי אפשרי.

<u>דוגמה:</u> נתון: $f(x) = \int_0^x e^{-t^2}dt$ ורוצים עבור $x \in [-1,1]$ לחשב ערכים של $f(x)$ בדיוק של לפחות 10^{-4}. כלומר, השגיאה בין הערך המדויק לבין הערך שאנחנו נותנים, תהיה קטנה מ 10^{-4}.

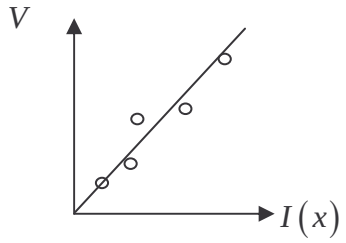
נרשום: $e^{-t^2} = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j}{j!}t^{2j}$ (פיתוח מקלורן - טיילור סביב הנקודה 0).

טור זה מתכנס בערכו המוחלט. לכן ניתן לרשום:

$$f^*(x) = \int_0^x \sum_{j=0}^{N}\left(\frac{(-1)^j}{j!}t^{2j}\right)dt = \sum_{j=0}^{N}\frac{(-1)^j \cdot x^{2j+1}}{(2j+1)!}$$ - טור לייבניץ.

עבור $N = 6$ נקבל שהשגיאה בערכה המוחלט קטנה מ $1.4 \cdot 10^{-5}$.
כלומר, מובטח ש $|f^*(x) - f(x)| < 10^{-4}$ לכל $x \in [-1,1]$.

<u>דוגמה:</u> נניח שמבצעים ניסוי של מדידת ההתנגדות של מוליך כלשהו.
מחברים את המוליך למעגל חשמלי שבו יש שני מכשירי מדידה - אחד למתח ואחד לזרם.
מפעילים מתח V, ומודדים את הזרם I שמתקבל על המוליך.



ידוע: $V + IR$

$$\left.\begin{matrix} x_0, x_1, x_2, ..., x_m \\ f(x_0), f(x_1), ..., f(x_m) \end{matrix}\right\} f^*(x) = R \cdot x$$

באופן כללי: $f^*(x)=c_0\varphi_0(x)+c_1\varphi_1(x)+\ldots+c_n\varphi_n(x)$

עבור: φ_i-ים - פונקציות בלתי תלויות ליניאריות ידועות.

חישוב c_i-ים "באופן מוצלח.

איך מוצאים את המקדמים c_i-ים?

$f(x)$ נתונה באמצעות טבלה. נניח $m=n$. ($x_j \neq x_i$ עבור $i \neq j$).

דרישת קולוקציה, אינטרפולציה: נדרוש שהפונקציה המקרבת תזדהה עם הפונקציה הנתונה בכל אחת מנקודות הדגימה. כלומר: $f^*(x_i)=f(x_i)$ עבור $i=0,1,\ldots,m$.

כלומר:

$$c_0\varphi_0(x_0)+c_1\varphi_1(x_0)+\ldots+c_n\varphi_n(x_0)=f(x_0)$$
$$c_0\varphi_0(x_1)+c_1\varphi_1(x_1)+\ldots+c_n\varphi_n(x_1)=f(x_1)$$
$$\vdots$$
$$c_0\varphi_0(x_m)+c_1\varphi_1(x_m)+\ldots+c_n\varphi_n(x_m)=f(x_m)$$

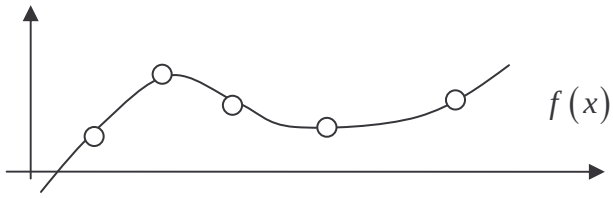
מכיוון ש $m=n$ נקבל שמספר המשוואות שווה למספר הנעלמים. הנעלמים הם $c_0,\ldots,c_n$.

ניתן להראות שאם הפונקציות φ_i הן בלתי תלויות ליניאריות, אז למערכת משוואות זאת יש פתרון, וזהו פתרון יחיד.

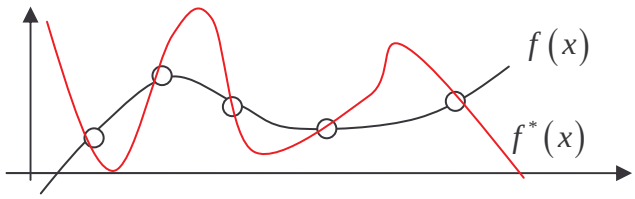
בדוגמה הקודמת אי אפשר לבצע התאמה כזאת, כי יש לנו רק פונקציה אחת $V=RI$ בעוד שיש לנו מספר נקודות מדידה.

בדרך כלל $m>n$, כלומר יש יותר נתונים בטבלה מאשר מספר פונקציות הבסיס.

נניח שיש לנו פונקציה ומבצעים אינטרפולציה באמצעות נקודות מדידה



אנחנו עלולים לקבל פונקציה שבכלל לא דומה לה:



נרצה ש"המרחק" בין $f^*(x)$ לבין $f(x)$ יהיה קטן ככל האפשר.

נמדוד את המרחק בין הפונקציות באמצעות **נורמה**.

$e(x)=f^*(x)-f(x)$ - השגיאה בכל נקודה, באופן רציף.

$e(x)=f^*(x_i)-f(x_i)$ - השגיאה בנקודות המדידה, באופן דיסקרטי.

הנורמה של השגיאה תסומן ב $\|e\|$.

נורמה עבור פונקציה f כלשהי: נסמן: $L=\|f\|$.

<u>דרישות:</u>

1. $\|f\|\geq 0$ - הנורמה לא שלילית.
2. $\|\alpha f\|=\alpha\|f\|$ - כאשר מכפילים את הפונקציה בקבוע, הנורמה שלה מוכפלת בקבוע זה.
3. $\|f+g\|\leq\|f\|+\|g\|$ - אי שוויון המשולש.
4. $\|f|=0|$ אם ורק אם $f\equiv 0$ בקטע הרלוונטי.

אפשרות להגדרת הנורמה: $L_1=\|f\|_1=\int_a^b|f(x)dx|$

נסתכל למשל על התכונה הרביעית - האינטגרל הזה שווה ל 0 אם ורק אם הפונקציה היא זהותית אפס בתחום הזה.

נגדיר: נורמת המקסימום של פונקציה

$L_\infty=\|f\|_\infty=\max_{a\leq x\leq b}\{|f(x)|\}$ - כלומר, הערך המוחלט המקסימאלי שהפונקציה מקבלת בתחום.

נתונה פונקצית משקל $w(x)$. נדרוש: $w(x)>0$ ורציפה בתחום (a,b).

נגדיר $L_p=\|f\|_p=\left[\int_a^b|f(x)|^p w(x)dx\right]^{\frac{1}{p}}$ עבור $p\geq 1$.

במקרה הפרטי $p=2$ נקבל את הנורמה האוקלידית: $L_2=\|f\|_2=\left[\int_a^b f(x)^2 w(x)dx\right]^{\frac{1}{2}}$

מה קורה כאשר הפונקציה שלנו נתונה בצורה דיסקרטית? לא ניתן לבצע את האינטגרלים, כדי לחשב את הנורמה $L_p=\|f\|_p=\left[\int_a^b|f(x)|^p w(x)dx\right]^{\frac{1}{p}}$.

לכן נחשב רק "סמי-נורמה" באמצעות סכימה במקום אינטגרל: $L_p=\|f\|_p=\left[\sum_{i=0}^{n}|f(x_i)|^p w(x_i)\right]^{\frac{1}{p}}$

הסמי נורמה מקיימת את שלוש התכונות הראשונות, אבל לא בהכרח את התכונה הרביעית, כי לא ניתן לדעת מה ערך הפונקציה מחוץ לנקודות הדגימה.

$L_2=\left[\sum_{i=0}^{n}f(x_i)^2 w(x_i)\right]^{\frac{1}{2}}$ - מרחק גיאומטרי.

בעיית מינימום ריבועים - נרצה שהנורמה השניה (או הסמי-נורמה השניה) תהיה מינימאלית.

בבעיית קולוקציה, אינטרפולציה, מתקיים $\|e\|=0$ מכיוון שההפרש בין הפונקציה המקרבת לבין הפונקציה האמיתית הוא 0.

<u>מכפלה פנימית - מכפלה סקלרית, מערכות אורתוגונאליות</u>

$(f,g)=\begin{cases}\int_a^b f(x)g(x)w(x)dx & .1\\ \sum_{i=0}^{m} f(x_i)g(x_i)w(x_i) & .2\end{cases}$ מכפלה פנימית של פונקציות כלליות f,g .

בשביל ההגדרה הראשונה צריך לדעת את $a,b,w(x)$

בשביל ההגדרה השניה צריך לדעת את $w(x_i)$ עבור $i=0,1,...,m$

<u>משפט</u>: $(f,f)=\left(\|f\|_2\right)^2$

<u>זהות:</u>

$$(f+g,f+g)=\left(\|f+g\|_2\right)^2=(f,f)+(g,g)+2(f,g)=\left(\|f\|_2\right)^2+\left(\|g\|_2\right)^2+2(f,g)$$

<u>הגדרה</u>: נסמן $f\perp g$ אם ורק אם $(f,g)=0$. (הפונקציות אורתוגונאליות)

אם $f\perp g$ אז מתקיים **<u>משפט פיתגורס:</u>** $\left(\|f+g\|_2\right)^2=\left(\|f\|_2\right)^2+\left(\|g\|_2\right)^2$

<u>הגדרה:</u> סדרה $\varphi_0(x),\varphi_1(x),...,\varphi_n(x)$ תיקרא אורתוגונאלית אם ורק אם מתקיימים התנאים הבאים:

1. $(\varphi_i,\varphi_j)=0$ לכל $i\neq j$ עבור $i,j\in\{0,1,...,n\}$
2. $(\varphi_i,\varphi_i)=\|\varphi_i\|^2>$ עבור $i\in\{0,1,...,n\}$

נניח שיש לנו סדרה של שלוש פונקציות אורתוגונאלית: f,g,h .

אזי מתקיים: $\left(\|f+g+h\|_2\right)^2=\|f\|^2+\|g\|^2+\|h\|^2$ (כל הנורמות מכאן ואילך הן אוקלידיות)

ניתן להרחיב זאת לכל מספר של פונקציות.

ניתן להראות שעבור סידרה אורתוגונאלית מתקיים **<u>המשפט</u>** הבא: $\left\|\sum_{j=0}^{n}c_j\varphi_j(x)\right\|^2=\sum_{j=0}^{n}c_j^{\,2}\|\varphi_j\|^2$

אגף שמאל יכול להיות אפס רק כאשר כל ה c_j-ים הם אפס.

<u>מסקנה</u>: סדרה אורתוגונאלית היא בלתי תלויה ליניארית.

דוגמה:

נתונה סדרת הפונקציות: $\varphi_j(x)=cos(j\cdot x)$ עבור $j=0,1,...n$.

נתונה המכפלה הפנימית: $(f,g)=\int_0^{\pi}f(x)g(x)dx$ (כלומר $w(x)\equiv 1$, $a=0$ ו $b=\pi$)

צריך להוכיח שהסדרה אורתוגונאלית עבור $n=\infty$ ועבור המכפלה הפנימית הנתונה.

צריך לבדוק שמתקיים שמכפלה פנימית בין כל שני איברים שונים בסדרה מתאפסת.

האם $(\varphi_j,\varphi_{k\neq j})=0$?

$$\left(\varphi_j,\varphi_{k\neq j}\right)=\int_0^{\pi}cos\left(j\cdot x\right)\cdot cos\left(k\cdot x\right)dx=\int_0^{\pi}\frac{1}{2}\left[cos\left(\left(j-k\right)x\right)+cos\left(\left(j+k\right)x\right)\right]dx$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{sin\left(\left(j-k\right)x\right)}{j-k}+\frac{sin\left(\left(j+k\right)x\right)}{j+k}\right]_{x=0}^{\pi}=0$$

(השוויון האחרון מתקיים כי j,k מספרים שלמים)

$\left(\varphi_j,\varphi_j\right)=\int_0^{\pi}cos^2\left(j\cdot x\right)dx$ אם $j=0$ אז הערך הזה הוא π אחרת, הערך הזה הוא $\frac{\pi}{2}$.

בכל מקרה, $\left(\varphi_j,\varphi_j\right)\neq 0$.

כעת נתונה טבלת נקודות דגימה: $x_i=\frac{2i+1}{m+1}\cdot\frac{\pi}{2}$ עבור $i=0,1,2,...,m$

נתונה המכפלה הפנימית הדיסקרטית: $\left(f,g\right)=\sum_{i=0}^{m}f\left(x_i\right)g\left(x_i\right)$, כלומר: $w\left(x\right)\equiv 1$.

צריך להוכיח: הסדרה הנ"ל (הקוסינוסים) היא אורתוגונאלית עבור $n=m$.

(כדאי לעבור לכתיבה מרוכבת כדי להוכיח זאת).