דקדוקי $LR(0)$:

יהיה M אוטומט דטרמיניסטי שמקבל ע"י ריקון מחסנית. $M=(Q,\Sigma,\Gamma,\delta,q_0,Z_0,\phi)$
נבנה לשפה של האוטומט דקדוק $LR(0)$.

אם באוטומט יש מעבר $(q,B_1...B_k)\in\delta(p,a,A)$ אז קיים כלל הדקדוק:
$[p,A,q]\to a[p_1B_1p_2]...[p_kB_kq]$

נקבל: $[p,A,q]\Rightarrow^* w$ אם רק אם מהתצורה (p,w,A) ניתן להגיע לתצורה $(q,\varepsilon,\varepsilon)$.
כלומר ניתן להגיע מהמצב p כאשר בראש המחסנית A ושארית הקלט w אל המצב q ע"י קריאת כל הקלט, ובלי להגיע למצב שמסתכלים על האות שמתחת ל A במחסנית לפני המצב q.

הבעיה היא שהדקדוק הזה הוא עדין לא דקדוק $LR(k)$.

לכן נשבור את הגזירה ל:
$[p,A,q]\to C_{paA}[p_1B_1p_2]...[p_kB_kq]$ ו- $C_{paA}\to a$

<u>באופן פורמאלי:</u>
נגדיר את הדקדוק G_M באופן הבא (אחרי הוצאת סימנים בלתי שימושיים).
ארבעה סוגי כללי גזירה:
1. $S\to[q_0,Z_0,p]$ לכל $p\in Q$ (q_0 הוא המצב ההתחלתי, Z_0 אות תחתית המחסנית)
2. $[q,Y,p]\to A_{qaY}$ לכל מעבר $\delta(q,a,Y)=(p,\varepsilon)$
3. $[q,Y,p_{k+1}]\to A_{qaY}[p_1X_1p_2]...[p_kX_kp_{k+1}]$ לכל מעבר $\delta(q,a,Y)=(p_1,X_1X_2...X_k)$ ולכל $p_2...p_{k+1}\in Q$
4. $A_{qaY}\to a$ לכל $q\in Q$, $a\in\Sigma\cup\{\varepsilon\}$ ו $Y\in\Gamma$.

<u>למה:</u>
$L(G_M)=N(M)$ (השפה של הדקדוק שווה לשפה של האוטומט המתקבלת ע"י ריקון המחסנית)

<u>למה:</u>
אם $[q,X,p]\Rightarrow_R^* w$ אז קיים חישוב יחיד $(q,w,X)\vdash^*(p,\varepsilon,\varepsilon)$. בנוסף לכך, סדרת התנועות של M בחישוב $(q,w,X)\vdash^*(p,\varepsilon,\varepsilon)$ תואמת את ההיפוך של הסדרה שבה משתנים מהצורה A_{saY} הוחלפו בטרמינלים מהצורה a בגזירה $[q,X,p]\Rightarrow_R^* w$.

A_{saY} מתאימה לתנועה של M על קלט a במצב s עם Y בראש המחסנית.

הוכחה:
היחידות של החישוב של M נובעת מן העובדה ש M הוא אוטומט דטרמיניסטי.
את החלק השני של הלמה נוכיח באינדוקציה על האורך של הגזירה $[q,X,p]\Rightarrow_R^* w$.

בסיס: אורך גזירה 2 - לא ניתן לגזור אף מילה מהמשתנה $[q,X,p]$ בפחות משתי גזירות, ע"פ ההגדרה של G_M.
לכן הגזירה היא מהצורה: $[q,X,p]\Rightarrow A_{qaX}\Rightarrow a$. מכיוון שקיימת הגזירה $[q,X,p]\Rightarrow A_{qaX}$, על פי ההגדרה של G_M, מתקיים $\delta(q,a,X)=(p,\varepsilon)$ ולכן התנועה של M היא ממצב q כאשר היא קוראת מהקלט את האות a ובראש המחסנית יש X, אל מצב p בלי לכתוב כלום למחסנית.

כלומר יש כאן גזירה יחידה מהצורה $A_{qaX}\Rightarrow a$ ואכן הצעד היחיד שהאוטומט מבצע הוא מעבר ממצב q ע"י קריאת האות a מהקלט והאות X מהמחסנית ומחיקתה.

צעד האינדוקציה:
נניח שלכל גזירה $[q,X,p]\Rightarrow_R^{<n} w$ הטענה מתקיימת ונראה עבור $[q,X,p]\Rightarrow_R^{n} w$

נניח שהגזירה הראשונה ב $[q,X,p]\Rightarrow_R^{n} w$ היא מהצורה:
$$[q,X,p]\Rightarrow A_{qaX}[p_1,X_1,p_2][p_2,X_2,p_3]...[p_k,X_k,p]$$
(אחרת הגזירה היא מהצורה $[q,X,p]\Rightarrow A_{qaX}$ ואת זה כבר הוכחנו בבסיס)
אזי קיימת w' כך ש $w=aw'$ והתנועה הראשונה של האוטומט M על w היא:
$(q,w,X)\vdash(p_1,w',X_1X_2...X_k)$.
כלומר מהמצב q_1 כאשר האוטומט רואה בקלט את a ובמחסנית את X, הוא עובר למצב p_1 ומחליף את X ב $X_1X_2...X_k$.
ברור שבגזירה האחרונה, יוחלף המשתנה השמאלי ביותר A_{qaX}, וע"פ הגדרת G_M הוא יוחלף באות a.
אם נסמן: $w'=w_1w_2...w_k$ כאשר $[p_i,X_i,p_{i+1}]\Rightarrow_R^{<n} w_i$ נקבל שבהתחלה גוזרים את $[p_k,X_k,p]\Rightarrow_R^* w_k$ (כי $[p_k,X_k,p]$ הוא המשתנה הימני ביותר וזו גזירה ימנית ביותר).
אחר כך גוזרים את $[p_{k-1},X_{k-1},p_k]\Rightarrow_R^{<n} w_{k-1}$, וכן הלאה עד $[p_1,X_1,p_2]\Rightarrow_R^{<n} w_1$.

על פי הנחת האינדוקציה, התנועות של M בחישובים מהצורה $[p_i,X_i,p_{i+1}]\Rightarrow_R^{<n} w_i$ תואמות את היפוך הסדרה שבה A_{saY} הוחלף ב a בגזירה $[p_i,X_i,p_{i+1}]\Rightarrow_R^{<n} w_i$.
לכן אם נוסיף את התנועה הראשונה של M כאשר היא קוראת את a (התו הראשון) בתחילת סדרת התנועות של שרשור התנועות של כל ה w_i-ים, ונוסיף את הגזירה האחרונה $[q,X,p]\Rightarrow A_{qaX}$ בסוף שרשור סדרת הגזירות מ A_{saY} לטרמינלים, נקבל שוב ששתי הסדרות החדשות תואמות זו לזו.
זאת מכיוון שהיפוך של שרשור הוא שרשור של היפוכים.
כלומר, הלמה מתקיימת גם עבור $[q,X,p]\Rightarrow_R^{n} w$.

יהי $[q,X,p]$ משתנה של G_M ותהי w_{qXp} מילה ב Σ^* כך ש $[q,X,p]\Rightarrow^* w_{qXp}$
(אנו מניחים כי G_M לא מכילה גזירות ומשתנים בלתי שימושיים)

נגדיר הומומורפיזם: $h:V\to\Sigma^*$ (פונקציה המקבלת משתנה ומחזירה מילה) באופן הבא:
$h(A_{qaY})=a$, $h([q,X,p])=w_{qXp}$.
בהרחבה למילה של משתנים וטרמינלים $h(\gamma)$ מחזירה את רצף המילים שנגזרות מהמשתנים בלבד.

נגדיר פונקציה $N:V\to\mathbb{N}$ באופן הבא:
$N(A_{qaY})=1$
מספר התנועות של M בחישוב $(q,w_{qXp},X)\vdash^*(p,\varepsilon,\varepsilon)$ $=N([q,X,p])$
נרחיב את הפונקציה N למילה של משתנים: $N(B_1B_2...B_k)=\sum_{i=1}^{k}N(B_i)$

נייצג את התנועה $\delta(q,a,Y)$ של M ע"י (qaY).
נגדיר הומומורפיזם נוסף $m:V\to\{(qaY)\}^*$, (פונקציה המקבלת משתנה ומחזירה רצף של תנועות):
$m(A_{qaY})=(qaY)$
סדרת התנועות של M בחישוב $m([q,X,p])=(q,w_{qXp}X)\vdash^*(p,\varepsilon,\varepsilon)$

<u>למה:</u>
יהי $\gamma\in(T\cup V)^*$ רישא חיוני של G_M. על פי מבנה הדקדוק $\gamma=\gamma' y$ כאשר $\gamma'\in V^*$ ו $y\in T^*$.
אזי קיימים $p\in Q$ ו $\beta\in\Gamma^*$ כך ש: $(q_0,h(\gamma'),Z_0)\vdash^{N(\gamma')}(p,\varepsilon,\beta)$ ע"י סדרת התנועות $m(\gamma')$.

הוכחה: מכיוון ש γ הוא רישא חיוני של G_M, קיימת מילה $y\in\Sigma^*$ וקיים מצב $z\in Q$ כך ש:
$[q_0,Z_0,z]\Rightarrow_R^*\gamma' y\Rightarrow_R^* h(\gamma')y$.
הסבר: אם γ' היא רישא חיוני של G_M, אז קיימת גזירה $S\Rightarrow_R^*\alpha' A' w'\Rightarrow_R\alpha'\beta' w'$ כך ש γ' היא רישא של $\alpha'\beta'$. כלומר ניתן לגזור $S\Rightarrow_R^*\gamma'\delta$. מכאן אפשר להמשיך לגזור
$S\Rightarrow_R^*\gamma'\delta\Rightarrow\gamma' y\Rightarrow_R^* h(\gamma')y$.
מכיוון שבדקדוק G_M הגזירות היחידות מ S הן מהצורה $S\to[q_0,Z_0,z]$, הרי שקיימת הגזירה
$[q_0,Z_0,z]\Rightarrow_R^*\gamma' y\Rightarrow_R^* h(\gamma')y$.

<u>תזכורת של הלמה הקודמת:</u>
אם $[q,X,p]\Rightarrow_R^* w$ אז קיים חישוב יחיד $(q,w,X)\vdash^*(p,\varepsilon,\varepsilon)$. בנוסף לכך, סדרת התנועות של M בחישוב $(q,w,X)\vdash^*(p,\varepsilon,\varepsilon)$ תואמת את ההיפוך של הסדרה שבה משתנים מהצורה A_{saY} הוחלפו בטרמינלים מהצורה a בגזירה $[q,X,p]\Rightarrow_R^* w$.

מספר התנועות של M בחישוב $(q,w_{qXp},X)\vdash^*(p,\varepsilon,\varepsilon)$ $=N([q,X,p])$

לכן $N(\gamma')$ ההחלפות של A_{qaY} ב a בגזירה $[q_0,Z_0,z]\Rightarrow_R^*\gamma' y\Rightarrow_R^* h(\gamma')y$ מתבצעות בגזירה $\gamma' y\Rightarrow_R^* h(\gamma')y$ (ולא בגזירה $[q_0,Z_0,z]\Rightarrow_R^*\gamma' y$?).

מכיוון שיש רק חישוב אחד של M (זהו אוטומט דטרמיניסטי), $(q_0,h(\gamma')y,Z_0)\vdash^*(z,\varepsilon,\varepsilon)$
מתחייב ש $N(\gamma')$ התנועות הראשונות של החישוב חייבות להיות $m(\gamma')$.
מדוע ומה הקשר בין זה לבין הלמה שהיינו אמורים להוכיח?

<u>למה:</u>
יהי $\gamma\in(T\cup V)^*$ רישא חיוני של G_M.
אם $[B\to\beta.,]\in V_0(\gamma)$ אז $V_0(\gamma)$ לא מכיל פריט מהצורה $[A_{qaY}\to .a,]$.
(כלומר אין קונפליקט $Shift-Reduce$).

<u>הוכחה:</u>
נסתכל על האפשרויות לגזירה $B\to\beta$:

1. $B\to\beta$ היא מהצורה $S\to[q_0,Z_0,p]$.
אם $[B\to\beta.,]\in V_0(\gamma)$, ע"פ ההגדרה: הפריט $[S\to[q_0,Z_0,p].]$ הוא **<u>תקף</u>** עבור רישא חיוני, $\gamma=\alpha[q_0,Z_0,p]$, אם קיימת גזירה: $S\Rightarrow_R^*\alpha Sw\Rightarrow_R\alpha[q_0,Z_0,p]w$.
מכיוון ש S לא מופיע באגף הימני של אף כלל גזירה, מתקיים: $\alpha=w=\varepsilon$ ו $\gamma=\beta=[q_0,Z_0,p]$.

אם $[A_{qaY}\to .a,]\in V_0(\gamma)$, ע"פ ההגדרה: הפריט $[A_{qaY}\to .a,]$ הוא **<u>תקף</u>** עבור רישא חיוני, γ, אם קיימת גזירה: $S\Rightarrow_R^*\gamma A_{qaY}w\Rightarrow_R\gamma aw$.
ראינו קודם ש $\gamma=\beta=[q_0,Z_0,p]$.
כלומר הגזירה היא: $S\Rightarrow_R^*\gamma A_{qaY}w\Rightarrow_R\gamma aw=[q_0,Z_0,p]aw$.
אולם זה לא יתכן, כי אף תבנית פסוקית ימנית של G_M חוץ מהתבנית $[q_0,Z_0,p]$ לא מתחילה ב $[q_0,Z_0,p]$. (כולן מתחילות במשתנה מהצורה A_{qaY}).

אם $B \to \beta$ היא מהצורות 2,3:

2. $[q,Y,p] \to A_{qaY}$

3. $[q,Y,p_{k+1}] \to A_{qaY}[p_1X_1p_2]...[p_kX_kp_{k+1}]$

כלומר, $B \to \beta$ היא מהצורה $[q,Y,p_{k+1}] \to A_{qaY}[p_1X_1p_2]...[p_kX_kp_{k+1}]$ עבור $k \ge 0$.

אם $[B \to \beta.,] \in V_0(\gamma)$ אזי $\gamma = \gamma'\beta$.

אם $[A_{qaY} \to .a,] \in V_0(\gamma)$ אז קיימת גזירה $S \Rightarrow_R^* \gamma A_{qaY} w \Rightarrow_R \gamma a w$.

לכן ע"פ ההגדרה של רישא חיוני, נקבל שכל רישא של $\gamma A_{qaY} w$ הוא רישא חיוני של G_M.

בפרט, $\gamma A_{qaY} = \gamma'\beta A_{qaY}$ הוא רישא חיוני.

מכיוון ש M הוא אוטומט דטרמיניסטי, הגזירה היחידה שהאגף הימני שלה מתחיל מ β היא $B \to \beta$.

הסבר: β מתחיל ממשתנה מהצורה A_{qaY} והדרך היחידה לגזור משהו שמתחיל ממשתנה מהצורה A_{qaY} היא באמצעות כלל גזירה המתאים ל $\delta(q,a,Y)$. אבל הערך של $\delta(q,a,Y)$ הוא יחיד כי M הוא אוטומט דטרמיניסטי, ולכן ניתן לגזור את β רק באמצעות $B \to \beta$.

ראינו שהגזירה של $\gamma A_{qaY} w = \gamma'\beta A_{qaY} w$ הייתה גזירה ימנית ביותר. כמו כן, ראינו שאת β ניתן לגזור רק מ B, ולכן הגזירה הימנית ביותר היא: $S \Rightarrow_R^* \gamma' B A_{qaY} w \Rightarrow_R \gamma'\beta A_{qaY} w$

אולם זו לא גזירה ימנית ביותר, מכיוון שגוזרים את B לפני שגוזרים את A_{qaY}.

לכן לא יתכן ש $[A_{qaY} \to .a,] \in V_0(\gamma)$.

4. אם $B \to \beta$ היא גזירה מהצורה 4, כלומר: $B = A_{pbZ}$ ו $\beta = b$ עבור $b \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$ (למה ε?)

כמו קודם, $\gamma = \gamma'\beta = \gamma' b$.

אם $[A_{qaY} \to .a,] \in V_0(\gamma)$ אז כמו קודם, $\gamma' b A_{qaY}$ הוא רישא חיוני של G_M.

לכן $b = \varepsilon$, כי אף רישא חיוני לא מכיל טרמינלים בתוכו ממש (כלומר, שאחריהם יש משתנה).

הסבר: בדקדוק שלנו, בכל הגזירות תמיד הטרמינלים מופיעים בקצה הימני של האגף הימני של כלל הגזירה. לכן אם "הצלחנו" להגיע למילה שמכילה טרמינלים ואחריהם משתנה, זה אומר שגזרנו גזירה לא ימנית ביותר. לכן גזירה זו לא יכולה להיות זו שמתאימה לרישא החיוני.

לכן אם $\gamma' b A_{qaY}$ הוא רישא חיוני ו $b = \varepsilon$, נקבל ש γA_{qaY} הוא רישא חיוני.

$[B \to \beta.,] \in V_0(\gamma)$, כלומר $[A_{pbZ} \to .,] \in V_0(\gamma)$, כלומר קיימת גזירה $S \Rightarrow_R^* \gamma A_{pbZ} w \Rightarrow_R \gamma w$

כלומר ניתן לגזור את $\gamma A_{pbZ} w$ בגזירה ימנית ביותר, ולכן כל רישא שלה, ובפרט γA_{pbZ} הוא רישא חיוני של G_M.

כלומר גם γA_{qaY} וגם γA_{pbZ} הם רישות חיוניים של הדקדוק G_M.

לכן $N(\gamma)+1$ התנועות הראשונות של M על הקלט γa הן $m(\gamma)\left(p,\underset{b}{\underset{\smile}{\varepsilon}},Z\right)$ וגם $m(\gamma)(q,a,Y)$.

וזה כמובן בלתי אפשרי כי האוטומט דטרמיניסטי ו $(q,a,Y) \ne (p,b,Z)$.

<u>למה:</u>
יהי γ רישא חיוני של G_M. אם $[B \to \beta.,] \in V_0(\gamma)$ אזי $V_0(\gamma)$ לא מכילים פריטים אחרים מין הצורה $[C \to \alpha.,]$. (כלומר אין קונפליקט $Reduce - Reduce$).

נחלק למקרים:
אם $B = S$ או $C = S$ אז כמו במקרה הראשון של הלמה הקודמת, מראים ש $\gamma = \alpha = \beta = [q_0, Z_0, p]$ ו $B = C = S$:

אם $[B \to \beta.,] \in V_0(\gamma)$, ע"פ ההגדרה: הפריט $[S \to [q_0, Z_0, p].]$ הוא **<u>תקף</u>** עבור רישא חיוני, $\gamma = \alpha'[q_0, Z_0, p]$, אם קיימת גזירה: $S \Rightarrow_R^* \alpha' S w' \Rightarrow_R \alpha'[q_0, Z_0, p] w'$.
מכיוון ש S לא מופיע באגף הימני של אף כלל גזירה, מתקיים: $\alpha' = w = \varepsilon$ ו $\gamma = \beta = [q_0, Z_0, p]$.
כלומר הגזירה היא בעצם: $S \Rightarrow_R [q_0, Z_0, p]$.

אם $[C \to \alpha.] \in V_0(\gamma)$, ע"פ ההגדרה: הפריט $[C \to \alpha.,]$ הוא **<u>תקף</u>** עבור רישא חיוני, γ, אם קיימת גזירה: $S \Rightarrow_R^* \alpha'' C w'' \Rightarrow_R \alpha'' \alpha w'' = \gamma w'' = \beta w'' = [q_0, Z_0, p] w''$.

אולם זה יתכן רק אם $w'' = \varepsilon$, כי אף תבנית פסוקית ימנית של G_M חוץ מהתבנית $[q_0, Z_0, p]$ לא מתחילה ב $[q_0, Z_0, p]$. (כולן מתחילות במשתנה מהצורה A_{qaY}).
לכן הגזירה היא בעצם: $S \Rightarrow_R^* \alpha'' C \Rightarrow_R \alpha'' \alpha = \gamma = \beta = [q_0, Z_0, p]$
הדרך היחידה לגזור $[q_0, Z_0, p]$ בגזירה ימנית ביותר היא באמצעות הכלל $S \to [q_0, Z_0, p]$
(בכל דרך אחרת נקבל משהו שמתחיל ב A_{qaY})
לכן $\alpha'' = \varepsilon$ ו- $C = S = B$ ו- $\alpha = \gamma = \beta$.

אם $B \to \beta$ הוא מהצורה $[p, X, p_{k+1}] \to A_{pbX} [p_1, X_1, p_2] \ldots [p_k, X_k, p_{k+1}]$
וגם $C \to \alpha$ הוא מהצורה $[q, Y, q_{l+1}] \to A_{qaY} [q_1, Y_1, q_2] \ldots [q_l, Y_l, q_{l+1}]$
הפריט $[B \to \beta.,]$ הוא **<u>תקף</u>** עבור רישא חיוני, $\gamma = \gamma' \beta$, אם קיימת גזירה:
$S \Rightarrow_R^* \gamma' B w \Rightarrow_R \gamma' \beta w$
הפריט $[C \to \alpha.,]$ הוא **<u>תקף</u>** עבור רישא חיוני $\gamma = \gamma'' \alpha$, אם קיימת גזירה:
$S \Rightarrow_R^* \gamma'' C y \Rightarrow_R \gamma'' \alpha y$
כלומר α ו- β הן סייפות של γ.
נניח בלי הגבלת הכלליות $\beta = \delta\alpha$ (כלומר β מתחילה "מוקדם" יותר)
נקבל שהגזירה: $S \Rightarrow_R^* \gamma' B w \Rightarrow_R \gamma' \beta w$ היא בעצם $S \Rightarrow_R^* \gamma' B w \Rightarrow_R \gamma' \delta\alpha w$.
כלומר: $S \Rightarrow_R^* \gamma' [p, X, p_{k+1}] w \Rightarrow_R \gamma' \delta A_{qaY} [q_1, Y_1, q_2] \ldots [q_l, Y_l, q_{l+1}] w$
כלומר קיים כלל הגזירה $[p, X, p_{k+1}] \to \delta A_{qaY} [q_1, Y_1, q_2] \ldots [q_l, Y_l, q_{l+1}]$.
ממבנה הדקדוק G_M אנחנו יודעים שזה יתכן רק אם $\delta = \varepsilon$, כלומר $\alpha = \beta$.
ע"פ מבנה הדקדוק, את $\beta = \alpha = A_{pbX} [p_1, X_1, p_2] \ldots [p_k, X_k, p_{k+1}]$ ניתן לגזור אך ורק מ $B = [p, X, p_{k+1}]$. לכן C, שגוזר את α, חייב להיות שווה ל B.

אם $B \to \beta$ הוא מהצורה $A_{pbZ} \to b$ וגם $C \to \alpha$ הוא מהצורה $A_{qaY} \to a$
אם $a = \varepsilon$ או $b = \varepsilon$ אנו נמצאים במקרה האחרון של הלמה הקודמת. לכן זה לא יתכן.

אם שניהם שונים מ- ε אז שוב כמו במקרה האחרון של הלמה הקודמת, $\gamma = \gamma'\beta = \gamma' b$
וגם $\gamma = \gamma'\alpha = \gamma' a$. כלומר $a = b$.
$\left(A_{pbZ} \to b.,\right] \in V_0(\gamma)$, כלומר קיימת גזירה: $S \Rightarrow_R^* \gamma' A_{pbZ} w \Rightarrow_R \gamma' bw$
$\left(A_{qaY} \to b.,\right] \in V_0(\gamma)$, כלומר קיימת גזירה: $S \Rightarrow_R^* \gamma' A_{qaY} y \Rightarrow_R \gamma' by$
כלומר גם $\gamma' A_{qaY}$ וגם $\gamma' A_{pbZ}$ הם רישות חיוניים של הדקדוק G_M.

לכן $N(\gamma')+1$ התנועות הראשונות של M על הקלט γb הן $m(\gamma)(p,b,Z)$ וגם $m(\gamma)(q,a,Y)$.
מכיוון שהאוטומט דטרמיניסטי, זה אומר ש $(q,a,Y) = (p,b,Z)$, כלומר $B = C$.

אם $C \to \alpha$ הוא מין הצורה $A_{qaY} \to a$ ו $B \to \beta$ לא מהצורה הזו:
$\left[B \to \beta.,\right] \in V_0(\gamma)$, לכן קיימת הגזירה $S \Rightarrow_R^* \gamma' Bw \Rightarrow_R \gamma'\beta w$. (כלומר $\gamma = \gamma'\beta$).
$\left[A_{qaY} \to a.\right] \in V_0(\gamma)$, לכן קיימת הגזירה $S \Rightarrow_R^* \gamma'' A_{qaY} y \Rightarrow_R \gamma'' ay$. (כלומר $\gamma = \gamma'' a$).
אם $B \to \beta$ הוא לא כלל גזירה מצורה 4 של הדקדוק, אז β מסתיים במשתנה, כלומר $\beta = \delta D$ עבור $\delta \in (T \cup V)^*$ ו $D \in V$.
לכן $\gamma = \gamma'\delta D = \gamma'' a$. זה אפשרי רק אם $a = \varepsilon$.
כלומר $\gamma = \gamma''$, והגזירה $S \Rightarrow_R^* \gamma'' A_{qaY} y \Rightarrow_R \gamma'' ay$ היא בעצם $S \Rightarrow_R \gamma A_{qaY} y \Rightarrow_R \gamma y$.
לכן ע"פ ההגדרה של רישא חיוני, נקבל שכל רישא של $\gamma A_{qaY} y$ הוא רישא חיוני של G_M.
בפרט, $\gamma A_{qaY} = \gamma'\beta A_{qaY}$ הוא רישא חיוני. כלומר ניתן לגזור $S \Rightarrow_R^* \gamma'\beta A_{qaY} x$.

אם $B = S$ אז אנחנו במקרה הראשון של הלמה הקודמת ($\left[A \to a.,\right] = \left[A \to .a,\right]$ כי $a = \varepsilon$). לכן זה לא יתכן. לכן $B \neq S$ ולכן האפשרות היחידה שנשארה היא ש $B \to \beta$ הוא כלל גזירה מהצורות 2,3.
לכן β מתחיל ממשתנה מהצורה A_{qaY}.
הדרך היחידה לגזור משהו שמתחיל ממשתנה מהצורה A_{qaY} היא באמצעות כלל גזירה המתאים ל $\delta(q,a,Y)$. אבל הערך של $\delta(q,a,Y)$ הוא יחיד כי M הוא אוטומט דטרמיניסטי, ולכן ניתן לגזור את β רק באמצעות $B \to \beta$.

ראינו שהגזירה של $\gamma A_{qaY} w = \gamma'\beta A_{qaY} w$ הייתה גזירה ימנית ביותר. כמו כן, ראינו שאת β ניתן לגזור רק מ B, ולכן הגזירה הימנית ביותר היא: $S \Rightarrow_R^* \gamma' BA_{qaY} w \Rightarrow_R \gamma'\beta A_{qaY} w$
אולם זו לא גזירה ימנית ביותר, מכיוון שגוזרים את B לפני שגוזרים את A_{qaY}.
לכן לא יתכן ש $\left[C \to a.,\right] \in V_0(\gamma)$.

משתי הלמות האחרונות נובע שתנאי $LR(0)$ מתקיים עבור הדקדוק G_M.
הסבר: אם $[C \to \alpha_1.\alpha_2,]$ הוא פריט $LR(0)$ תקף עבור $\gamma = \gamma'\alpha_1$ וגם $\alpha_1 \neq \varepsilon$ וגם $\alpha_2 \neq \varepsilon$ אז מתחייב שהגזירה $C \to \alpha_1\alpha_2$ היא גזירה מהצורה $[q,Y,p_{k+1}] \to A_{qaY}[p_1X_1p_2]...[p_kX_kp_{k+1}]$ ו α_2 מתחיל ממשתנה מהצורה $[q,X,p]$.

ראינו בהרצאה הקודמת:

$$V_{i+1}^{\gamma X} = V_i^{\gamma X} \cup \{[B \to .\delta, x] \mid [A \to \alpha.B\beta, u] \in V_i^{\gamma X} \wedge B \to \delta \in P \wedge x \in FIRST_k(\beta u)\} \subseteq V_k(\gamma X)$$

ממשתנה מהצורה $[q,X,p]$ ניתן לגזור באמצעות כללי גזירה מצורות 2,3 את $A_{qaX}\delta$.
לכן גם $[[q,X,p] \to .A_{qaX}\delta] \in V_0(\gamma)$ עבור $a \in \Sigma$ כלשהו.
בנוסף גם $[A_{qay} \to .a] \in V_0(\gamma)$ וכאן קיבלנו סתירה לטענות של הלמות הקודמות.

לכן כיסינו את כל הדרישות של תנאי $LR(0)$ ולכן G_M הוא דקדוק $LR(0)$

<u>סיבוכיות זמן ומקום</u>
מודל החישוב: מכונות טיורינג בעלות שני סרטים אינסופיים בכיוון אחד.
הסרט הראשון מכיל את הקלט ואסור לכתוב עליו.
הסרט השני נקרא "**סרט עבודה**".

<u>הגדרה:</u> תהי T מכונת טיורינג כך שעל כל קלט באורך n, T משתמשת לכל היותר ב $L(n)$ תאים בסרט העבודה. אזי T נקראת **מכונת טיורינג בעלת סיבוכיות מקום** $L(n)$**.**

<u>משפט:</u> תהי T מכונת טיורינג בעלת סיבוכיות מקום $L(n)$, כאשר הפונקציה $L(n)$ איננה חסומה.
אזי: $\limsup \frac{L(n)}{\log\log n} > 0$.
כלומר קיים קבוע c כך שעבור אינסוף n-ים מתקיים: $L(n) \geq c\log\log n$.

<u>הגדרה:</u> תהי T מכונת טיורינג. תצורת סרט העבודה של T היא שלישיה (u,k,g) כאשר:

- u היא התכולה של סרט העבודה.
- k הוא המקום של הראש על סרט העבודה.
- g הוא מצב המכונה

תהי T מכונת טיורינג בעל סיבוכיות מקום $L(n)$, s מצבים ו t סימנים של האלפבית.
אזי בהינתן קלט באורך u, קיימות לכל היותר $s \cdot L(n) \cdot t^{L(n)}$ תצורות שונות של סרט העבודה.
זאת מכיוון שהמכונה יכולה להימצא ב s מצבים, והראש יכול להיות מול $L(n)$ תאים, ובכל אחד מ $L(n)$ התאים, יכולות להיות t אותיות שונות.