## אוטומטים על מילים אינסופיות

יהי $\Sigma$ אלפבית סופי.
הקבוצה של מילים אינסופית מעל $\Sigma$ היא: $\Sigma^{\infty} = \{\sigma_1\sigma_2 ... | \sigma_i \in \Sigma \quad \forall i \in \mathbb{N}\}$

במילים אחרות: $\Sigma^{\infty} = \{\sigma : \mathbb{N} \to \Sigma \mid$ היא פונקציה $\sigma\}$
$\sigma_i = \sigma(i)$ עבור $i \in \mathbb{N}$.
כלומר, כל מילה אינסופית היא בעצם פונקציה שמחזירה את האות התאימה לכל תו במילה על פי מיקומו.

יהי $M = \langle S, \Sigma, s_0, \delta, F \rangle$ אוטומט סופי **לא דטרמיניסטי**.
$S$ - קבוצת המצבים של האוטומט.
$\Sigma$ - אלפבית האוטומט.
$s_0 \in S$ - מצב תחילי.
$\delta$ - יחס מעבר: $\delta \subseteq S \times \Sigma \times S$ סופי
$F \subseteq S$ קבוצת מצבים מקבלים (סופיים).

M נקרא גם "אוטומט בוכי" - *Büchi*

## כיצד עובד האוטומט?

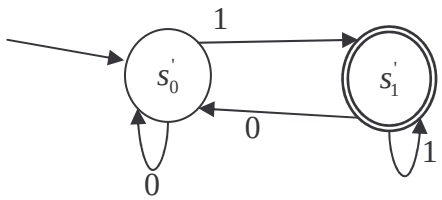
תהי $\sigma = \sigma_1\sigma_2 ...$ מילה אינסופית, $\sigma \in \Sigma^{\infty}$.
נאמר שהאוטומט M מקבל את $\sigma$ ונסמן $\sigma \in L^{\infty}(M)$ אם קיימת סידרה אינסופית של מצבים של $M$, $q_1, q_2, ...$ כך שמתקיימים התנאים הבאים:
1. $q_1$ הוא המצב התחילי: $q_1 = s_0$.
2. $\langle q_i, \sigma_i, q_{i+1} \rangle \in \delta$ לכל $i \in \mathbb{N}$.
3. קיימת סדרה אינסופית של מספרים טבעיים $i_1, i_2, ...$ כך ש $q_{i_n} \in F$ לכל $n \in \mathbb{N}$.

במילים אחרות - קיים מסלול חישוב (אינסופי) של האוטומט על המילה, אשר עובר אינסוף פעמים במצב מקבל כלשהו (לפחות אחד).

**דוגמה:** אוטומט דטרמיניסטי.
$M' = \langle S', \Sigma, s_0', \mu, F' \rangle$ ($\mu$ היא פונקצית המעברים)
$S = \{s_0', s_1'\}$ $\quad \Sigma = \{0,1\}$, $\quad F' = \{s_1'\}$

$\mu$:

| $\Sigma \setminus S'$ | $s_0'$ | $s_1'$ |
|---|---|---|
| 0 | $s_0'$ | $s_0'$ |
| 1 | $s_1'$ | $s_1'$ |



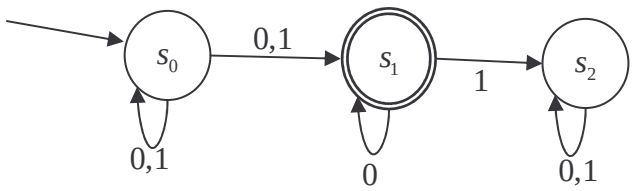

$L^{\infty}(M')$ היא אוסף כל המילים המורכבות מהאותיות 0 ו- 1, ש 1 מופיע בהן אינסוף פעמים.
$L(M)$ היא אוסף כל המילים המסתיימות באות 1.

**דוגמה:** אוטומט אי דטרמיניסטי.

$M=\langle S,\Sigma,s_0,\delta,F\rangle$ כאשר $S=\{s_0,s_1,s_2\}$ , $\Sigma=\{0,1\}$ , $F=\{s_1\}$

$\delta$:

| $\Sigma \setminus S$ | $s_0$ | $s_1$ | $s_2$ |
|---|---|---|---|
| 0 | $s_0,s_1$ | $s_1$ | $s_2$ |
| 1 | $s_0,s_1$ | $s_2$ | $s_2$ |




טענה: הקבוצה $L^\infty(M)$ היא הקבוצה של כל המילים האינסופית המורכבות מהאותיות 0 ו- 1, כך שהאות 1 מופיעה במילה מספר **סופי** של פעמים.

הוכחה: אם במילה יש רק מספר **סופי** של 1-ים, אזי M יישאר במצב $s_0$ עד שיגיע ל 1 האחרון, ואז יקרא אותו ויעבור למצב $s_1$, ושם יישאר לנצח בקריאת אינסוף האפסים.

הראנו מסלול מקבל, ולכן המילה שייכת ל $L^\infty(M)$.

אם במילה יש **אינסוף** 1-ים, אז בכל מסלול, או שהאוטומט נשאר לנצח במצב $s_0$, ולכן זהו לא מסלול מקבל, או שהוא עובר מתישהו למצב $s_1$, אולם משם הוא בהכרח ימשיך למצב $s_2$, כשיגיע ל 1 כלשהו בקריאת המילה, והוא בוודאות יגיע לקריאה של 1, כי יש אינסוף 1-ים במילה. ברגע שהאוטומט הגיע למצב $s_2$, הוא כבר לא יכול לחזור למצב המקבל היחיד, $s_1$, ולכן לא יכול לבקר אינסוף פעמים במצב מקבל.

לכן המילה לא שייכת ל $L^\infty(M)$.

טענה: לא קיים אוטומט **דטרמיניסטי** המקבל את השפה $L^\infty(M)$ - אוסף כל המילים האינסופיות שמספר ה 1-ים בהם הוא סופי. נסמן את הקבוצה הזאת: $L_1^\infty = L^\infty(M)$

הוכחה:

נניח בשלילה כי $L_1^\infty = L^\infty(\bar{M})$ עבור $\bar{M}=\langle \bar{S},\Sigma,\bar{s}_0,\bar{\mu},\bar{F}\rangle$, אוטומט **דטרמיניסטי** בעל $n$ מצבים.

נגדיר באינדוקציה סדרת מילים אינסופיות: $\alpha_2,\dots,\alpha_{n+2}\in L_1^\infty$ כך ש $\alpha_i\in(0^*1)^i0^\infty$.

כלומר $\alpha_i$ מכילה בדיוק $i$ 1-ים ואח"כ אינסוף 0-ים.

בהרצה היחידה של $\bar{M}$ על $\alpha_i$, בין כל זוג של 1-ים שכנים, מופיע מצב סופי (מקבל).

בסיס: בניית $\alpha_2$. ברור ש $10^\infty\in L_1^\infty$ כי יש במילה הזאת 1 יחיד.

תהי $q=q_1,q_2,\dots$ סדרת מצבים בהרצה של $\bar{M}$ על המילה האינסופית $10^\infty$.

אזי קיים $i$ כך ש $q_i\in F$. נגדיר: $\alpha_2=10^i10^\infty$

$\alpha_2\in L_1^\infty$ ומשום ש $\bar{M}$ הוא אוטומט דטרמיניסטי, $i$ המצבים הראשונים בהרצה של $\bar{M}$ על $\alpha_2$ זהים לאלו שברצה על $10^\infty$. לכן $q_i$ הוא מצב סופי שמופיע בין ה 1-ים של $\alpha_2$.

צעד האינדוקציה: נבנה את $\alpha_{i+1}$ בהינתן $\alpha_i$ באופן הבא:
בהרצה היחידה $q^i$ של $\bar{M}$ על $\alpha_i$ חייב להופיע מצב סופי אחרי כל ה 1-ים של $\alpha_i$ (אחרת האוטומט לא יקבל את המילה $\alpha_i$).
נניח שהמצב הזה מופיע במקום ה $j$ בסדרת המצבים $q^i$.

נגדיר את המילה $\alpha_{i+1} \in L_1^\infty$ באופן הבא: עד לתו ה $j$ כולל היא זהה לחלוטין למילה $\alpha_i$.
בתו ה $j+1$ יש 1 ואחריו אינסוף אפסים. כלומר:

$$\alpha_{i+1}(x) = \begin{cases} \alpha_i(x) & x \le j \\ 1 & x = j+1 \\ 0 & x > j+1 \end{cases}$$

משום ש $\bar{M}$ הוא אוטומט דטרמיניסטי, המצב הסופי הנ"ל מופיע בין ה 1-ים האחרונים של $\alpha_{i+1}$ ובין שאר הזוגות הוא מופיע על פי הבניה האינדוקטיבית.

נתבונן במילה $\alpha_{n+1}$ (כזכור ב $S$ יש רק $n$ מצבים):
$\ldots 1\underbrace{0\ldots}_{q_{i_1}}1\underbrace{0\ldots}_{q_{i_2}}10\ldots\ldots 1\underbrace{0\ldots 0}_{q_{i_{n+1}}}10\ldots$ - המצבים $q_i$-ים המסומנים הם מצבים מקבלים.
מספר המצבים של $\bar{M}$ הוא רק $n$ ולכן קיימים $l,m$ המקיימים $1 \le l < m \le n+1$ כך ש $q_{i_l} = q_{i_m}$.
לכן אם נסתכל על מילה הזהה ל $\alpha_{i+1}$ עד המצב $q_{i_m}$ ואח"כ חוזרת על הקטע שבין $q_{i_l}$ ל $q_{i_m}$ אינסוף פעמים, הרי שמילה זו תתקבל על ידי האוטומט $\bar{M}$, כי היא עוברת אינסוף פעמים במצב המקבל $q_{i_m}$.
זאת אף על פי שהיא מכילה אינסוף 1-ים (כי יש לפחות 1 יחיד בין המפגש הראשון ב $q_{i_l}$ והמפגש שאחריו ב $q_{i_m}$).
לכן $L(\bar{M}) \ne L_1^\infty$.

**<u>מסקנה</u>**: ראינו קודם שהשפה המשלימה - אוסף כל המילים האינסופיות שיש בהן מספר אינסופי של 1-ים, כן מתקבלת על ידי אוטומט דטרמיניסטי.
לכן אוסף השפות (של מילים אינסופיות) שמתקבלות ע"י אוטומטים דטרמיניסטיים אינו סגור תחת פעולת משלים.

**<u>הגדרה</u>**:
השפות שמתקבלות ע"י אוטומטים של *Büchi* נקראות שפות $\omega$ רגולאריות. (אומגה רגולאריות).

**<u>משפט:</u>** בעיית הריקנות עבור שפות $\omega$ רגולאריות ניתנת להכרעה. כלומר, בהינתן אוטומט *Büchi* ,M, ניתן להכריע האם $L^\infty(M) = \phi$. הופיע במועד א', אביב התשס"ה - 2005.

הוכחה: יהי $M = \langle S, \Sigma, s_0, \delta, F \rangle$ כאשר $F = \{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$.
נגדיר: $M_i = \langle S, \Sigma, s_0, \delta, \{f_i\} \rangle$ עבור $i \in \{1, \ldots, n\}$.
כלומר $M_i$ זהה ל $M$ פרט לכך שרק אחד מהמצבים המקבלים של M הוא מקבל גם ב $M_i$.
נקבל: $L^\infty(M) = \bigcup_{i=1}^{n} L^\infty(M_i)$.

לכן $L^{\infty}(M)=\phi$ אם ורק אם לכל $i\in\{1,...,n\}$ מתקיים $L^{\infty}(M_i)=\phi$.
כלומר עשינו רדוקציה מהבעיה המקורית לבעיה שבה יש רק מצב מקבל אחד.

עבור אוטומט $M=\langle S,\Sigma,s_0,\delta,\{f\}\rangle$ בעל מצב מקבל יחיד, נגדיר אוטומט חדש:
$M^{\infty}=\langle S,\Sigma,f,\delta,\{f\}\rangle$ - כלומר זהה למקורי פרט לכך שהמצב ההתחלתי שלו הוא המצב המקבל.
נראה כי $L^{\infty}(M)\neq\phi$ אם ורק אם מתקיימים התנאים הבאים:
1. $\phi\neq L(M)\subseteq\Sigma^*$ - כלומר ניתן להגיע אל המצב המקבל מהמצב ההתחלתי.
2. $\{\varepsilon\}\neq L(M^{\infty})\subseteq\Sigma^*$ - כלומר מהמצב המקבל ניתן להגיע אל עצמו בצעד אחד לפחות.
השפות $L(M)$ ו $L(M^{\infty})$ הן שפות רגילות, של מילים סופיות.

זאת מכיוון שאם שפת המילים האינסופיות של האוטומט לא ריקה, אז עבור מילה כלשהי שהוא מקבל, הוא חייב קודם כל להגיע אל המצב המקבל (ולכן תנאי 1 מתקיים) ובנוסף הוא חייב מהמצב המקבל, להמשיך ולהגיע אל המצב המקבל שוב באמצעות לפחות צעד אחד, (ולכן תנאי 2 מתקיים).
אם שפת המילים האינסופיות של האוטומט כן ריקה, אז זה אומר שלא ניתן להגיע אל המצב המקבל (ולכן תנאי 1 לא מתקיים) או שלא ניתן מהמצב המקבל להגיע חזרה אל המצב המקבל (ולכן תנאי 2 לא מתקיים).

את בעיות 1 ו 2, קל להכריע, כפי שראינו בקורס "אוטומטים ושפות פורמאליות", למשל באמצעות הרצת אלגוריתם DFS על גרף שצמתיו הם מצבי האוטומט והקשתות שלו הן המעברים של האוטומט.

**תכונות סגירות של שפות $\omega$ רגולאריות**
**<u>משפט:</u>** שפות $\omega$ רגולאריות סגורות תחת פעולת איחוד, $\cup$.

הוכחה: תהינה $L_1^{\infty}=L^{\infty}(M_1)$, $L_2^{\infty}=L^{\infty}(M_2)$
כאשר $M_1=\langle S^1,\Sigma,s_0^1,\delta^1,F^1\rangle$, $M_2=\langle S^2,\Sigma,s_0^2,\delta^2,F^2\rangle$
צריך להוכיח שקיים אוטומט: $M=\langle S,\Sigma,s_0,\delta,F\rangle$ כך ש: $L^{\infty}(M)=L^{\infty}(M_1)\cup L^{\infty}(M_2)$.
אפשר להניח כי $S^1\cap S^2=\phi$, כלומר אין מצבים משותפים לשני האוטומטים.
נגדיר: $S'=S^1\cup S^2\cup\{s_0\}$ כאשר $s_0$ הוא מצב תחילי חדש.
$F=F^1\cup F^2$, כלומר קבוצת המצבים הסופיים היא איחוד של שתי הקבוצות המקוריות.
$$\delta=\delta^1\cup\delta^2\cup\left\{\langle s_0,\sigma,s\rangle \mid \langle s_0^1,\sigma,s\rangle\in\delta_1\vee\langle s_0^2,\sigma,s\rangle\in\delta_2\right\}$$
כלומר יחס המעבר כולל את כל המעברים המקוריים, ובנוסף מהמצב התחילי החדש ניתן להגיע לכל מקום שניתן להגיע אליו מהמצבים ההתחלתיים המקוריים.

אם $q_1q_2...$ היא הרצה (סדרת מצבים) מקבלת על אוטומט $M_i$ (עבור $i\in\{1,2\}$), על מילה $\sigma$, אזי $s_0q_2...$ היא הרצה מקבלת של M על $\sigma$. לכן $L_1^{\infty}\cup L_2^{\infty}\subseteq L^{\infty}(M)$.
אם $q_1q_2...$ היא הרצה מקבלת של M על מילה $\sigma$, אזי או ש $s_0^1q_2...$ היא הרצה מקבלת של $M_1$ או ש $s_0^2q_2...$ היא הרצה מקבלת של $M_2$. לכן $L^{\infty}(M)\subseteq L_1^{\infty}\cup L_2^{\infty}$.

**<u>הוכחה אחרת:</u>**

באמצעות אוטומט מכפלה: $M = M_1 \times M_2$

נגדיר: $S = S^1 \times S^2$ , $s_0 = \langle s_0^1 \times s_0^2 \rangle$ , $F = S^1 \times F^2 \cup F^1 \times S^2$

$\langle (u_1,u_2),\sigma,(t_1,t_2) \rangle \in \delta$ אם ורק אם $\langle u_1,\sigma,t_1 \rangle \in \delta^1$ וגם $\langle u_2,\sigma,t_2 \rangle \in \delta^2$.

אם $\sigma \in L^\infty(M_1)$ ו $q^1 = q_1^1 q_2^1 \ldots$ היא הרצה מקבלת של $M_1$ על מילה $\sigma$ ו $q^2 = q_1^2 q_2^2 \ldots$ היא הרצה כלשהי של $M_2$ על $\sigma$ אזי $q^1 \times q^2 = (q_1^1, q_1^2),(q_2^1, q_2^2)\ldots$ היא הרצה מקבלת של M על $\sigma$.

לכן $L^\infty(M) \supseteq L^\infty(M_1) \cup L^\infty(M_2)$.

אם $\sigma \in L^\infty(M)$ ו $q = (q_1^1, q_1^2),(q_2^1, q_2^2)\ldots$ היא הרצה מקבלת של M על המילה $\sigma$, אזי או ש $q^1 = q_1^1 q_2^1 \ldots$ או ש $q^2 = q_1^2 q_2^2 \ldots$ מכילה אינסוף מצבים מקבלים (של $M_1$ או של $M_2$ בהתאמה).

משום ש $q^i$ היא הרצה של $M_i$ על $\sigma$ (עבור $i \in \{1,2\}$) על פי ההגדרה של $\delta$, נקבל ש $L^\infty(M) \subseteq L^\infty(M_1) \cup L^\infty(M_2)$.

היתרון בהוכחה זו היא שאם $M_1$ ו $M_2$ הם אוטומטים דטרמיניסטיים, אזי גם $M = M_1 \times M_2$ הוא אוטומט דטרמיניסטי. לכן השפות ה $\omega$ רגולאריות **<u>הדטרמיניסטיות</u>** סגורות גם כן תחת איחוד.

**<u>משפט</u>**: השפות ה $\omega$ רגולאריות סגורות תחת פעולת חיתוך $\cap$.

הופיע במועד א', אביב התשס"ה - 2005.

הוכחה: תהינה $L_1^\infty = L^\infty(M_1)$ , $L_2^\infty = L^\infty(M_2)$

כאשר $M_1 = \langle S^1, \Sigma, s_0^1, \delta^1, F^1 \rangle$ , $M_2 = \langle S^2, \Sigma, s_0^2, \delta^2, F^2 \rangle$

נתבונן באוטומט: $M = \langle S, \Sigma, s_0, \delta, F \rangle$ כאשר:

$S = S^1 \times S^2 \times \{0,1,2\}$ (אוטומט מכפלה משולש)

$s_0 = (s_0^1, s_0^2, 0)$

$F = S^1 \times S^2 \times \{2\}$

נסמן: $\delta(s,\sigma) = \{t \mid \langle s,\sigma,t \rangle \in \delta\}$. אזי $\langle s,\sigma,t \rangle \in \delta$ אם ורק אם $t \in \delta(s,\sigma)$.

כלומר הפכנו את $\delta$ מיחס מעבר לפונקצית מעבר המחזירה את קבוצת המצבים שאפשר לעבור אליהם.

נגדיר את $\delta(\langle s_1, s_2, i \rangle, \sigma)$ באופן הבא:

אם $i = 2$ אז $\delta(\langle s_1, s_2, i \rangle, \sigma) = \delta^1(s_1,\sigma) \times \delta^2(s_2,\sigma) \times \{0\}$

אם $i = 0$ וגם $s_1 \notin F^1$ אז: $\delta(\langle s_1, s_2, i \rangle, \sigma) = \delta^1(s_1,\sigma) \times \delta^2(s_2,\sigma) \times \{0\}$

אם $i = 0$ וגם $s_1 \in F^1$ אז: $\delta(\langle s_1, s_2, i \rangle, \sigma) = \delta^1(s_1,\sigma) \times \delta^2(s_2,\sigma) \times \{1\}$

אם $i = 1$ וגם $s_2 \notin F^2$ אז: $\delta(\langle s_1, s_2, i \rangle, \sigma) = \delta^1(s_1,\sigma) \times \delta^2(s_2,\sigma) \times \{1\}$

אם $i = 1$ וגם $s_2 \in F^2$ אז: $\delta(\langle s_1, s_2, i \rangle, \sigma) = \delta^1(s_1,\sigma) \times \delta^2(s_2,\sigma) \times \{2\}$

אם $\sigma \in L^\infty(M)$ אז קיימת הרצה של M על $\sigma$ כך ש "2" מופיע בה אינסוף פעמים.

משום של- "2" אפשר לעבור רק מ 1 ע"י מצב $s_2 \in F^2$, אז קיים מצב מ $F^2$ שמופיע במקום השני של ההרצה הנ"ל אינסוף פעמים. לכן $\sigma \in L^\infty(M_2)$

משום של- "1" אפשר לעבור רק מ "0" ע"י מצב מ $s_1 \in F^1$, אז קיים מצב מ $F^1$ שמופיע במקום הראשון של ההרצה הנ"ל אינסוף פעמים. לכן $\sigma \in L^\infty(M_1)$

לכן $\sigma \in L^\infty(M_1) \cap L^\infty(M_2)$ ולכן $L^\infty(M) \subseteq L^\infty(M_1) \cap L^\infty(M_2)$.

נשים לב שלא ניתן להישאר לנצח באופן קבוע ב "2 - ברגע שמגיעים אליו, חייבים לעבור במסע הבא אל "0". לכן נהיה חייבים לעבור שוב ב $s_1 \in F^1$ ואח"כ ב $s_2 \in F^2$ על מנת להגיע ל "2" שוב.

נניח כי $\sigma \in L_1^\infty \cap L_2^\infty$ ויהיו $q^i = q_1^i q_2^i \ldots$ עבור $i \in \{1,2\}$ ההרצות המקבלות של $M^i$ על $\sigma$.

אזי: $\begin{pmatrix} q_1^1 \\ q_1^2 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q_2^1 \\ q_2^2 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q_3^1 \\ q_3^2 \\ 0 \end{pmatrix}\ldots\begin{pmatrix} q_i^1 \in F \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{pmatrix}\ldots\begin{pmatrix} \cdot \\ q_j^2 \in F \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q_i^1 \in F \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{pmatrix}\ldots\begin{pmatrix} \cdot \\ q_j^2 \in F \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ 2 \end{pmatrix}\ldots$

היא הרצה מקבלת של M על $\sigma$. לכן $L^\infty(M) \supseteq L^\infty(M_1) \cap L^\infty(M_2)$.

**<u>משפט</u>**: השפות ה $\omega$ רגולאריות סגורות תחת הומומורפיזם.

תהי $f: \Sigma \to \Gamma$ פונקציה מאלפבית $\Sigma$ אל אלפבית $\Gamma$ עבור שפה $L^\infty \subseteq \Sigma^\infty$.

נגדיר: $f(L^\infty) = \{ f(\sigma_1) f(\sigma_2) \ldots \mid \sigma_1 \sigma_2 \ldots \in L^\infty \}$.

אם $L^\infty$ היא שפה $\omega$ רגולארית, אזי $f(L^\infty)$ היא גם כן שפה $\omega$ רגולארית.

הוכחה: $L^\infty$ היא שפה $\omega$ רגולארית ולכן קיים אוטומט M כך ש $L^\infty = L^\infty(M)$.

$M = \langle S, \Sigma, s_0, \delta, F \rangle$.

נראה ש $f(L^\infty) = L^\infty(M^f)$ כאשר: $M^f = \langle S, \Gamma, s_0, \delta^f, F \rangle$:

$\delta^f = \{ \langle t, f(\sigma), u \rangle \mid \langle t, \sigma, u \rangle \in \delta \}$.

אם $q$ היא הרצה מקבלת של M על $\sigma$ אזי $q$ היא גם הרצה מקבלת של $M^f$ על $f(\sigma)$.

לכן $f(L^\infty) \subseteq L^\infty(M^f)$.

נניח כי $\gamma \in L^\infty(M^f)$ ותהי $q$ הרצה מקבלת של $M^f$ על המילה $\gamma$.

$\gamma = \gamma_1 \gamma_2 \ldots \gamma_{i-2} \gamma_{i-1} \gamma_i \gamma_{i+1} \ldots$

$q = q_1 q_2 \ldots q_{i-2} q_{i-1} q_i q_{i+1} \ldots$

$\langle q_i, \gamma_i, q_{i+1} \rangle \in \delta^f$ לכל $i \in \mathbb{N}$.

לכן, ע"פ הגדרת $\delta^f$, קיימת מילה $\sigma = \sigma_1 \sigma_2 \ldots$ כך ש $\langle q, \sigma_i, q_{i+1} \rangle \in \delta$ ו $\gamma_i = f(\sigma_i)$ לכל $i \in \mathbb{N}$.

כלומר: $\gamma = f(\sigma)$. לכן $f(L^\infty) \supseteq L^\infty(M^f)$.

**<u>משפט:</u>** השפות ה $\omega$ רגולאריות סגורות תחת "הומומורפיזם הפוך"

תהי $f:\Sigma\to\Gamma$ פונקציה מאלפבית $\Sigma$ לאלפבית $\Gamma$ ותהי $L^\infty\subseteq\Gamma^\infty$.

נגדיר: $f^{-1}\left(L^\infty\right)=\left\{\sigma\in\Sigma^\infty \mid f\left(\sigma\right)\in L^\infty\right\}$.

אם $L^\infty$ שפה $\omega$ רגולארית, אזי $f^{-1}\left(L^\infty\right)$ גם כן שפה $\omega$ רגולארית.

הוכחה: נבנה אוטומט באופן דומה לאוטומט מההוכחה הקודמת.

$L^\infty=L^\infty\left(M\right)$ כאשר $M=\left\langle S,\Gamma,s_0,\delta,F\right\rangle$.

נבנה את $M^{f^{-1}}$ באופן הבא: $\delta^{f^{-1}}=\left\{\left\langle s,\sigma,t\right\rangle \mid \left\langle s,f\left(\sigma\right),t\right\rangle\in\delta\right\}$

אם $f\left(\sigma\right)=\gamma\in L^\infty$ ו $q$ היא הרצה של $M$ על $\gamma$, אזי ע"פ ההגדרה של $\delta^{f^{-1}}$, $q$ היא גם הרצה של $M^{f^{-1}}$ על $\sigma$. לכן $f^{-1}\left(L^\infty\right)\subseteq L^\infty\left(M^{f^{-1}}\right)$.

תהי $\sigma\in L^\infty\left(M^{f^{-1}}\right)$ ותהי $q$ הרצה של $M^{f^{-1}}$ על $\sigma$:

$$\sigma=\sigma_1\sigma_2...\sigma_{i-2}\sigma_{i-1}\sigma_i\sigma_{i+1}...$$

$$q=q_1q_2...q_{i-2}q_{i-1}q_iq_{i+1}...$$

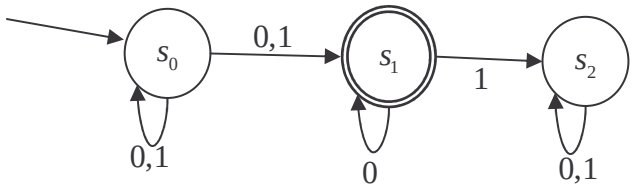
אזי:

$\left\langle q_i,f\left(\sigma_i\right),q_{i+1}\right\rangle\in\delta$ לכל $i\in\mathbb{N}$.. לכן $q$ היא הרצה של M על $f\left(\sigma\right)$.

לכן $f\left(\sigma\right)\in L^\infty$, כלומר: $f^{-1}\left(L^\infty\right)\supseteq L^\infty\left(M^{f^{-1}}\right)$

מדוע אי אפשר לבנות אוטומט חזקה על מנת להחליף אוטומט *Büchi* אי דטרמיניסטי באוטומט דטרמיניסטי?

נסתכל לדוגמה על האוטומט:

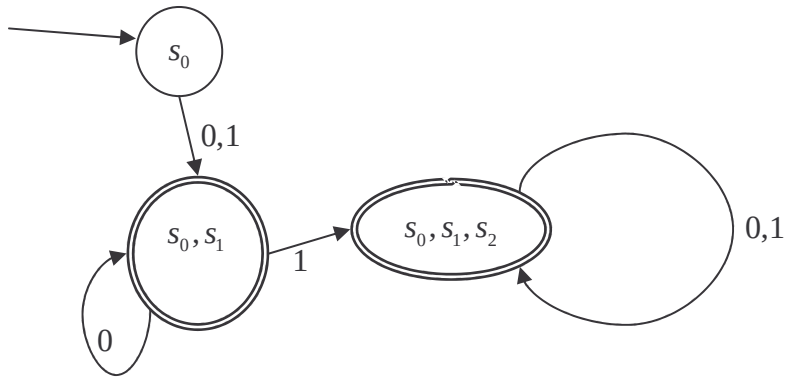



המכיל את כל המילים שיש בהן מספר סופי של "1"-ים.
הבניה אמורה להיות כך:
אם $M=\langle S,\Sigma,s_0,\delta,F\rangle$ - אוטומט אי דטרמיניסטי, אז
$M^D=\langle S^D=2^S,\Sigma,\{s_0\},\delta^D,F^D\rangle$ כך ש:
$\delta^D:(2^Q\times\sigma)\to 2^Q$ מוגדרת באופן הבא:
$\delta^D(X,\sigma)=Y$ כך ש: $y\in Y$ אם קיים $x\in X$ כך ש $y\in\delta(\sigma,x)$
$F^D=\{X\in 2^Q \mid \exists x\in X\cap F\}$

לכן האוטומט שיתקבל במקום האוטומט הנתון יהיה:
$S^D=\{\phi,\{s_0\},\{s_1\},\{s_2\},\{s_0,s_1\},\{s_0,s_2\},\{s_1,s_2\},\{s_0,s_1,s_2\}\}$
$F^D=\{\{s_1\},\{s_0,s_1\},\{s_1,s_2\},\{s_0,s_1,s_2\}\}$

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $\phi$ | $\{s_0\}$ | $\{s_1\}$ | $\{s_2\}$ | $\{s_0,s_1\}$ | $\{s_0,s_2\}$ | $\{s_1,s_2\}$ | $\{s_0,s_1,s_2\}$ |
| $\delta^D$: | 0 | $\phi$ | $\{s_0,s_1\}$ | $\{s_1\}$ | $\{s_2\}$ | $\{s_0,s_1\}$ | $\{s_0,s_1,s_2\}$ | $\{s_1,s_2\}$ | $\{s_0,s_1,s_2\}$ |
| | 1 | $\phi$ | $\{s_0,s_1\}$ | $\{s_2\}$ | $\{s_2\}$ | $\{s_0,s_1,s_2\}$ | $\{s_0,s_1,s_2\}$ | $\{s_2\}$ | $\{s_0,s_1,s_2\}$ |

כלומר, לאחר מחיקת כל המצבים שלא ניתן להגיע אליהם נקבל את האוטומט הבא:




והאוטומט הזה מקבל כמובן, את כל המילים האינסופיות, ובפרט כאלו שיש בהן אינסוף "1"-ים.

הבעיה העקרונית היא שאם ניתן להגיע באוטומט המקורי למצב מקבל תוך כל מספר סופי של צעדים, זה עדין לא אומר שקיים מסלול שבו עוברים אינסוף פעמים במצב מקבל. אם יש אכן מצב כזה, אז באוטומט הדטרמיניסטי תופיע בו לולאה עצמית, ולכן נקבל מילים שלא היינו אמורים לקבל.

$L=\left\{w\in\{0,1,2\}\mid \exists n:(w)_3=2^n\right\}$ כלומר אוסף כל המילים בבסיס 3 שהן חזקות של 2.
$L$ לא שפה רגולארית.

הוכחה - נניח ש L כן רגולארית, ולכן קיים $n\in\mathbb{N}$ כך שלכל מילה $z$ באורך גדול מ $n$ קיים לה פירוק $z=uvw$ כך שלכל $i\in\mathbb{N}$ המילה $uv^iw$ שייכת ל L.
נסתכל על המילה $z=uvw\in L$ הראשונה שאורכה גדול מ $n$ (חייבת להיות כזאת כי יש אינסוף מספרים שהם חזקות של 2).
נגדיר: $r_i=uv^iw\in L$ , $r_{i+1}=uv^{i+1}w\in L$.

$$r_{i+1}-r_i=uv\cdot 3^{i|v|+|w|}-u\cdot 3^{i|v|+|w|}=(uv-u)\cdot 3^{i|v|+w}$$

מסקנה: $r_{i+1}-r_i$ הוא כפולה של $3^{i|v|+|w|}$.
מצד שני: $r_{i+1}$ ו $r_i$ הם חזקות של 2, כלומר: $r_{i+1}=2^{m+k}$ ו $r_i=2^k$. לכן $r_{i+1}-r_i=2^k\left(2^m-1\right)$.
מכיוון ש $2^k$ הוא לא כפולה של $3^{i|v|+|w|}$, האפשרות היחידה היא ש $2^m-1$ הוא כפולה של $3^{i|v|+|w|}$.
כלומר: $2^m-1=c\cdot 3^{i|v|+|w|}$.
לכן $2^m>c\cdot 3^{i|v|+|w|}$.
בנוסף $\frac{r_{i+1}}{r_i}=\frac{2^{m+k}}{2^k}=2^m$. ההפרש בין החזקות של $r_{i+1}$ ו $r_i$ חסום, מכיוון ש $r_{i+1}$ מכיל לכל היותר $n$ ספרות יותר מ $r_i$. לכן קיבלנו שמשהו חסום $\left(2^m\right)$ גדול יותר ממשהו לא חסום - $c\cdot 3^{i|v|+|w|}$. וזוהי כמובן סתירה.

לכן השפה L לא מקיימת את למת הניפוח לשפות רגולאריות, ולכן היא לא שפה רגולארית. (באופן דומה, ניתן להוכיח שהיא גם לא חסרת הקשר).