הגדרה: יהי $M=(Q,\Sigma,\Gamma,\delta,q_0,z_0,F)$ אוטומט מחסנית דטרמיניסטי. M יקרא **אוטומט ממשיך** אם לכל מילה $w\in\Sigma^*$ קיימים $q\in Q$ ו $\gamma\in\Gamma^*$ כך ש $(q_0,w,z_0)\vdash^*(q,\varepsilon,\gamma)$.
כלומר, **אוטומט ממשיך** הוא אוטומט שתמיד מסיים לקרוא את המילה, ולעולם לא נתקע באמצע הדרך בגלל כניסה לתצורת לולאה או בגלל שהמחסנית התרוקנה או בגלל שהוא הגיע לתצורה שאין ממנה אף צעד אפשרי.

למה: יהי $M=(Q,\Sigma,\Gamma,\delta,q_0,z_0,F)$ אוטומט מחסנית דטרמיניסטי. ניתן לבנות **אוטומט ממשיך** M' כך ש $L(M)=L(M')$.

הוכחה: אפשר להניח ש M תמיד עושה את התנועה הבאה (על פי הלמה שהוכחנו קודם).
נגדיר:
$C_1=\{(q,A)\mid p\notin F$ אז $(q,\varepsilon,A)\vdash^*(p,\varepsilon,\gamma)$ היא תצורת לולאה ואם $(q,\varepsilon,A)\}$
כלומר, אוסף כל הזוגות $(q\in q,A\in\Gamma)$ כך שהתצורה המתאימה עבורם עם מילת הקלט ε היא תצורת לולאה **שלא** ניתן להגיע ממנה למצב מקבל.

$C_2=\{(q,A)\mid(q,\varepsilon,A)\vdash^*(p,\varepsilon,\gamma)$ כך ש $\gamma\in\Gamma^*,p\in F$ תצורת לולאה וקיימים $(q,\varepsilon,A)\}$
כלומר, אוסף כל הזוגות $(q\in q,A\in\Gamma)$ כך שהתצורה המתאימה עבורם עם מילת הקלט ε היא תצורת לולאה **שכן** ניתן להגיע ממנה למצב מקבל.

נשים לב שלכל זוג (q,A), אם (q,ε,A) היא תצורת לולאה, אז $(q,A)\in C_1\cup C_2$.

יהי $M'=(Q\cup\{p,r\},\Sigma,\Gamma,\delta',q_0,z_0,F\cup\{p\})$ (מניחים ש $\{p,r\}\cap Q=\phi$)

כאשר δ' מוגדרת באופן הבא:
לכל $q\in Q$, $a\in\Sigma$, $Z\in\Gamma$: $\delta'(q,a,Z)=\delta(q,a,Z)$.
לכל $q\in Q$, $Z\in\Gamma$ אם (q,ε,Z) איננה תצורת לולאה, אז $\delta'(q,\varepsilon,Z)=\delta(q,\varepsilon,Z)$.
אם $(q,Z)\in C_1$ אז $\delta'(q,\varepsilon,Z)=(r,Z)$.
אם $(q,Z)\in C_2$ אז $\delta'(q,\varepsilon,Z)=(p,Z)$.
לכל $a\in\Sigma$: $\delta'(r,a,Z)=(r,Z)$, $\delta'(p,a,Z)=(r,Z)$ (סיום קריאת המילה במקרה שנכנסנו לתצורת לולאה - עוברים למצב בור לא מקבל)
כלומר, כל זמן שלא נכנסים לתצורת לולאה אז ממשיכים כרגיל. אם מגיעים לתצורת לולאה, אז במקום זאת, אם הלולאה לא מכילה מצב מקבל - עוברים ישירות למצב בור, ואם הלולאה כן מכילה מצב מקבל, אז עוברים למצב מקבל. אם מסתבר שאף על פי שהגענו למצב המקבל, עדין יש קלט, אז זה אומר שבמקור לא היינו מסוגלים לקרוא אותו לסיים את המילה, ולכן עוברים למצב הבור, לסיים לקרוא את המילה ואז לדחות אותה.

ברור ש $L(M')=L(M)$ וברור ש M' הוא אוטומט שממשיך.

הסבר כיצד לבנות את שתי הקבוצות C_1, C_2.

נגדיר:

$|Q| = n_1$ - מספר המצבים של האוטומט.

$|\Gamma| = n_2$ - מספר אותיות המחסנית.

$l = \max\{|\gamma| \ \delta(q,a,Z) = (p,\gamma)$ כך ש $a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$ ו $Z \in \Gamma$, $p,q \in Q$ קיימים$\}$ - הדבר הגדול ביותר שניתן לדחוף למחסנית בצעד אחד של האוטומט.

$$n_3 = \begin{cases} \dfrac{n_1\left(n_2^{n_1 n_2 l+1} - n_2\right)}{n_2 - 1} & n_2 \neq 1 \\ n_1 & n_2 = 1 \end{cases}$$ (מדוע נבחר המספר הזה - ההסבר יבוא בהמשך)

נוכיח כי M יכול לבצע לכל היותר n_3 מסעי ε מבלי להיכנס לתצורת לולאה.

כלומר, $(q,A) \in C_1 \cup C_2$ אם ורק אם קיימים $q' \in Q$ ו $\gamma \in \Gamma^+$ כך ש $(q,\varepsilon,A) \vdash^{n_3} (q',\varepsilon,\gamma)$

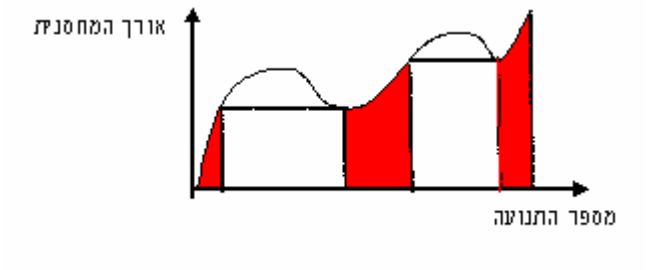
הכיוון: $\Leftarrow$ הוא טריוויאלי - אם $(q,A) \in C_1 \cup C_2$ אז בוודאי שלכל n נקבל ש $(q,\varepsilon,A) \vdash^{n} (q',\varepsilon,\gamma)$ עבור $q' \in Q$ ו $\gamma \in \Gamma^+$ כלשהם. בפרט, עבור $n = n_3$.

הכיוון: $\Rightarrow$ נניח כי $(q,\varepsilon,A) \vdash^{n_3} (q',\varepsilon,\gamma)$ ונוכיח כי $(q,A) \in C_1 \cup C_2$.

נבדיל בין שני מקרים אפשריים:

1. קיים $\beta \in \Gamma^+$ כך ש $|\beta| > n_1 n_2 l$ ו $(q,\varepsilon,A) \vdash^{x} (p,\varepsilon,\beta) \vdash^{y} (r,\varepsilon,\alpha)$ כך ש $x + y = n_3$.
2. לא קיים β כזה.

1. תהי $(q_j,\varepsilon,A_j\delta_j)$ התצורה האחרונה של M כך ש $|A_j\delta_j| = j$ ולכל תצורה הבאה לאחר מכך, יש לפחות j סימנים במחסנית בקטע עד β. נקבל שמוגדרים כל מני תצורות כנ"ל עבור כל מני j -ים בין 1 לבין $n_1 n_2 l + 1$, אם כי לא בהכרח עבור כל $1 \le j \le n_1 n_2 l + 1$.



המקומות האדומים הם המקומות שבהם יכול להיות מוגדר $(q_j,\varepsilon,A_j\delta_j)$, כי משם המחסנית רק עולה.

בכל תנועה אפשר להכניס למחסנית לכל היותר l אותיות, ולכן כדי להכניס $n_1 n_2 l + 1$ או יותר סימנים מחסנית, צריך לפחות $\left\lceil \dfrac{n_1 n_2 l + 1}{l} \right\rceil = n_1 n_2 + 1$ תנועות.

אבל יש לנו רק $n_1 n_2$ זוגות שונים של מצב ואות מחסנית (q,Z). לכן לאחר $n_1 n_2 + 1$ מסעי ε בהכרח נבקר באותו זוג (q,Z) פעמים.

לכן קיימים $q_j \in Q$ ו $\gamma, \delta_j \in \Gamma^+$ כך ש: $(q,\varepsilon,A) \vdash^* (q_j,\varepsilon,A_j\delta_j) \vdash^m (q_j,\varepsilon,A_j\gamma\delta_j)$
מהמצב האמצעי $(q_j,\varepsilon,A_j\delta_j)$ כבר לא מוציאים מהמחסנית יותר מאשר את האות הראשונה A_j וגם אז דוחפים מיד אות אחרת במקומה. לכן מבחינת האוטומט, הוא כבר לא מסתכל יותר על מה שבעומק המחסנית. לכן $(q,A) \in C_1 \cup C_2$.

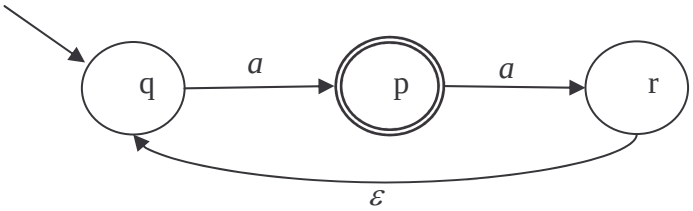
2. נניח שלכל β כך ש $(q,\varepsilon,A) \vdash^x (p,\varepsilon,\beta) \vdash^y (r,\varepsilon,\alpha)$ ו $x+y=n_3$ מתקיים $|\beta| \le n_1 n_2 l$.
בגזירה $(q,\varepsilon,A) \vdash^{n_3} (r,\varepsilon,\alpha)$ יש n_3+1 תצורות.
למחסנית בגודל k שיכולה להכיל g אותיות שונות, יש g^k תכולות אפשריות.
לכן למחסנית בגודל קטן או שווה ל k שיכולה להכיל g אותיות שונות יש $g^1+g^2+g^3+\ldots+g^k$ תכולות אפשריות, כלומר: $\frac{g(g^k-1)}{g-1}$.
לכן המחסנית שלנו, שגודלה הוא לכל היותר $|\beta| \le n_1 n_2 l$ ומחזיקה n_2 סימנים שונים יכולה להכיל לכל היותר $\frac{n_2(n_2^{n_1 n_2 l}-1)}{n_2-1} = \frac{(n_2^{n_1 n_2 l+1}-n_2)}{n_2-1} = n_2+n_2^2+n_2^3+\ldots+n_2^{n_1 n_1 l}$ תכולות שונות של המחסנית.
בנוסף, יש רק n_1 מצבים ולכן האוטומט יכול להיות לכל היותר ב $\frac{n_1(n_2^{n_1 n_2 l+1}-n_2)}{n_2-1} = n_3$ תצורות שונות. לכן בגזירה הנ"ל יש תצורה שמופיעה פעמיים - כלומר נכנסים ללולאה. לכן $(q,A) \in C_1 \cup C_2$.

מבדיקת האפשרויות (1) ו (2) נובע כי כל המצבים של לולאה מופיעים בתוך n_3 התנועות הראשונות.
לכן ניתן לבדוק את השייכות של (q,A) ל $C_1 \cup C_2$ בפחות מ n_3 צעדים.

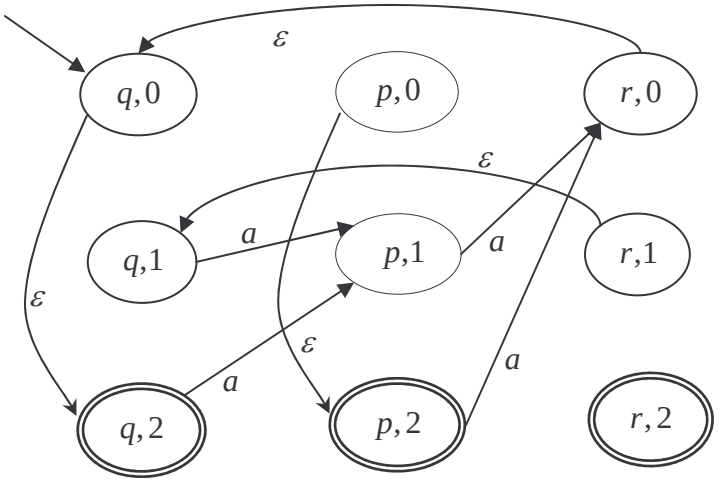
משפט: אוסף השפות שמתקבלות ע"י **אוטומט מחסנית דטרמיניסטי** סגור תחת פעולת משלים.
כלומר, אם M הוא אוטומט מחסנית דטרמיניסטי אז קיים M' כך ש $L(M')=\overline{L(M)}$ ו M' הוא אוטומט מחסנית דטרמיניסטי.

הוכחה: יהי $M=(Q,\Sigma,\Gamma,\delta,q_0,z_0,F)$ אוטומט מחסנית דטרמיניסטי.
נניח ש M הוא **אוטומט ממשיך**.
נגדיר את $M'=(Q',\Sigma,\Gamma,\delta',q_0',z_0,F')$ באופן הבא:
$Q'=Q\times\{0,1,2\}$ - כלומר, הכפלנו פי 3 את מספר המצבים.
$F'=Q\times\{2\}$ - כלומר, שליש מהמצבים הם מצבים מקבלים.
אם $q_0\notin F$ אז $q_0'=[q_0,0]$.
אם $q_0\in F$ אז $q_0'=[q_0,1]$.
אם $q\in Q$, $a\in\Sigma$, $Z\in\Gamma$ ו $\delta(q,a,Z)=(p,\gamma)$ אז
$\delta'([q,1],a,Z)=\delta'([q,2],a,Z)=([p,i],\gamma)$ כאשר $i=0$ אם $p\notin F$ ו $i=1$ אם $p\in F$.
אם $\delta(q,\varepsilon,Z)=(p,\gamma)$ אז $\delta'([q,1],\varepsilon,Z)=([p,1],\gamma)$ ו $\delta'([q,0],\varepsilon,Z)=([p,i],\gamma)$
כאשר $i=0$ אם $p\notin F$ ו $i=1$ אם $p\in F$.
אם $\delta(q,\varepsilon,Z)$ לא מוגדר אז $\delta'([q,0],\varepsilon,Z)=([q,2],Z)$
למה הכוונה?
0 מסמן שברצף מסעי ה- ε האחרונים (כולל האות האחרונה שהוא קרא), האוטומט המקורי, M, לא עבר במצב מקבל.
1 מסמן שברצף מסעי ה- ε האחרונים (כולל האות האחרונה שהוא קרא), האוטומט המקורי, M, כן עבר במצב מקבל.
כלומר - נניח שמתחילים ממצב מקבל. כל זמן שנשארים במצבים מקבלים, נשארים בהעתק מספר 1 שלא מאפשר לקבל את המילה. ברגע שמגיעים למצב לא מקבל אז עוברים להעתק מספר 0. כעת ממשיכים בכל צעדי ה- ε האפשריים עד שמגיעים שוב למצב מקבל (ואז חוזרים להעתק מספר 1) או עד שלא ניתן להמשיך יותר עם מסעי ε. ברגע שלא ניתן להמשיך יותר עם מסעי ε (ואנחנו עדין במצב לא מקבל - כלומר, נרצה לקבל את המילה, כי האוטומט שלנו אמור להחזיר את $\overline{L}$) אז עוברים באמצעות מסע ε להעתק מספר 2 (ההעתק של המילים המקבלות). אם נגמרה המילה אז מקבלים, ואחרת ממשיכים כמו בהתחלה.
בסופו של דבר נעצור בהעתק מספר 1 (כלומר לאחר מעבר במצב מקבל ואולי אחריו עוד כמה מסעי ε) ולכן עלינו לדחות את המילה, או שנעצור בהעתק מספר 0 (כלומר ללא מעבר במצב מקבל מאז קריאת האות האחרונה) ולכן ניתקע שם, והדבר היחיד שנוכל לעשות הוא להתקדם עוד מסע ε אחד להעתק מספר 2, ושם לקבל את המילה.
כך נקבל ש $L(M')=\overline{L(M)}$.

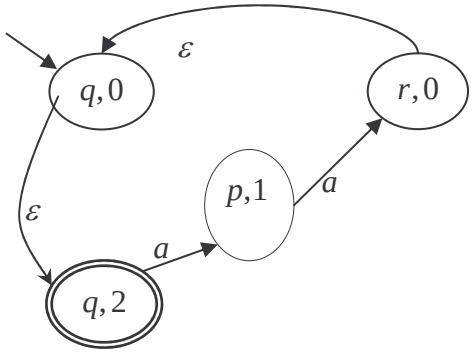
דוגמה: נניח שנתון האוטומט הבא (נניח שהוא לא משנה את תוכן המחסנית):



זהו אוטומט דטרמיניסטי. האוטומט הדטרמיניסטי שיקבל את השפה המשלימה הוא:

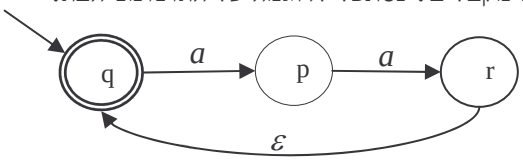


לאחר מחיקת מצבים שלא ניתן להגיע אליהם נקבל:

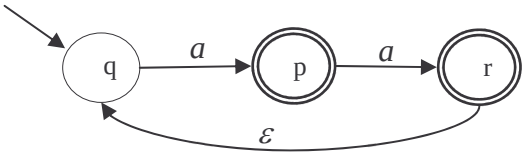


ואכן, האוטומט המקורי קיבל את כל המילים באורך אי זוגי, והאוטומט החדש מקבל את כל המילים באורך זוגי.

מדוע לא פשוט להפוך מצבים מקבלים? נסתכל לדוגמה על האוטומט הבא:



האוטומט הזה מקבל את כל המילים באורך זוגי.
אם נהפוך את המצבים נקבל:



והאוטומט הזה מקבל את כל המילים באורך גדול או שווה ל-1 והוא כמובן לא האוטומט המשלים.

דוגמה: השפה $L=\{a^ib^jc^k \mid i\neq j \vee j\neq k\}$ לא מתקבלת ע"י אוטומט מחסנית דטרמיניסטי.

זו שפה חסרת הקשר כאיחוד של שפות חסרות הקשר: $L=\{a^ib^jc^k \mid i\neq j\}\cup\{a^ib^jc^k \mid j\neq k\}$

הוכחה:

נניח שהשפה הזאת כן מתקבלת על ידי אוטומט מחסנית דטרמיניסטי.

נסתכל על השפה: $\tilde{L}=\{a^ib^ic^i\}$. ידוע לנו ששפה זו היא לא חסרת הקשר (על פי למת הניפוח לשפות חסרות הקשר).

אבל $\tilde{L}=\bar{L}\cap L(a^*b^*c^*)$.

מסגירות למשלים אצל שפות שיש להן אוטומט מחסנית דטרמיניסטי נקבל שהשפה $\bar{L}$ היא חסרת הקשר.

מסגירות לחיתוך עם שפות רגולאריות, נקבל ש $\bar{L}\cap L(a^*b^*c^*)$ היא שפה חסרת הקשר.

קיבלנו סתירה! לא יתכן ששפה גם תהיה חסרת הקשר וגם לא תהיה חסרת הקשר בו זמנית.

מסקנה: השפות הדטרמיניסטיות לא סגורות תחת פעולת **איחוד** - כי השפות $L_1=\{a^ib^jc^k \mid i\neq j\}$, $L_2=\{a^ib^jc^k \mid k\neq j\}$ הן שפות דטרמיניסטיות (יש להראות את האוטומט המתאים) והאיחוד שלהן אינה שפה דטרמיניסטית.

השפות הדטרמיניסטיות לא סגורות גם תחת פעולת **חיתוך** - נסתכל על השפות $L_1=\{a^ib^jc^k \mid i=j\}$, $L_2=\{a^ib^jc^k \mid k=j\}$ - אלו הן שפות דטרמיניסטיות אולם החיתוך שלהן היא השפה $\tilde{L}=\{a^ib^ic^i\}$ שבכלל איננה שפה חסרת הקשר, ולכן בפרט אינה שפה דטרמיניסטית.

(לא מצאתי את הדוגמה בשקפים אז רשמתי מהראש - נקווה שזה נכון)

אפשר להוכיח זאת גם באמצעות כללי דה-מורגאן: $L_1\cup L_2=\overline{\bar{L}_1\cap\bar{L}_2}$

אם השפות הדטרמיניסטיות היו סגורות תחת פעולת **חיתוך** אז מכיוון שהן סגורות תחת פעולת **משלים**, היינו מקבלים שהן סגורות תחת פעולת **איחוד**, בסתירה למה שהראנו קודם.

<u>בעיית ההתאמה של פוסט</u>

הגדרה: יהי Σ א"ב ו P תת קבוצה **סופית** של $\Sigma^+ \times \Sigma^+$.

התאמה ב P היא מילה $w \in \Sigma^+$ כך שקיימים n (מספר סופי) זוגות $(u_1,v_1),(u_2,v_2),...,(u_n,v_n) \in P$, לא בהכרח שונים, כך ש $w = u_1u_2...u_n = v_1v_2...v_n$

דוגמה: $\Sigma = (a,b,c)$, $P = \{(a,ab),(b,ca),(ca,a),(abc,c)\}$

המילה $abcaaabc$ היא התאמה, כי אפשר להשתמש בזוגות:

$(a,ab),(b,ca),(ca,a),(a,ab),(abc,c)$

$w = abcaaabc = abcaaabc = abcaaabc$

בעיית ההתאמה של פוסט - בהינתן מערכת התאמה P, האם קיימת בה התאמה w.

באופן פורמאלי: האם השפה: $\{P \mid P$ היא מערכת התאמה וקיימת התאמה ב $P\}$ ניתנת להכרעה.

כלומר, האם קיימת מכונת טיורינג שבהינתן מערכת התאמה P עונה תוך זמן סופי על השאלה האם ב P יש התאמה.

משפט: בעיית ההתאמה של פוסט לא ניתנת להכרעה.

תהי $P = \{(x_i, y_i) \mid i = 1,2,...,n\}$ מערכת התאמה מעל א"ב Σ.

יהי $I = \{1,2,...,n\}$ ונניח ש $\Sigma \cap I = \phi$.

נגדיר:

$L_p = \{x_{i_1}x_{i_2}...x_{i_m}i_m i_{m-1}...i_1 \mid i_1,...,i_m \in I, m \geq 1\}$ - כלומר, אוסף של מילים שמחולקות לשני חלקים - ההתחלה היא רצף של מילים מתוך הצד **השמאלי** של P, ואח"כ המספור שלהן, בסדר הפוך.

$R_p = \{y_{i_1}y_{i_2}...u_{i_m}i_m i_{m-1}...i_1 \mid i_1,...,i_m \in I, m \geq 1\}$ - באופן דומה ל L_p אלא שהפעם רצף המילים הוא מתוך הצד **הימני** של P.

$M_p = \{w\#w^R \mid w \in \Sigma^+ I^+\}$ - אוסף של מילים שבהתחלה יש אותיות מ Σ ואח"כ מספרים מ I אח"כ $\#$ (נניח ש $\# \notin \Sigma \cup I$) ואח"כ אותו רצף, אבל הפוך.

$N_p = L_p \# R_P^R$ - כלומר, אוסף של מילים שההתחלה שלהן היא מילה מ L_p, אח"כ יש $\#$ ואח"כ מילה שאם הופכים אותה אז מקבלים מילה מ R_p.

למה: $N_p \cap M_p = \phi$ אם ורק אם לא קיימת התאמה ב P.

זאת מכיוון שהחיתוך של שתי השפות הללו הוא אוסף ההתאמות ב P.

למה: N_p, M_p הן שפות חסרות הקשר דטרמיניסטיות.

M_p - פשוט דוחפים את האותיות למחסנית עד שמגיעים ל- $\#$ ואז מתחילים להוציא אותן בסדר ההפוך.

N_p - נובע מכך ש L_p ו R_p^R הן שפות חסרות הקשר דטרמיניסטיות - מריצים את האוטומט של L_p עד שמגיעים ל $\#$ ואז מריצים את האוטומט של R_p^R. (למה השפות הללו הן דטרמיניסטיות?)

מסקנה: לא קיים אלגוריתם שבהינתן שתי שפות חסרות הקשר דטרמיניסטיות, בודק האם החיתוך שלהן ריק. אחרת היינו יכולים להכריע את בעיית ההתאמה של פוסט, על ידי הרצת האלגוריתם הזה על N_p, M_p ובדיקה האם $N_p \cap M_p = \phi$. אם החיתוך ריק אז לא קיימת התאמה, ואם החיתוך לא ריק, אז כן קיימת התאמה.

למה: השפה $L = \bar{M}_P \cup \bar{N}_p$ היא שפה חסרת הקשר.

הוכחה: M_p, N_p הן שפות חסרות הקשר דטרמיניסטיות ולכן השפות המשלימות אותן, $\bar{M}_p, \bar{N}_p$, הן גם שפות חסרות הקשר דטרמיניסטיות. מסגירות לאיחוד של שפות חסרות הקשר (כפי שהוכחנו בהרצאה 2), נקבל שהאיחוד שלהן $L = \bar{M}_P \cup \bar{N}_p$ היא שפה חסרת הקשר (לא בהכרח דטרמיניסטית).

נשים לב ש $N_p \cap M_p = \phi$ אם ורק אם $L = \bar{M}_P \cup \bar{N}_p$ מכילה את כל המילים.

זאת מכיוון שאם $N_p \cap M_p = \phi$ אז לכל מילה w מתקיים $w \notin M_p$ או $w \notin N_p$ ולכן $w \in \bar{M}_p$ או $w \in \bar{N}_p$ ולכן $w \in L = \bar{M}_P \cup \bar{N}_p$, כלומר $L = \bar{M}_P \cup \bar{N}_p$ מכילה את כל המילים.

אן $N_p \cap M_p \neq \phi$ אז קיימת מילה $w \in N_p$ וגם $w \in M_p$ ולכן $w \notin \bar{M}_p$ וגם $w \notin \bar{N}_p$ ולכן $w \notin L = \bar{M}_P \cup \bar{N}_p$ ולכן $L = \bar{M}_P \cup \bar{N}_p$ לא מכילה את כל המילים.

מסקנה: לא קיים אלגוריתם שבהינתן שפה חסרת הקשר (כלומר, בהינתן הדקדוק או האוטומט שלה), מכריע האם היא מכילה את כל המילים.

הוכחה: אם היה קיים אלגוריתם כזה, אז היה ניתן להכריע את בעיית ההתאמה של פוסט על ידי בדיקה באמצעות האלגוריתם הזה האם השפה $L = \bar{M}_P \cup \bar{N}_p$ מכילה את כל המילים. אם היא מכילה את כל המילים, אז אין התאמה ב P ואם היא לא מכילה את כל המילים, אז יש התאמה ב P.