הגדרה: יהי G דקדוק חסר הקשר. G נקרא **דקדוק רב משמעי** אם קיימת מילה $w \in L(G)$ כך שלמילה w יש שני עצי גזירה שונים (או שתי גזירות ימניות ביותר שונות או שתי גזירות שמאליות ביותר שונות).

תהי L שפה חסרת הקשר. L תקרא **שפה רב משמעית טבועה** אם כל דקדוק חסר הקשר G כך ש $L = L(G)$ הוא דקדוק רב משמעי.

משפט: השפה $L = \{a^i b^i c^j \mid i, j \geq 1\} \cup \{a^i b^j c^j \mid i, j \geq 1\}$ היא שפה רב משמעית טבועה.

הופיע במועד א', סמסטר אביב, התשס"ה - 2005.

הוכחה: ברור ש L היא שפה חסרת הקשר, כאיחוד של שפות חסרות הקשר.

נראה שכל דקדוק חסר הקשר G כך ש $L = L(G)$ הוא דקדוק רב משמעי.

יהי G דקדוק חסר הקשר כך ש $L = L(G)$.

נראה כי G הוא דקדוק רב משמעי.

יהי k הקבוע המובטח מלמת הניפוח של *Ogden*. (אם הקבוע קטן מ 3 אז נבחר $k = 3$).

נתבונן במילה מ L: $z = a^k b^k c^{k+k!}$.

נסמן את k המקומות הראשונים ב z (את המקומות של ה a-ים).

נכתוב את z בצורה $z = uvwxy$ כך שהתנאים של הלמה מתקיימים.

על פי הלמה, w מכילה מקום מסומן ולכן המילה נראית כך:

???	???	???a???	???	???
u	v	w	x	Y

מכיוון שלפני כל a יכולים להיות רק a-ים נוספים, נקבל ש $uv \in \{a\}^*$.

aa...a	aa...a	a???	???	???
u	v	w	x	y

אם x מכיל שני סימנים שונים (a ו b או b ו c), אזי בגלל הסדר של הסימנים בהגדרה של L, נקבל ש $uv^2wx^2y \notin L$ בסתירה ללמה. זאת מכיוון שהמילה הזאת תכיל את הקטע $ab...ab$ או $bc...bc$.

לכן $x \in \{a\}^*$ או $x \in \{b\}^*$ או $x \in \{c\}^*$.

נסמן: $|v| = p$, $|x| = q$

אם $x \in \{a\}^*$ אז $uv^2wx^2y = a^{k+p+q} b^k c^{k+k!} \notin L$, לכן זה לא יכול להיות.

אם $x \in \{c\}^*$ אז $uv^2wx^2y = a^{k+p} b^k c^{k+k!+q} \notin L$, לכן זה לא יכול להיות.

לכן $x \in \{b\}^*$.

נסתכל על המילה $z' = uv^2wx^2y \in L$. מכיוון ש $x \in \{b\}^*$ ומכיוון ש $v \in \{a\}^*$, נקבל ש $uv^2wx^2y = a^{k+p} b^{k+q} c^{k+k!} \in L$.

זאת אומרת ש $k + p = k + q$ $(\#_a(z') = \#_b(z'))$ או ש $k + q = k + k!$ $(\#_b(z') = \#_c(z'))$

מכיוון ש $q<k<k!$ ($k<k!$ עבור כל $k\ge 3$) זה אומר שבהכרח $k+p=k+q$ ולא $k+q=k+k!$. לכן $|x|=|v|=p$.

נגדיר: $m=\frac{k!}{p}$ (זהו מספר שלם כי p הוא מספר טבעי קטן או שווה ל k).

אזי: $uv^{m+1}wx^{m+1}y=uv^{\frac{k!}{p}+1}wx^{\frac{k!}{p}+1}y=a^{k+k!}b^{k+k!}c^{k+k!}$

לכן על פי הלמה זה אומר שניתן לגזור:

$$S\Rightarrow^{+}uAy\Rightarrow^{+}uv^{i}Ax^{i}y\Rightarrow^{+}uv^{m+1}wx^{m+1}y=a^{k!+k}b^{k!+k}c^{k!+k}$$

זאת אומרת ש A גוזר a-ים משמאלו ו b-ים מימינו (כי y מכיל כבר את כל ה c-ים שבמילה $a^{k!+k}b^{k!+k}c^{k!+k}$).

באופן דומה, אם נתחיל מהמילה $a^{k!}b^{k}c^{k}$ נקבל:

$$S\Rightarrow^{+}u'By'\Rightarrow^{+}u'v'^{i}Bx'^{i}y'\Rightarrow^{+}u'v'^{m}w'x'^{m}y'=a^{k+k!}b^{k+k!}c^{k+k!}$$

כאשר $x'\in\{c\}^{*}$ ו $v'\in\{b\}^{*}$

זאת אומרת ש B גוזר b-ים משמאלו ו c-ים מימינו (כי u' מכיל כבר את כל ה a-ים שבמילה $a^{k!+k}b^{k!+k}c^{k!+k}$)

נוכיח שלשתי הגזירות הנ"ל יש עצי גזירה שונים.
A "גוזר" a-ים ו b-ים ו B "גוזר" b-ים ו c-ים.
לכן A ו B לא מופיעים באותו המסלול - אחרת נקבל c לפני b במילה של L.

לכן, אם G הוא דקדוק חד משמעי, קיימת תבנית פסוקית $S\Rightarrow^{*}t_1At_2Bt_3$ (ולא קיימות תבניות פסוקיות $A\Rightarrow^{*}t_1Bt_2$ או $B\Rightarrow^{*}t_2At_3$) כך ש $t_1\in\{a\}^{*}$, $t_2\in\{b\}^{*}$ ו $t_3\in\{c\}^{*}$.

נתבונן במילה: $z_{i,j}=t_1v^{i}wx^{i}t_2(v')^{j}w'(x')^{j}t_3\in L$ למה היא שייכת ל L?

כי ניתן לגזור $S\Rightarrow^{*}t_1At_2Bt_3$ וניתן לגזור $A\Rightarrow^{*}v^{i}wx^{i}$ ו $B\Rightarrow^{*}(v')^{i}w'(x')^{i}$

$\#_a(z_{i,j})\le|t_1|+i|v|+|w|$ (יכול להיות פחות כי w יכול להכיל גם b-ים)

$\#_b(z_{i,j})\ge i|x|+|t_2|+j|v'|$ (יכול להיות יותר כי w' יכול להכיל גם b-ים. נשים לב ש $i|x|=i|v|$)

$\#_c(i,j)\le|w'|+j|x'|+|t_3|$ (שוב w' יכול להכיל גם b-ים. נשים לב ש $j|v'|=j|x'|$)

עבור i,j מספיק גדולים, נקבל $\#_b(z_{i,j})>\#_a(z_{i,j})$ וגם $\#_b(z_{i,j})>\#_c(z_{i,j})$ בסתירה לכך שהמילה הזאת שייכת ל L.

(מספיק $j\ge\frac{|t_1|+|w|-|t_2|}{|w^2|}$ ו $i\ge\frac{|t_3|+|w|-|t_2|}{|v|}$)

<u>צורה נורמאלית של גריבך</u>

הגדרה: גזירה מין הצורה $A \to \alpha$ תקרא "A-גזירה"

<u>למה 1</u>: יהי $G=(V,T,P,S)$ דקדוק חסר הקשר ויהי $A \to \alpha B \beta \in P$ כלל גזירה ב G.
יהיו $B \to \delta_1 \mid \delta_2 \mid ... \mid \delta_n$ כל ה B-גזירות של P.
יהי $G_1=(V,T,P_1,S)$ דקדוק כך הזהה לדקדוק G פרט להבדל בכללי הגזירה:
$P_1=(P-\{A \to \alpha B \beta\}) \cup \{A \to \alpha \delta_i \beta \mid 1 \le i \le n\}$.
אזי: $L(G_1)=L(G)$.

(כלומר, אם במקום לגזור מ A את $\alpha B \beta$ גוזרים ישר את α ואחריו אחד מהדברים ש B גוזר ואחריו β, אז השפה של הדקדוק לא משתנה).

<u>למה 2:</u> יהי $G=(V,T,P,S)$ דקדוק חסר הקשר ותהינה $A \to A\alpha_1 \mid A\alpha_2 \mid ... \mid A\alpha_n$ כל ה A-גזירות של G מין הצורה $A \to A\alpha$, ותהיינה $A \to \beta_1 \mid \beta_2 \mid ... \mid \beta_m$ כל ה A-גזירות האחרות של G.
יהי $G_1=(V \cup \{B\},T,P_1,S)$ דקדוק חסר הקשר, כאשר B הוא משתנה חדש ו P_1 מתקבל מ P על ידי החלפה של כל הA-גזירות של P בגזירות:
$A \to \beta_i$, $A \to \beta_i B$, $B \to \alpha_i$, $B \to \alpha_i B$
אזי: $L(G_1)=L(G)$

הוכחה: כל גזירה שמאלית ביותר מ A חייבת להסתיים ב $A \to \beta_i$.
נחליף את הגזירה:
$$A \Rightarrow A\alpha_{i1} \Rightarrow A\alpha_{i2}\alpha_{i1} \Rightarrow ... \Rightarrow A\alpha_{i(p)}\alpha_{i(p-1)}...\alpha_{i1} \Rightarrow \beta_j\alpha_{i(p)}\alpha_{i(p-1)}...\alpha_{i1}$$
בגזירה:
$$A \Rightarrow \beta_j B \Rightarrow \beta_j\alpha_{i(p)}B \Rightarrow \beta_j\alpha_{i(p)}\alpha_{i(p-1)}B \Rightarrow ... \Rightarrow \beta_j\alpha_{i(p)}\alpha_{i(p-1)}...\alpha_{i2}B \Rightarrow \beta_j\alpha_{i(p)}\alpha_{i(p-1)}...\alpha_{i1}$$
ולהיפך.

(במעבר מהדקדוק G לדקדוק G_1 ביטלנו את הרקורסיה השמאלית, כפי שלמדנו בקורס קומפילציה).

<u>משפט:</u> תהי L שפה חסרת הקשר כך ש $\varepsilon \notin L$. אזי L נוצרת על ידי דקדוק $G=(V,T,P,S)$ שכל כללי הגזירה שלו הם מין הצורה $A \to a\alpha$ כך ש $a \in T$ ו $\alpha \in V^*$.

הוכחה: L שפה חסרת הקשר ולכן קיים לה דקדוק חסר הקשר $G=(V,T,P,S)$ כך ש $L=L(G)$ ו G הוא בצורה הנורמאלית של חומסקי.
(כלומר כללי הגזירה הם מהצורות: $A \to BC$ או $A \to a$ כך ש $B,C \in V$ ו $a \in T$)
(ראינו בקורס אוטומטים ושפות פורמאליות הוכחה לכך שלכל שפה חסרת הקשר קיים דקדוק כזה)
יהי $V=\{A_1,A_2,...,A_n\}$ - אוסף המשתנים של G.
על ידי הוספת משתנים חדשים ושינוי גזירות, נגיע לדקדוק שקול שכל גזירותיו הן מהצורה $A_i \Rightarrow A_j\gamma$ ומקיימות $i<j$.
נעשה זאת באינדוקציה על האינדקס k של A_k.
נניח כי עבור כל i קטן מ k שינינו את כל הגזירות כך שאם קיים כלל הגזירה $A_i \Rightarrow A_j\gamma$ אז $i<j$.

אם $A_k \to A_j\gamma$ היא גזירה שמקיימת $j<k$, אז נחליף את A_i באגף הימני של כל A_j גזירות ובכך נקטין את ההפרש $k-j$.
את כל הגזירות הן מין הצורה $A_j \to A_j\gamma$ נחליף על פי הלמה השניה ע"י הכנסת משתנה חדש B_j.

מכיוון שיצאנו מדקדוק מהצורה הנורמאלית של חומסקי, בסוף נקבל גזירות מהצורה:
$A_i \to A_j\gamma$ כאשר $i<j$ ו $\gamma \in V^+$.
$A_i \to a\gamma$ כאשר $\gamma \in V^+$ ו $a \in T$.
$B_i \to \left(V^* \cup T\right)\left\{B_1,...,B_{i-1}\right\}^+$

נבצע עוד פעם הצבה על פי הלמה הראשונה, ונקבל דקדוק בצורה הנורמאלית של גריבך.

<u>דוגמה</u>:
$S=A_1$, $A_1 \to A_2A_3$, $A_2 \to A_3A_1 \mid b$, $A_3 \to A_1A_2 \mid a$
המטרה: להמיר את הדקדוק לדקדוק שכל הגזירות שלו הן מהצורה: $A \to a\alpha$ כך ש $a \in T$ ו $\alpha \in V^*$.
כרגע הבעיה היא בגזירות $A_1 \to A_2A_3$, $A_2 \to A_3A_1$, $A_3 \to A_1A_2$ כי האות הראשונה באגף הימני היא לא טרמינל.

נדאג לכך שלא יהיו גזירות $A_i \to A_j\gamma$ כך ש $j \le i$. זאת אומרת שצריך לטפל בגזירה $A_3 \to A_1A_2$.
באמצעות **למה 1**, נחליף אותה לגזירה $A_3 \to A_2A_3A_2$ ונקבל שהגזירות שלנו כעת הן:
$A_1 \to A_2A_3$, $A_2 \to A_3A_1 \mid b$, $A_3 \to A_2A_3A_2 \mid a$
נבצע זאת שוב, הפעם הגזירה הבעייתית היא $A_3 \to A_2A_3A_2$, מאותה סיבה. נחליף אותה בעזרת **למה 1** לגזירות $A_3 \to A_3A_1A_3A_2 \mid bA_3A_2$ ונקבל שהגזירות שלנו כעת הן:
$A_1 \to A_2A_3$, $A_2 \to A_3A_1 \mid b$, $A_3 \to A_3A_1A_3A_2 \mid bA_3A_2 \mid a$
כעת קיבלנו רקורסיה שמאלית בגזירה $A_3 \to A_3A_1A_3A_2$. באמצעות **למה 2** נחליף את ה A_3-גזירות בגזירות: $A_3 \to bA_3A_2 \mid a \mid bA_3A_2B_3 \mid aB_3$ ו $B_3 \to A_1A_3A_2 \mid A_1A_3A_2B_3$.
הגזירות שנשארו להן כרגע הן:
$A_1 \to A_2A_3$, $A_2 \to A_3A_1 \mid b$, $A_3 \to bA_3A_2 \mid a \mid bA_3A_2B_3 \mid aB_3$, $B_3 \to A_1A_3A_2 \mid A_1A_3A_2B_3$

כלומר, הגזירות שלנו הן מהצורות
$A_i \to A_j\gamma$ כאשר $i<j$ ו $\gamma \in V^+$.
$A_i \to a\gamma$ כאשר $\gamma \in V^+$ ו $a \in T$.
$B_i \to \left(V^* \cup T\right)\left\{B_1,...,B_{i-1}\right\}^+$

נמשיך לבצע הצבות בעזרת **למה 1** - נבטל את ה A_2 בגזירה $A_1 \to A_2A_3$
ונבטל את ה A_1 בגזירות $B_3 \to A_1A_3A_2 \mid A_1A_3A_2B_3$
נקבל: $A_1 \to A_3A_1A_3 \mid bA_3$, $A_2 \to A_3A_1 \mid b$,
$A_3 \to bA_3A_2 \mid a \mid bA_3A_2B_3 \mid aB_3$, $B_3 \to A_2A_3A_3A_2 \mid A_2A_3A_3A_2B_3$

כעת נבטל בעזרת **למה 1** את ה A_3 הראשון בגזירה $A_1 \to A_3A_1A_3$ ואת ה A_3 בגזירה $A_2 \to A_3A_1 \mid b$
ואת ה A_2 הראשון בגזירות $B_3 \to A_2A_3A_3A_2 \mid A_2A_3A_3A_2B_3$.

נקבל: $A_1 \to bA_3A_2A_1A_3 \mid aA_1A_3 \mid bA_3A_2B_3A_1A_3 \mid aB_3A_1A_3 \mid bA_3$

$A_2 \to bA_3A_2A_1 \mid aA_1 \mid bA_3A_2B_3A_1 \mid aB_3A_1 \mid b$

(במקור במקום $A_2 \to aB_3A_1$ היה רשום $A_2 \to aB_3A_3A_1$ אולם נראה לי שזו טעות - לבדוק!!!)

$A_3 \to bA_3A_2 \mid a \mid bA_3A_2B_3 \mid aB_3$

$B_3 \to A_3A_1A_3A_3A_2 \mid bA_3A_3A_2 \mid A_3A_1A_3A_3A_2B_3 \mid bA_3A_3A_2B_3$

(במקור במקום $B_3 \to A_3A_1A_3A_3A_2B_3$ היה רשום $B_3 \to A_3A_1A_3A_3A_2$ אולם נראה לי שזו טעות)

כעת נבטל בעזרת **למה 1** את ה A_3 הראשון בגזירות $B_3 \to A_3A_1A_3A_3A_2 \mid A_3A_1A_3A_3A_2B_3$

נקבל: $A_1 \to bA_3A_2A_1A_3 \mid aA_1A_3 \mid bA_3A_2B_3A_1A_3 \mid aB_3A_1A_3 \mid bA_3$

$A_2 \to bA_3A_2A_1 \mid aA_1 \mid bA_3A_2B_3A_1 \mid aB_3A_1 \mid b$

$A_3 \to bA_3A_2 \mid a \mid bA_3A_2B_3 \mid aB_3$

$$B_3 \to bA_3A_2A_1A_3A_3A_2 \mid aA_1A_3A_3A_2 \mid bA_3A_2B_3A_1A_3A_3A_2 \mid aB_3A_1A_3A_3A_2 \mid bA_3A_3A_2 \mid$$
$$bA_3A_2A_1A_3A_3A_2B_3 \mid aA_1A_3A_3A_2B_3 \mid bA_3A_2B_3A_1A_3A_3A_2B_3 \mid aB_3A_1A_3A_3A_2B_3 \mid bA_3A_3A_2B_3$$

קיבלנו דקדוק שכל כללי הגזירה שלו הם מין הצורה $A \to a\alpha$ כך ש $a \in T$ ו $\alpha \in V^*$.
דקדוק כזה נקרא **דקדוק מהצורה הנורמאלית של גריבך**!

<u>אוטומטים עם מחסניות</u>

הגדרה: אוטומט עם מחסנית M הוא מערכת $M=\left(Q,\Sigma,\Gamma,\delta,q_0,z_0,F\right)$ כאשר:

1. Q היא קבוצה סופית של מצבים.
2. Σ היא האלפבית של הקלט.
3. Γ היא האלפבית של המחסנית.
4. $q_0\in Q$ הוא המצב ההתחלתי.
5. $z_0\in\Gamma$ הוא הסימן ההתחלתי של המחסנית.
6. $F\subseteq Q$ הוא קבוצה של המצבים המקבלים.
7. δ יחס מעבר: $\delta\subseteq\underbrace{Q\times\left(\Sigma\cup\{\varepsilon\}\right)\times\Gamma}_{*}\times\underbrace{Q\times\Gamma^*}_{**}$

* - ההחלטה לאן לעבר נעשית על פי המצב הנוכחי, הסימן של הקלט, והסימן העליון של המחסנית.
** - המצב החדש ו"התוספת" למחסנית.

אפשר לומר ש δ היא פונקציה: $\delta:Q\times\left(\Sigma\cup\{\varepsilon\}\right)\times\Gamma\to 2^{\left(Q\times\Gamma^*\right)}$ המקבלת כקלט את המצב הנוכחי, הסימן של הקלט והסימן העליון של המחסנית, ומוציאה אוסף של זוגות - מצב חדש אפשרי ותוספת אפשרית למחסנית המתאימה לו.

תצורה (קונפיגורציה) של M היא השלישייה (q,w,γ) כאשר $q\in Q$ הוא המצב הנוכחי, $w\in\Sigma^*$ הוא שארית הקלט ו $\gamma\in\Gamma^*$ הוא התכולה של המחסנית מלמעלה למטה.

נכתוב $(q,aw,Z\alpha)\vdash_M(p,w,\beta\alpha)$ אם ורק אם $((q,a,Z),(\mathrm{p},\beta))\in\delta$
כאשר $a\in\Sigma\cup\{\varepsilon\}$, $q,p\in Q$, $w\in\Sigma^*$, $Z\in\Gamma$, $\alpha,\beta\in\Gamma^*$

נגדיר את באופן הרגיל:
$\vdash^i$ - מעבר באמצעות i הפעלות של הפונקציה δ
$\vdash^+$ - מעבר באמצעות מספר חיובי כלשהו של הפעלות של הפונקציה δ
$\vdash^*$ - מעבר באמצעות מספר חיובי כלשהו או אפס הפעלות של הפונקציה δ

נגדיר: $L(M)=\left\{w\mid(q_0,w,z_0)\vdash^*(p,\varepsilon,\gamma)\wedge p\in F\right\}$
כלומר, השפה של M היא אוסף כל המילים שניתן להגיע מהם לתצורה שבה המצב מקבל ולא נשארה אף שארית מהמילה. זוהי קבלה ע"י מצב סופי.
$N(M)=\left\{w\mid(q_0,w,z_0)\vdash^*(p,\varepsilon,\varepsilon)\right\}$
כלומר, אוסף המילים שניתן להגיע מהן לתצורה שבה המילה הסתיימה והמחסנית התרוקנה.

משפט: L היא שפה חסרת הקשר אם ורק אם קיים לה אוטומט מחסנית M המקבל באמצעות מצבים מקבלים כך ש $L=L(M)$.
משפט: L היא שפה חסרת הקשר אם ורק אם קיים לה אוטומט מחסנית M המקבל באמצעות ריקון המחסנית כך ש $L=N(M)$.
(ההוכחה לשני המשפטים בקורס אוטומטים ושפות פורמאליות)

משפט: שפות חסרות הקשר סגורות תחת חיתוך עם שפות פורמאליות. כלומר, אם L_1 שפה חסרת הקשר ו L_2 שפה רגולארית אז $L_1\cap L_2$ היא שפה חסרת הקשר.

הוכחה: L_1 שפה חסרת הקשר ולכן קיים לה אוטומט מחסנית $M=(Q_M,\Sigma,\Gamma,\delta_M,q_0,z_0,F_M)$ כך ש $L_1=L(M)$.

L_2 שפה רגולארית ולכן קיים לה אוטומט סופי $A=(Q_A,\Sigma,\delta_A,p_0,F_A)$ כך ש $L_2=L(A_2)$.

מספיק להוכיח שלשפה $L=L_1\cap L_2$ יש אוטומט מחסנית M' כך ש $L=L(M')$.

נבנה אוטומט $M'=(Q_A\times Q_M,\Sigma,\Gamma,\delta,[q_0,p_0],z_0,F_A\times F_M)$

כאשר $(([p,q],a,Z)([p',q'],\gamma))\in\delta$ אם ורק אם מתקיים שני הדברים הבאים:

1. $(p,a,p')\in\delta_A$
2. $((q,a,Z)(q',\gamma))\in\delta_M$

($a\in\Sigma\cup\{\varepsilon\}$ ו A הוא אוטומט עם מסעי ε)

כלומר, בנינו "אוטומט מכפלה" של שני האוטומטים.
ניתן להוכיח באינדוקציה על ספר התנועות כי $L(M')=L(M)\cap L(A)$.

משפט: תהי $L\subseteq\Delta^*$ שפה חסרת הקשר. אם ההעתקה $h:\Sigma^*\to\Delta^*$ היא הומומורפיזם, אזי השפה $h^{-1}(L)=\{w\in\Sigma^*\mid h(w)\in L\}$ היא שפה חסרת הקשר.

אוטומט מחסנית דטרמיניסטי

הגדרה: אוטומט מחסנית דטרמיניסטית הוא מערכת $M=(Q,\Sigma,\Gamma,\delta,q_0,z_0,F)$
כאשר כל הרכיבים של M חוץ מ δ הם כמו באוטומט מחסנית רגיל (לא דטרמיניסטי) ו δ הוא העתקה חד ערכית: $\delta:Q\times(\Sigma\cup\{\varepsilon\})\times\Gamma\to Q\times\Gamma^*$.
בנוסף על M לקיים את התנאי הבא:
אם $\delta(q,\varepsilon,Z)$ מוגדר, אזי לכל $a\in\Sigma$ $\delta(q,a,Z)$ לא מוגדר.
אוטומטים דטרמיניסטים מקבלים על ידי מצב סופי.

למה: יהי $M=(Q,\Sigma,\Gamma,\delta,q_0,z_0,F)$ אוטומט מחסנית דטרמיניסטי. אזי ניתן לבנות אוטומט מחסנית דטרמיניסטי שקול" $M'=(Q',\Sigma,\Gamma',\delta',q_0',z_0',F')$ שתמיד עושה את "**התנועה הבאה**" (אם שארית הקלט איננה ריקה). כלומר:

1. לכל $q\in Q'$ ו $Z\in\Gamma'$ או שמוגדר $\delta(q,\varepsilon,Z)$ או שלכל $a\in\Sigma$ מוגדר $\delta(q,a,Z)$.
(כלומר, לכל זוג - מצב ואות במחסנית, אם אין מסע ε אז שאפשר להתקדם עם כל אות קלט)
2. אם $\delta(q,a,z_0')=(p,\gamma)$ אזי $\gamma\in\Gamma^*z_0'$, $a\in\Sigma\cup\{\varepsilon\}$, $q\in Q'$.
(לא מוחקים את תחתית המחסנית).

הוכחה:

נגדיר: $\Gamma'=\Gamma\cup\{z_0'\}$, $Q'=Q\cup\{q_0',q_e\}$, $F'=F$

$\delta'(q_0',\varepsilon,z_0')=(q_0,z_0z_0')$ - כלומר, הצעד הראשון של האוטומט הוא לדחוף את סימן תחתית המחסנית המקורית, ולעבור למצב ההתחלתי של האוטומט המקורי.

אם $\delta(q,\varepsilon,Z)$ אינו מוגדר וגם $\delta(q,a,Z)$ אינו מוגדר עבור $a\in\Sigma$ כלשהו, אזי
$\delta'(q,a,Z)=(q_e,Z)$ - כלומר, אם אי אפשר להמשיך מתצורה כלשהי באוטומט המקורי, אז נכנסים למצב בור דוחה.
אחרת, $\delta'(q,a,Z)=\delta(q,a,Z)$.
$\delta'(q,a,z_0')=(q_e,z_0')$ אם המחסנית המקורית התרוקנה נכנסים לבור.
$\delta'(q_e,a,Z)=(q_e,Z)$ מהבור לא יוצאים לעולם ולא מרוקנים את המחסנית.

הגדרה: תהי (q,w,α) תצורה של אוטומט מחסנית דטרמיניסטי.
q הוא המצב בו נמצא האוטומט.
w הוא שארית הקלט.
α הוא תוכן המחסנית.
(q,w,α) נקראת **תצורת לולאה** אם עבור כל $i>0$ קיימת תצורה (q_i,w,α_i) כך ש $|\alpha_i|\ge|\alpha|$
וגם $(q,w,a)\vdash(q_1,w,\alpha_1)\vdash\ldots\vdash(q_i,w,\alpha_i)$
כלומר, מהתצורה הזאת כל התקדמות מתבצעת באמצעות מסע ε ואורך המילה שבמחסנית לא קטן.

נשים לב ש $(q,w,A\delta)$ היא תצורת לולאה אם ורק אם (q,ε,A) היא תצורת לולאה. זאת מכיוון שבכל צעד לא מסתכלים על האות שבקלט, ולא מסתכלים על תוכן המחסנית, מלבד האות שבראשה.
$(w\in\Sigma^*\ ,q\in Q\ ,\delta\in\Gamma^*\ ,A\in\Gamma\ )$

בנוסף, קיימות תצורות שאינן תצורות לולאה, שגוזרות תצורת לולאה.