קירובי פונקציות באמצעות פולינומים (המשך)

משפחה משולשת של פולינומים

משפחה של פולינומים מהצורה
$$\begin{bmatrix}\varphi_0(x)\\ \varphi_1(x)\\ \dots\\ \varphi_n(x)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x^0\\ x^1\\ \dots\\ x^n\end{bmatrix}\underbrace{\begin{bmatrix}a_{00} & & & 0\\ a_{10} & a_{11} & & \\ \dots & & \dots & \\ a_{n0} & a_{n1} & \dots & a_{nn}\end{bmatrix}}_{A}$$

כאשר לכל i $a_{ii}\neq 0$ ולכל $j>i$ $a_{ij}=0$.

מכיוון שהדטרמיננטה של המטריצה A היא לא אפס (המטריצה הפיכה) ניתן לרשום:
$$\begin{bmatrix}x^0\\ x^1\\ \dots\\ x^n\end{bmatrix}=A^{-1}\begin{bmatrix}\varphi_0\\ \varphi_1\\ \dots\\ \varphi_n\end{bmatrix}$$

משפט: כל פולינום $p_n(x)$ ניתן לכתיבה (יחידה) באמצעות צירוף ליניארי של אברי $\varphi_j(x)$ הנ"ל.
$$p_n(x)=c_0\varphi_0(x)+c_1\varphi_1(x)+\dots+c_n\varphi_n(x)$$

הוכחה: $\varphi_n(x)=a_0+a_1x+\dots a_nx^n$

אינטרפולציה:

לכל $i\neq j$ מתקיים $x_i\neq x_j$

נקודות הדגימה: $x_0,x_1,\dots,x_m$
$f_0,f_1,\dots f_m$

$$\varphi_0(x)=1$$
$$\varphi_1(x)=(x-x_0)$$
$$\varphi_2(x)=(x-x_0)(x-x_1)$$
$$\dots$$
$$\varphi_m=(x-x_0)(x-x_1)\cdot\dots\cdot(x-x_{m-1})$$

פולינום האינטרפולציה על פי ניוטון: $p_m=c_0\varphi_0(x)+c_1\varphi_1(x)+\dots+c_m\varphi_m(x)$

דרך לקביעת המקדמים: דרישת האינטרפולציה: $p_m(x_i)=f_i$

דרישת האינטרפולציה בנקודה הראשונה: $p_m(x_0)=c_0\cdot 1=f_0$ (כל שאר ה φ_i-ים מתאפסים).

מסקנה: מצאנו מיד את c_0.

בנקודה השניה: $p_m(x_1)=c_0\cdot 1+c_1(x_1-x_0)=f_1$ (כל שאר ה φ_i-ים מתאפסים)

מכאן ניתן למצוא את c_1.

ניתן כך להמשיך עד שנמצא את $p_m(x_m)=f_m$

מה קורה אם מוסיפים נקודת דגימה (x_{m+1}, f_{m+1})?

נגדיר באופן דומה את $\varphi_m = (x-x_0)(x-x_1)\cdot\ldots\cdot(x-x_{m-1})(x-x_m)$

ואת הפולינום של ניוטון: $p_{m+1} = c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + \ldots + c_m\varphi_m(x) + c_{m+1}\varphi_{m+1}(x)$

כעת הדבר היחיד שיש לחשב הוא את c_{m+1}. כל שאר ה c_i-ים נשארים אותו הדבר.

לכל $k \le m$ מתקיים: $p_k = c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + \ldots + c_k\varphi_1(x)$ - הפולינום הזה מהווה פולינום אינטרפולציה (חלקית) עבור הנקודות $x_0, x_1, \ldots, x_k$ כי לכל $i \le k$ מתקיים $p_k(x_i) = f_i$.

<u>משפט</u>: כל לאחד מהמקדמים c_k עבור $k \in \{1, 2, \ldots, m\}$ באינטרפולציה הנ"ל הוא פונקציה סימטרית של הנקודות שבאמצעותן הוא חושב.

דוגמה: c_3 הוא תוצאה של הנקודות x_0, x_1, x_2, x_3.

אם נרשום את פולינום האינטרפולציה החלקית p_k בסדר שונה, למשל: x_3, x_0, x_1, x_2 נקבל:

$$p_k(x) = c_0 \cdot 1 + c_1(x-x_3) + c_2(x-x_3)(x-x_0) + c_3(x-x_3)(x-x_0)(x-x_1)$$

נקבל ש c_3 לא ישתנה.

<u>הוכחה</u>:

$$p_k(x) = c_k x^k + \ldots.$$

מכיוון שהפולינום האינטרפולציה (החלקית) p_k הוא יחיד, מתחייב ש c_k הוא יחיד.

<u>חישוב בשיטת הורנר</u>

רוצים לחשב: $p_m(x=\alpha) =$ מספר

מהי סיבוכיות החישוב? היינו רוצים למצוא דרך חישוב קלה.

דוגמה: $p_3(x) = c_0 + c_1(x-x_0) + c_2(x-x_0)(x-x_1) + c_3(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$

נניח שהמקדמים c_0, c_1, c_2, c_3 כבר ידועים.

נציב את α:

$$\begin{aligned} p_3(\alpha) = c_0 &+ c_1(\alpha - x_0) \\ &+ c_2(\alpha-x_0)(\alpha-x_1) \\ &+ c_3(\alpha-x_0)(\alpha-x_1)(\alpha-x_2) \end{aligned}$$

יש כאן גורמים משותפים!

נחשב: $b_3 = c_3(\alpha - x_2)$

אחר כך נחשב: $b_2 = (b_3 + c_2)(\alpha - x_1)$

אחר כך נחשב: $b_1 = (b_2 + c_1)(\alpha - x_0)$

אחר כך נחשב: $b_0 = b_1 + c_0$

נקבל: $p_3(\alpha) = b_0$

חישוב זה הוא ליניארי במספר הגורמים בניגוד לשיטה הישירה שהיא ריבועית.

שיטת ההפרשים המחולקים Divided differences

נתונה טבלת נקודות הדגימה $\begin{matrix} x_0, x_1, \dots, x_m \\ f_0, f_1, \dots f_m \end{matrix}$, כאשר הנקודות שונות זו מזו אבל לאו דווקא מסודרות.

נגדיר: $f\left[x_i\right] = f\left(x_i\right)$

$$f\left[x_i, x_j\right] = \frac{1}{x_j - x_i} \cdot \left\{ f\left[x_j\right] - f\left[x_i\right] \right\}$$

$$f\left[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{k-1}, x_k\right] = \frac{1}{x_k - x_{k-1}} \cdot \left\{ f\left[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{k-2}, x_k\right] - f\left[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{k-2}, x_{k-1}\right] \right\}$$

$$= \frac{1}{x_k - x_i} \cdot \left\{ f\left[x_{i+1}, \dots, x_k\right] - f\left[x_i, \dots, f_{k-1}\right] \right\}$$

משפט: $c_k = f\left[x_0, x_1, \dots, x_k\right]$ לכל $k \in \{0,1,\dots,n\}$.

כלומר ניתן למצוא את המקדמים באמצעות ההפרשים המחולקים.

ההוכחה היא באינדוקציה:

נשתמש בניסוח הראשון:

$$f\left[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{k-1}, x_k\right] = \frac{1}{x_k - x_{k-1}} \cdot \left\{ f\left[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{k-2}, x_k\right] - f\left[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{k-2}, x_{k-1}\right] \right\}$$

$f\left[x_0\right] = f_0 = c_0$ כנדרש.

$$f\left[x_0, x_1\right] = \frac{1}{x_1 - x_0} \left\{ f\left[x_1\right] - f\left[x_0\right] \right\} = \dots = c_1$$

(מציבים $f\left[x_1\right] = c_0 \cdot 1 + c_1\left(x_1 - x_0\right)$ ו $f\left[x_0\right] = c_0$)

ניתן להמשיך כך באינדוקציה ולקבל את כל ה c_i-ים.

i	x_i	f_i	$f\left[x_i, x_{i+1}\right]$	$f\left[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}\right]$	...
0	x_0	f_0	$f\left[x_0, x_1\right]$	$f\left[x_0, x_1, x_2\right]$	
1	x_1	f_1	$f\left[x_1, x_2\right]$	$f\left[x_1, x_2, x_3\right]$	
2	x_2	f_2	$f\left[x_2, x_3\right]$		
3	x_3	f_3			
...	...	...			

דוגמה: $m=3$

i	x_i	f_i	$f[x_i,x_{i+1}]$	$f[x_i,x_{i+1},x_{i+2}]$	$f[x_i,x_{i+1},x_{i+2},x_{i+3}]$
0	1	$c_0=0$	$c_1=\frac{2-0}{2-1}=2$	$c_2=\frac{5-2}{4-1}=1$	$c_3=\frac{1-1}{5-1}=0$
1	2	2	$\frac{12-2}{4-2}=5$	$\frac{8-5}{5-2}=1$	
2	4	12	$\frac{20-12}{5-4}=8$		
3	5	20			

$p_3(x)=c_0\cdot 1+c_1(x-1)+c_2(x-1)(x-2)+c_3(x-1)(x-2)(x-4)$ פולינום האינטרפולציה על פי ניוטון.

קיבלנו פולינום מסדר שני - כלומר לא מובטח לנו שנקבל פולינום מהסדר המקסימאלי האפשרי (3). למשל עבור נקודות דגימה על פני קו ישר, נקבל פולינום מסדר ראשון, אפילו אם יהיו מליון נקודות דגימה.

אם היו כמה נקודות זהות, היינו מקבלים חלוקה באפס והתהליך היה נכשל.

בדיקה: נציב את אחת הנקודות ונראה אם נקבל את ערך הפונקציה בנקודת הדגימה:
$p_3(x=5)=\ldots=20$ כפי שהיה צריך להיות.

<u>בחירת נקודות הדגימה</u>

עד עכשיו הנחנו שמישהו בחר עבורנו את נקודות הדגימה.
כעת נתונה לנו פונקציה $f(x)$ וקטע $x\in[a,b]$ ונותנים לנו לבחור את נקודות הדגימה כדי ליצור את הפולינום המקרב, $p_m(x)$.

אפשר לבחור למשל **<u>במרווחים שווים</u>** בקטע הנתון. כמה תהיה השגיאה?

$$|r_m(x)|=\left|\frac{f^{m+1}(\xi)}{(m+1)!}\underbrace{(x-x_0)(x-x_1)\cdot\ldots\cdot(x-x_m)}_{\phi(x)}\right|$$

המטרה שלנו היא כמובן למזער את הערך הזה.

תופעת *Rungle*:
הבעיה היא שהערך של $\phi(x)$ עלול להיות גדול עבור מרווחים שווים והבעיה תהיה ill condition.
כלומר: $\lim_{m\to\infty}\left(\|r_m\|_\infty\right)=\infty$ (כאשר מספר נקודות הדגימה גדול, השגיאה דווקא תגדל)

$$\|r\|_\infty\le\left|\frac{f^{(m+1)}}{(m+1)!}\right|\left\|(x-x_0)(x-x_1)\cdot\ldots\cdot(x-x_m)\right\|_\infty$$

על הפונקציה f אין לנו שליטה, ולכן המטרה שלנו היא למזער את הביטוי
$\left\|(x-x_0)(x-x_1)\cdot\ldots\cdot(x-x_m)\right\|_\infty$

<u>נורמת מקסימום</u> של פונקציה בקטע היא הערך המוחלט המקסימאלי שהפונקציה יכולה לקבל בקטע.

פולינומים על שם צ'בישב

קשר טריגונומטרי ידוע: $cos(n\varphi)=2cos(\varphi)\cdot cos[(n-1)\varphi]-cos[(n-2)\varphi]$

באופן דומה: $cos[(n+1)\varphi]=2cos(\varphi)\cdot cos[n\varphi]-cos[(n-1)\varphi]$

עבור $n=1$ נקבל: $cos(\varphi)=cos(\varphi)$

עבור $n=2$ נקבל: $cos(2\varphi)=2(cos(\varphi))^2-1$

עבור $n=3$ נקבל: $cos(3\varphi)=2cos(\varphi)\cdot cos(2\varphi)-cos(\varphi)=4(cos(\varphi))^3-3(cos(\varphi))$

לכן נוכל להגדיר: $0\le\varphi\le\pi\ ,cos(\varphi)=x\ ,-1\le x\le 1$

ולקבל: $cos(n\varphi)\to T_m(x)=p_m(x)$

סה"כ: $T_0(x)=1$ $T_1(x)=x$ $T_2(x)=2x^2-1$ $T_3(x)=4x^3-3x$

<u>תכונות:</u>

1. קיימת נוסחת רקורסיה: $T_0(x)=1$ $T_1(x)=x$ לכל $n\ge 1$ $T_{n+1}(x)=2x\cdot T_n(x)-T_{n-1}(x)$

2. המקדם של x^n ב $T_n(x)$ הוא 2^{n-1} עבור $n\ge 1$.

3. סימטריה: $T_n(-x)=(-1)^n T_n(x)$

הפולינומים מסדר זוגי הם זוגיים והפולינומים מסדר אי זוגי הם אי זוגיים

4. ל $T_n(x)$ יש n שורשים ממשיים שונים בקטע $x\in[-1,1]$

והם: $x_k=cos\left(\frac{2k+1}{n}\cdot\frac{\pi}{2}\right)$ עבור $k\in\{0,1,...,n-1\}$

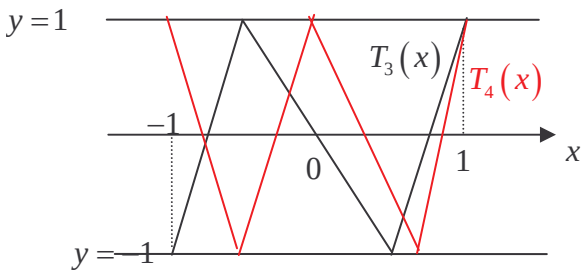
יש לו $(n+1)$ נקודות אכסטרמום (קיצון) בקטע $x\in[-1,1]$

והן: $x_k'=cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)$ עבור $k\in\{0,1,...,n\}$. $T_n(x_k')=(-1)^k$

הוכחה: $T_n(x)=cos(n\varphi)$ עבור $x=cos(\varphi)\ ,-1\le x\le 1$

$T_n(x)=2^{n-1}(x-x_0)(x-x_1)\cdot...\cdot(x-x_{n-1})$ כאשר הנקודות x_i הן השורשים.

דוגמה:



5. $(f,g)=\int_{-1}^{1} f(x)g(x)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$ - מכפלה פנימית במקרה הרציף עם פונקצית משקל.

עבור $i \neq j$ נקבל: $(T_i,T_j)=0$

עבור $i=j\neq 0$ נקבל $(T_i,T_j)=\frac{\pi}{2}$

עבור $i=j=0$ נקבל $(T_i,T_j)=\pi$

הוכחה: $cos(\varphi)=x$

$dx=-sin(\varphi)d\varphi$

$$(T_i,T_j)=\int_{\pi}^{0} cos(i\varphi)\cdot cos(j\varphi)\frac{1}{\cancel{|sin(\varphi)|}}\left(-\cancel{sin(\varphi)}\right)d\varphi$$

נבחר נקודות דגימה: $x_0,x_1,...,x_m$ באופן הבא: האפסים של $T_{m+1}(x)$

מכפלה פנימית במקרה הבדיד ללא פונקצית משקל:

$$(f,g)=\sum_{k=0}^{n} f(x_i)f(x_j)$$

$0\le i,j\le m$

עבור $i \neq j$ נקבל: $(T_i,T_j)=0$

עבור $i=j\neq 0$ נקבל $(T_i,T_j)=\frac{m+1}{2}$

עבור $i=j=0$ נקבל $(T_i,T_j)=m+1$

6. תכונת MINIMAX.

מכל הפולינומים האפשריים מדרגה n בעלי מקדם 1 בחזקה x^n, לפולינום $\frac{T_n(x)}{2^{n-1}}$

יש L_∞ מינימאלי בקטע $[-1,1]$. L_∞ זה הוא $\frac{1}{2^{n-1}}$

<u>הוכחה</u>:

נניח שקיים פולינום יותר טוב מהפולינום של צ'בישב $\frac{T_n(x)}{2^{n-1}}$. נקרא לו: $p_n(x)=x^n+...$.

הפולינום $\frac{T_n(x)}{2^{n-1}}$ מתנדנד בין $\frac{1}{2^{n-1}}$ לבין $-\frac{1}{2^{n-1}}$ כי $T_n(x)$ מתנדנד בין 1 לבין -1.

בנקודה: x_0' יש ל $\frac{T_n(x)}{2^{n-1}}$ נקודת מקסימום. לכן $p_n(x_0')\le\frac{T_n(x_0')}{2^{n-1}}$

בנקודה x_1' יש ל $\frac{T_n(x)}{2^{n-1}}$ נקודת מינימום. לכן $p_n(x_1')\ge\frac{T_n(x_1')}{2^{n-1}}$

נמשיך כך עד הנקודה x_n'.

יש לנו בדרך n חילופי סימן ו $n+1$ נקודות קיצון.

נסתכל על פולינום ההפרש: $S_n(x) = p_n(x) - \frac{T_n(x)}{2^{n-1}}$ בכל נקודת החלפת סימן, הערך של פולינום ההפרש הוא 0.
כלומר ל $S_n(x)$ יש n אפסים בתחום $[-1,1]$.

זה לא יתכן כי זהו פולינום מדרגה $n-1$, כי המקדם של x^n גם ב $p_n(x)$ וגם ב $\frac{T_n(x)}{2^{n-1}}$ הוא 1.
לכן לא יתכן שקיים פולינום טוב יותר מהפולינום של צ'בישב, המנורמל.

פולינומי צ'בישב הם היחידים מבחינת MINIMAX.
נניח בשלילה שיש פולינום אחר שמגיע בחלק מנקודות הקיצון לאותם ערכים שהפולינום של צ'בישב מגיע, ובשאר הנקודות הוא קרוב יותר לציר ה X. באופן דומה להוכחה הקודמת נקבל סתירה.

חיפשנו נקודות שעבורן $\left\|(x-x_0)(x-x_1)\cdot\ldots\cdot(x-x_m)\right\|_\infty$ הוא מינימאלי.
אם נסתכל על הקטע $x \in [-1,1]$ התשובה תהיה אוסף האפסים של פולינום צ'בישב מסדר $m+1$.

$$\left\|(x-x_0)(x-x_1)\cdot\ldots\cdot(x-x_m)\right\|_\infty = \left\|\frac{T_{m+1}(x)}{2^m}\right\|_\infty$$