תזכורת: BDD - גרף מכוון חסר מעגלים בעל שורש יחיד ושני סוגים של צמתים:

1. עלים - בכל עלה v יש ערך $val(v) \in \{0,1\}$
2. צומת פנימי (=שאינו עלה) v שיש לו שני בנים. נסמנם ב $low(v) = F, high(v) = T$.

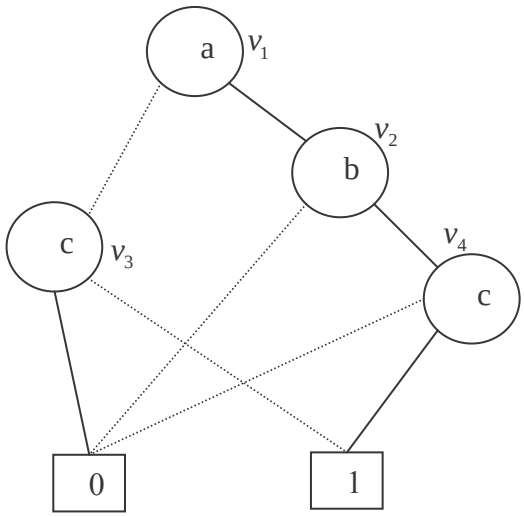
תכונות נוספת של הגרף:

1. בכל מסלול (מכוון) מהשורש לעלה כל משתנה יופיע לכל היותר פעם אחת.
2. כל המסלולים עקביים עם אותו סדר משתנים. כלומר לא יתכן שיהיו שני מסלולים כך שבראשון v_1 מופיע לפני v_2 ובשני v_2 מופיע לפני v_1.
3. תנאי הצמצום - אין צמתים מיותרים או תתי גרף איזומורפיים.

$ROBDD$ – Reduced Ordered BDD:

בהינתן שתי פונקציות בוליאניות $f_1(x_1,...,x_n)$ ו $f_2(x_1,...,x_n)$

$f_1(x_1,...,x_n) \equiv f_2(x_1,...,x_n)$ אם ורק אם ה $ROBDD$ שלהן זהה תחת סדר משתנים נתון. (קנוניות).



כיצד נדע מהי הפונקציה של העץ הזה? נבצע זאת באמצעות סכום מכפלות של המסלולים שמגיעים מהשורש ל "1".

$$f_v = (a \wedge b \wedge c) \vee (\neg a \wedge \neg c)$$

נגדיר את הפונקציה בצורה רקורסיבית:

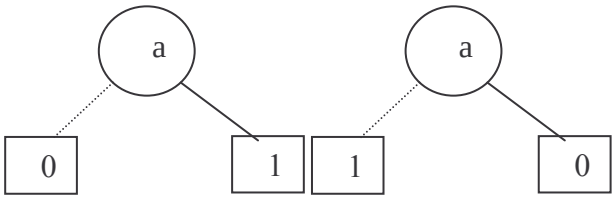
$$f_v(x_1,...,x_n) = \left(\neg x_1 \wedge f_{low(v)}(x_2,...,x_n)\right) \vee \left(x_1 \wedge f_{high(v)}(x_2,...,x_n)\right)$$

בדוגמה:

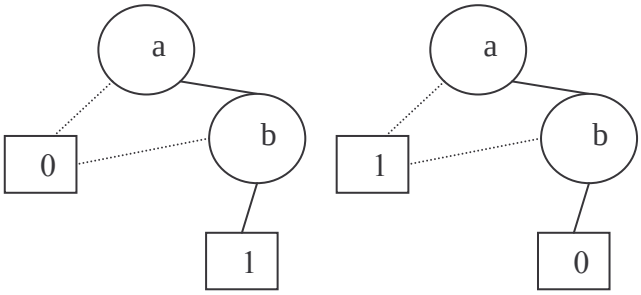
$$f_{v_1}(a,b,c) = \left(\neg a \wedge f_{v_3}(b,c)\right) \vee \left(a \wedge f_{v_3}(b,c)\right)$$
$$= \left((\neg a) \wedge \left((\neg c \wedge 1) \vee (c \wedge 0)\right)\right) \vee \left(a \wedge \left((\neg b \wedge 0) \vee \left(b \wedge f_{v_4}(c)\right)\right)\right) = ...$$

דוגמאות:

$f(a)=a$ $\qquad$ $f(a)=\neg a$

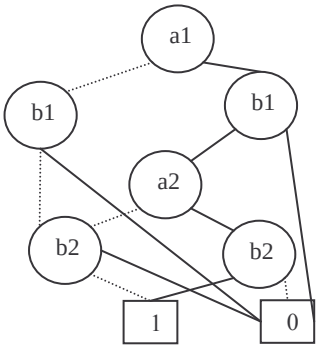


$f(a)=a\wedge b$ $\qquad$ $f(a)=\neg(a\wedge b)$



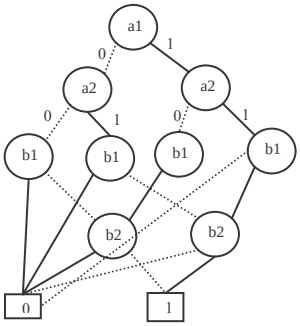
השפעת סדר המשתנים:

$f(a_1,b_1,a_2,b_2)=(a_1\leftrightarrow b_1)\wedge(a_2\leftrightarrow b_2)$ כאשר סדר המשתנים הוא: a_1,b_1,a_2,b_2:



במקרה הכללי: $f(a_1,b_1,...,a_n,b_n)=(a_n\leftrightarrow b_n)\wedge...\wedge(a_n\leftrightarrow b_n)$

מתקבל BDD בגודל $3n+2$.

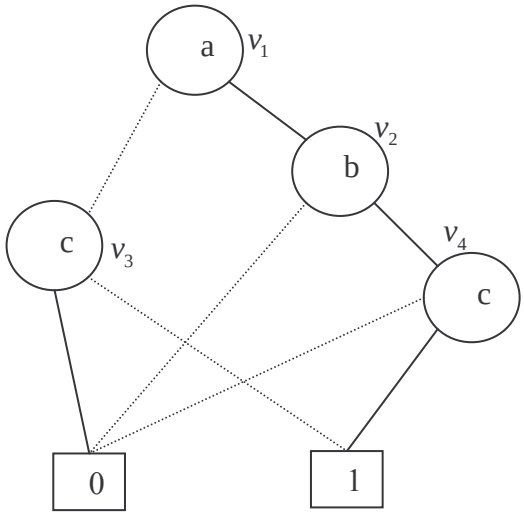


ננסה כעת את הסדר: a_1,a_2,b_1,b_2

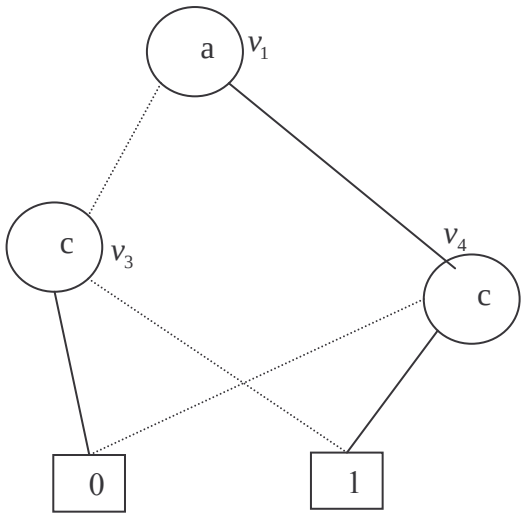
במקרה הכללי עבור הסדר: $a_1,a_2...a_n,b_1,b_2,...,b_n$ יתקבל BDD עם $3\cdot 2^n-1$ צמתים.

מהו הסדר היעיל ביותר? (זאת אומרת, הסדר שבו נקבל הכי מעט צמתים)?
מציאת הסדר היעיל ביותר היא בעיה קשה (NP).

בהינתן BDD: $f_v(x_1,...,x_n)$
נסמן: $f_v|_{x_i=b}(x_1,...,x_i,x_{i+1},...,x_n)$ כאשר $b\in\{0,1\}$ את הפונקציה f_v כאשר $x_i=b$.



$f|_{b=1}$



נבנה את ה BDD ל $f|_{x_i=b}$ ע"י הפניה של כל הקשתות הנכנסות ל v כך ש $\mathrm{var}(v)=x_i$ אל $low(v)$ אם $b=0$ ואל $high(v)$ אם $b=1$.

Apply

בהינתן שני BDD, f, f', נרצה לחשב את ה BDD של $f \circ f'$ כאשר $\circ$ הוא אחת מ 16 הפונקציות הבינאריות. v, v' הם השורשים של f, f' בהתאמה.

נסתמך על "הרחבת *shonon*" (shonon expansion):

$$f = \left(\neg x \wedge f|_{x=0}\right) \vee \left(x \wedge f_{|x=1}\right)$$

Apply עובדת לפי ארבעה מקרים שונים.

1. אם v, v' הם עלים אז $f \circ f' = val(v) \circ val(v')$
2. אם $\mathrm{var}(v) = \mathrm{var}(v') = x$ אז $f \circ f' = \left(\neg x \wedge \left(f|_{x=0} \circ f'|_{x=0}\right)\right) \vee \left(x \wedge \left(f|_{x=1} \circ f'|_{x=1}\right)\right)$
3. אם $x = \mathrm{var}(v) < \mathrm{var}(v')$ כאשר היחס '$<$' מוגדר על סדר נתון,

(כלומר $\mathrm{var}(v)$ לא מופיע ב f') אז: $f \circ f' = \left(\neg x \wedge \left(f|_{x=0} \circ f'|\right)\right) \vee \left(x \wedge \left(f|_{x=1} \circ f'\right)\right)$