<u>תזכורת</u>: רוצים לחשב: $I=\int_a^b f(x)w(x)dx$ כאשר נתונים $a,b,w(x)$.

רוצים לבצע קירוב דיסקרטי: $\tilde{I}=\sum_{i=0}^{m}A_i f(x_i)$.

ערכי המקדמים A_i -ים לא תלויים בפונקציה.

נקודות הדגימה $x_0,x_1,...,x_m$ ידועות לנו ושונות זו מזו ושייכות לקטע $[a,b]$.

העברנו פולינום אינטרפולציה שמקרב את $f(x)$ באמצעות נקודות הדגימה, ואז חישבנו אינטגרל עליו.

לשיטה זו יש דיוק פולינומי m לפחות - כלומר אם הפונקציה $f(x)$ היא פולינום מסדר m, אז הדיוק הוא מוחלט והשגיאה היא אפס.

השגיאה נתונה ע"י: $E=I-\tilde{I}$

$$E=\int_a^b \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!}(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_m)w(x)dx$$

(אם f היא פולינום מסדר m אז $f^{(m+1)}(\xi)\equiv 0$)

אם המכפלה $(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_m)$ לא מחליפה סימן, אז אפשר לפשט את הביטוי עוד יותר.

כיצד בוחרים את נקודות הדגימה, ה- x_i -ים?

אפשר לחלק את הקטע $[a,b]$ לחלקים שווים.

הבעיה היא שהנוסחאות, $Newton-codes$, סובלות מאי יציבות ואי התכנסות נומרית.
אם ניקח יותר ויותר נקודות דגימה, נצפה שהשגיאה תלך ותקטן. בנוסחאות האלו אי אפשר להוכיח את זה. לכן אין הבטחה של התכנסות.

בפועל במקום לחשב את $\tilde{I}=\sum_{i=0}^{m}A_i f(x_i)$, אנחנו נחשב $\bar{I}=\sum_{i=0}^{m}A_i\tilde{f}_i$. זאת מכיוון שאי אפשר לחשב בדיוק מוחלט את ערך הפונקציה $f(x)$ בנקודות הדגימה.

אם נסמן $\delta_i=\tilde{f}_i-f_i$ אז השגיאה הנומרית היא: $R_n=\sum A_i\delta_i$.

נקבל שכאשר מגדילים את מספר הנקודות, השגיאה עלולה לגדול - כלומר אין יציבות.

<u>בחירת נקודות הדגימה</u>

<u>שיטת גאוס</u> - המטרה היא להשיג דיוק פולינומי מקסימאלי.

$\int_a^b x^\alpha w(x)dx=\sum_{i=0}^{m}A_i(x_i)^\alpha+E$ מובטח לנו ש $E=0$ כאשר $\alpha\in\{0,1,2,...,m\}$.

הנעלמים בבעיה הזאת היא המקדמים $A_0,A_1,...,A_m$ ונקודות הדגימה $x_0,x_1,...,x_m$.

סה"כ יש לנו $2m+2$ נעלמים - $2m+2$ דרגות חופש.

לכן מצפים דיוק מקסימאלי $2m+1$.

אי אפשר פשוט להציב $E=0$, לנסות לבחור $\alpha=0,1,2,...$ ולנסות לפתור כי מערכת המשוואות המתקבלת מ $\int_a^b x^\alpha w(x)dx=\sum_{i=0}^{m}A_i(x_i)^\alpha$ היא לא ליניארית.

נגדיר מכפלה פנימית: $(f,g)=\int_a^b f(x)g(x)w(x)dx$

מכאן מקבלים פולינום אורתוגונאלי $\varphi_{m+1}(x)$ שיש לו שורשים $x_0,x_1,...,x_m$.

כל השורשים הם ממשיים, שונים זה מזה ונמצאים בקטע $[a,b]$.

תזכורת: אם מוגדרת המכפלה הפנימית $(f,g)=\int_a^b f(x)g(x)w(x)dx$

ומוגרים הפולינומים:

$$\varphi_0(x)=A_0$$

$$\varphi_1(x)=A_1x+a_{10}$$

$$\varphi_2(x)=A_2x^2+a_{21}x+a_{20}$$

וכן הלאה, כך שלכל i, $A_i\neq 0$. $\varphi_m(x)=A_mx^m+...$

הפולינומים אורתוגונאליים: $(\varphi_i,\varphi_j)=0$ עבור $i\neq j$. $(\varphi_i,\varphi_i)>0$.

לכל פולינום מסדר l כלשהו, אפשר לייצג אותו באמצעות פולינומים אלו: $p_l(x)\sum_{i=0}^{l}c_i\varphi_i(x)$.

לכן הפולינומים מהמשפחה אורתוגונאליים לכל הפולינומים מסדר נמוך מהסדר שלהם.

כלומר $(\varphi_i,x^\alpha)=0$ עבור $\alpha\in\{0,1,...,i-1\}$.

<u>משפט:</u>

אם $x_0,x_1,...,x_m$ הם האפסים של $\varphi_{m+1}(x)$ השייך למשפחה אורתוגונאלית ביחס למכפלה פנימית $(F,G)=\int_a^b F(x)G(x)w(x)dx$ ואם $f(x)$ גזירה $2m+2$ פעמים ב (a,b) אז

$E=\frac{1}{(2m+2)!}\int_a^b f^{(2m+2)}(\xi)\left[(x-x_0)(x-x_1)\cdot...\cdot(x-x_m)\right]^2 w(x)dx$ עבור $\xi\in(a,b)$.

<u>למה</u>: $E=0$ עבור כל פולינום $f(x)=p_{2m+1}(x)$. זאת מכיוון שהנגזרת ה $2m+2$ שלה היא זהותית אפס.

<u>הוכחה:</u>

1. $\int_a^b p_m(x)w(x)dx=\sum_{i=0}^{m}A_ip_m(x_i)$ - דבר זה ידוע לכל בחירה של נקודות דגימה.

אם משתמשים ב m נקודות כלשהו, עבור פולינום מסדר m, אז אין שגיאה בכלל.

2. $\varphi_{m+1}(x)=K\underbrace{(x-x_0)(x-x_1)\cdot...\cdot(x-x_m)}_{\Phi(x)}$ עבור $K\neq 0$.

נרשום את פולינום האינטרפולציה של הרמיט:

$$f(x)=p_{2m+1}^H(x)+r^H(x)$$

ראינו שהשגיאה בפולינום הרמיט היא: $r^H(x)=\frac{f^{(2m+2)}(\xi)}{(2m+2)!}\Phi^2(x)$ עבור $\xi\in(a,b)$, $x\in[a,b]$.

אפשר לבטא את הפולינום בצורה הבא: $p_{2m+1}^H=\varphi_{m+1}(x)\cdot Q_m(x)+P_m(x)$

כאשר $P_m(x)$ יקרא "שארית" ו $Q_m(x)$ יקרא "מנה".

נבצע אינטגרציה: $\int_a^b f(x)w(x)dx = \int_a^b p_{2m+1}^H w(x)dx + \underbrace{\int_a^b r^H(x)w(x)dx}_{E}$

$$\int_a^b p_{2m+1}^H w(x)dx = \int_a^b \varphi_{m+1}(x)\cdot Q_m(x)w(x)dx + \int_a^b P_m(x)w(x)dx$$

מה הרווחנו כאן? הערך של האינטגרל $\int_a^b \varphi_{m+1}(x)\cdot Q_m(x)w(x)dx$ הוא בדיוק אפס, כי מדובר במכפלה פנימית של שתי פונקציות אורתוגונאליות.

ואנחנו הרי יודעים ש $\int_a^b P_m(x)w(x)dx = \sum_{i=0}^m A_i \cdot P_m(x_i)$.

$P_m(x_i) = f(x_i)$ עבור $i \in \{0,1,...,m\}$

$$P_m(x) = p_{2m+1}^H - \varphi_{m+1}(x)\cdot Q_m(x)$$

כאשר מציבים את נקודות הדגימה, מקבלים ש $\varphi_{m+1}(x_i) = 0$.

מסקנה: $\sum_{i=0}^m A_i P_m(x_i) = \sum_{i=0}^m A_i f_i$

השגיאה היא:

$$E = \frac{1}{(2m+2)!}\int_a^b f^{(2m+2)}(\xi)\left[(x-x_0)(x-x_1)\cdot...\cdot(x-x_m)\right]^2 w(x)dx$$

ניתן לראות ש $\Phi^2(x) = \left[(x-x_0)(x-x_1)\cdot...\cdot(x-x_m)\right]^2$ שומר על סימן.

לכן השגיאה היא: $E = \frac{f^{(2m+2)}(\xi)}{(2m+2)!}\int_a^b \Phi^2(x)w(x)dx$ עבור $\xi \in (a,b)$.

זוהי שגיאה מאוד קטנה, אפילו כאשר יש מעט מאוד נקודות דגימה.

<u>משפט:</u>

עבור $(a<b)$, כל המקדמים A_i בנוסחאות גאוס, הם חיוביים.

<u>הוכחה:</u>

נסתכל על הפונקציה $f(x) = \left[\delta_j(x)\right]^2$ עבור $\delta_j(x)$, פולינום לגראנג' יחידה.

פולינום זה מקיים ש $\delta_j(x_i) = 0$ עבור $j \neq i$ ומקיים $\delta_j(x_j) = 1$.

$$\int_a^b \left[\delta_j(x)\right]^2 w(x)dx = \sum_{i=0}^m \left[\delta_j(x_i)\right]^2 \cdot A_i = A_j$$

באגף שמאל יש משהו חיובי. לכן $A_j > 0$ וזה מתקיים לכל $j \in \{0,1,...,m\}$.

מכיוון שהמקדמים לא תלויים בפונקציה, הרי שהמקדמים חיוביים בכל מקרה, לכל פונקציה.

דוגמה:

רוצים לחשב נוסחת קירוב גאוס ולהעריך את השגיאה עבור $I=\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \tilde{I}=\sum_{i=0}^{1} A_i f(x_i)$.

$a=-1$, $b=1$, $w(x)\equiv 1$, $m=1$ (שתי נקודות דגימה).

שלב ראשון:

א. נמצא את $\varphi_{m+1}(x)=\varphi_2(x)$.

המכפלה הפנימית היא: $(F,G)=\int_{-1}^{1} F(x)G(x)dx$

צריך למצוא פולינום אורתוגונאלי $\varphi_2(x)$ ביחס למכפלה הפנימית הנ"ל.

מצאנו באחד מהשיעורים הקודמים שהפולינום המתאים הוא: $\varphi_2(x)=K\left(x^2-\frac{1}{3}\right)$.

ב. נמצא את נקודות הדגימה x_0, x_1

השורשים של הפולינום הזה הם $x_0=-\frac{1}{\sqrt{3}}$, $x_1=\frac{1}{\sqrt{3}}$ ואלו הן נקודות הדגימה.

שלב שני:

נמצא את המקדמים A_0, A_1

$\int_{-1}^{1} x^{\alpha}\cdot 1dx = A_0(x_0)^{\alpha}+A_1(x_1)^{\alpha}$ עבור $\alpha\in\{0,1\}$.

עבור $\alpha=0$ נקבל: $2=A_0\cdot 1+A_1\cdot 1$

עבור $\alpha=1$ נקבל: $0=A_0\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+A_1\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

נפתור את מערכת המשוואות ונקבל: $A_0=A_1=1$. (חיוביים כצפוי).

כלומר נוסחת גאוס היא: $\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx 1\cdot f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+1\cdot f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

שלב שלישי:

נעריך את השגיאה E.

$$E=\frac{f^{2m+2}(\xi)}{(2m+2)!}\cdot\int_{-1}^{1}\left[(x-x_0)(x-x_1)\right]^2\cdot 1dx=\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}\cdot\underbrace{\int_{-1}^{1}\left[\left(x+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(x-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right]^2 dx}_{c}$$

עבור $\xi\in(-1,1)$.

סה"כ: $E=\frac{1}{135}f^{(4)}(\xi)$

בשיטת הטרפז עם שתי נקודות היינו מקבלים שהשגיאה היא: $E=\frac{2}{3}f^{(2)}(\xi)$.

מי יותר טובה? זה תלוי באיזו פונקציה מדובר.

דרך אחרת לחשב את השגיאה:

נבדוק עבור הפולינום: $f(x)=x^{2m+2}=x^4$.

$$\int_{-1}^{1}x^4dx=\sum A_i(x_i)^4+\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}\cdot c$$

עבור הפונקציה הזאת נקבל: $f^{(4)}(x)\equiv 4!$

לכן: $\int_{-1}^{1}x^4dx=\sum A_i(x_i)^4+\frac{\cancel{4!}}{\cancel{4!}}\cdot c$.

כלומר: $c=\int_{-1}^{1}x^4dx-\left[1\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^4+1\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^4\right]=\frac{8}{45}$.

מסקנה: במקום לחשב אינטגרל מסובך על פולינום ממעלה גבוהה, חישבנו אינטגרל על פולינום פשוט בהרבה על מנת להעריך את השגיאה.

ניתן להראות שלא קיימת דרך להגיע לדיוק מסדר פולינומי גבוה יותר מסדר הדיוק הפולינומי שמגיעים באמצעות שיטת גאוס.

פיתחנו נוסחת קירוב: $I=\int_a^b f(x)w(x)dx\approx\hat{I}=\sum_{i=0}^{m}A_i f_i$

נניח שחישבנו את המקדמים A_i בדיוק גבוה.

כעת מחשבים עבור פונקציה f שיש בה שגיאה. כלומר מחשבים: $\tilde{\hat{I}}=\sum_{i=0}^{m}A_i\tilde{f}_i$.

נגדיר: $\tilde{f}_i-f_i=\delta_i$. נניח גם שיש חסם על השגיאה בחישוב f : $|\delta_i|\le\delta$.

סה"כ נקבל: $\tilde{\hat{I}}=\sum_{i=0}^{m}A_i\tilde{f}_i=\sum_{i=0}^{m}A_i f_i+\sum_{i=0}^{m}A_i\delta_i$

לאיבר $\sum_{i=0}^{m}A_i\delta_i$ נקרא איבר השגיאה הנומרית, R_N .

נוכל לחסום את השגיאה הנומרית ע"י: $|R_N|\le\sum_{i=0}^{m}|A_i||\delta_i|\le\delta\sum_{i=0}^{m}|A_i|$

עבור שיטת גאוס, המקדמים חיוביים ולכן: $|R_N|\le\delta\sum_{i=0}^{m}A_i=\delta\int_a^b w(x)dx$.

כל קירוב אינטרפולטורי עם $f(x)=1$ נותן: $\int_a^b w(x)dx=\sum_{i=0}^{m}A_i$

כלומר השגיאה הנומרית חסומה על ידי אותו קבוע. לכן הנוסחה יציבה. לא חשוב כמה שגיאות צוברים כתוצאה מחיבורים של הרבה מספרים המתאימים להרבה נקודות דגימה.

דוגמה: $\int_a^b w(x)dx=1$, $I=\int_a^b f(x)w(x)dx\approx A_0f_0+A_1f_1$.

אם ניקח מקדמים לא של גאוס, אנחנו יודעים ש $A_0+A_1=1$.

נניח למשל $A_0=-1000$ ו $A_1=1001$.

השגיאה הנומרית חסומה על ידי: $|R_N|\le\delta\sum_{i=0}^{1}|A_i|=2001\cdot\delta$

נניח שרוצים לחשב $I_1=\int_a^b F(t)\,dt$, לאחר שפיתחנו נוסחת גאוס בקטע: $(-1,1)$, כלומר יש לנו כבר נקודות דגימה, מקדמים והערכה לשגיאה, עבור הקטע $(-1,1)$.

נגדיר: $t=\frac{1}{2}(b-a)x+\frac{1}{2}(b+a)$.

במקרה זה נקבל: $-1\le x\le 1$.

יש לשים לב לפונקציה המשקל, $w(x)$.

באמצעות ההעתקה הזאת נקבל פונקציה חדשה: $F(t)\to f(x)$

נבצע גזירה סתומה של $t=\frac{1}{2}(b-a)x+\frac{1}{2}(b+a)$ ונקבל: $dt=\frac{1}{2}(b-a)\,dx$

אם ידוע: $I=\int_{-1}^{1} f(x)\,dx=\hat{I}+E$

אז: $I_1=\frac{1}{2}(b-a)\left[\hat{I}+E\right]$

את $\hat{I}$ אנחנו יודעים לחשב, ולשגיאה E יש לנו הערכה.

<u>דוגמה:</u>

מעוניינים לחשב: $I_1=\int_{-0.25}^{0.25} e^t\,dt$.

נחשב זאת באמצעות שתי הנקודות שחישבנו בדוגמה הקודמת.

$a=-0.25$, $b=0.25$, $b-a=0$, $\frac{b-a}{2}=\frac{1}{4}$, $t=\frac{1}{4}x$, $-1\le x\le 1$.

$I=\int_{-1}^{1} e^{\frac{1}{4}x}\,dx$, $f(x)=e^{\frac{1}{4}x}$.

$I_1=\frac{1}{4}\left[\hat{I}+E\right]$ כאשר $\hat{I}$ הוא הקירוב של I.

$$I=\int_{-1}^{1} e^{\frac{1}{4}x}\,dx\approx\hat{I}=1\cdot e^{\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}+1\cdot e^{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}=2.02...$$

מהי השגיאה E? $E=\frac{1}{135}\cdot f^{(4)}(\xi)=\frac{1}{135}\left(\frac{1}{4}\right)^4 e^{\frac{1}{4}(\xi)}$ עבור $\xi\in(-1,1)$.

$$E\in\left(2\cdot 10^{-5},4\cdot 10^{-5}\right)$$

$$\frac{1}{4}\hat{I}=0.505217$$

$I_1=0.50217+\frac{1}{4}E$.

$E_{\max}=4\cdot 10^{-5}$, $E_{\min}=2\cdot 10^{-5}$.

סה"כ: $\hat{I}_1\in\left(\underbrace{0.505222}_{\frac{1}{4}\hat{I}+\frac{1}{4}E_{\min}},\underbrace{0.0505227}_{\frac{1}{4}\hat{I}+\frac{1}{4}E_{\max}}\right)$