<u>תזכורת</u>
מודל מ"ט
התזה של צ'רצ'
מ"ט אוניברסאלית
- קידודים
בעיות הכרעה / שפות
מ"ט לזיהוי שפות $F = \{q_A, q_R\}$
מחלקות של שפות

המחלקה	$q_A, x \in L$	$q_R, x \notin L$
R	עוצר	עוצר
RE	עוצר	?
CO-RE	?	עוצר

<u>טענה:</u> $RE \cap CO-RE = R$
<u>הוכחה:</u> כיוון ראשון $\supseteq$:
ברור ש R מוכל ב RE וגם ב $CO-RE$ ע"פ ההגדרה ולכן הוא מוכל בחיתוך.
כיוון שני: $\subseteq$:
נתונה שפה $L \in RE \cap CO-RE$ וצ"ל $L \in R$.
$L \in RE$ ולכן קיימת מ"ט M_1 שעוצרת לכל קלט $x \in L$ ובנוסף אם עוצרת: $x \in L \Leftarrow$ עוצרת ב q_A, $x \notin L \Leftarrow$ עוצרת ב q_R.
$L \in CO-RE$ ולכן קיימת מ"ט M_2 שעוצרת לכל קלט $x \notin L$ ובנוסף אם עוצרת: $x \in L \Leftarrow$ עוצרת ב q_A, $x \notin L \Leftarrow$ עוצרת ב q_R.
נבנה מכונת טיורינג M שתעצור תמיד ותכריע את L:
על קלט x, נריץ במקביל את M_1 על x ואת M_2 על x. אם אחת מהן עוצרת, עונים כמוה.
<u>נכונות:</u> M_1, M_2 לשתיהן אם הן עוצרות הפלט נכון.
<u>עצירה:</u> $x \in L$ מבטיח ש M_1 עוצרת (אולי גם M_2)
$x \notin L$ מבטיח ש M_2 עוצרת.
לכן בכל מקרה M עוצרת. מש"ל.

דוגמאות לשפות ב RE:
- כל השפות ב R שייכות גם ל RE.
- $halting-problem = HP \triangleq \{\langle M\rangle, \langle x\rangle \mid x$ עוצרת על $M\}$
- $Lu \triangleq \{\langle M\rangle, \langle x\rangle \mid x$ מקבלת את $M\}$ = השפה האוניברסאלית
- $L_D \triangleq \{\langle M\rangle \mid \langle M\rangle \in L(M)\}$ = שפת האלכסון

<u>טענה:</u> $HP, Lu, L_D \in RE$.
<u>הוכחה:</u>
1. HP: נתאר מ"ט M_{HP} שעל קלט $\langle M\rangle, \langle x\rangle$ מקבלת אותו אם ורק אם M עוצרת על x.
נסמלץ את ריצת M על x (כמו בבניית מ"ט אוניברסאלית).
בכל צעד, אם הקונפיגורציה הנוכחית היא קונפיגורציה סופית (לא משנה אם זהו מצב מקבל או מצב דוחה), עצור וקבל. אחרת המשך.
<u>נכונות:</u> נסתכל על שני סוגי הקלטים האפשריים:

- $\langle M\rangle,\langle x\rangle \in HP$ - ע"פ הגדרת HP, M עוצרת על x, ולכן ע"פ הבניה, M_{HP} תגיע לקונפיגורציה סופית במהלך הסימולציה ולכן ע"פ הבניה M_{HP} עוצרת ומקבלת.
- $\langle M\rangle,\langle x\rangle \notin HP$ - ע"פ הגדרת HP, M עוצרת לא על x, ולכן ע"פ הבניה, M_{HP} לא תגיע לקונפיגורציה סופית במהלך הסימולציה ולכן ע"פ הבניה M_{HP} לא עוצרת ובפרט לא מקבלת.

2. Lu: נבנה את המכונה באופן דומה ל M_{HP} פרט להבדל שאם מגיעים לקונפיגורציה סופית, מחליטים ע"פ המצב בקונפיגורציה זו (דוחה או מקבל) האם לדחות או לקבל את הקלט.

3. L_D: נבצע סימולציה של הרצת המכונה M על הקלט שמהווה את המחרוזת הבינארית $\langle M\rangle$. אם הסימולציה מסתיימת, נענה כמוה.
דרך אלטרנטיבית: ראינו מכונה M_{Lu} עבור Lu. נבנה באמצעותה את המכונה M_{L_D}: נשכפל את הקלט של M_{L_D}, וניתן אותו כקלט למכונה M_{Lu} ואם היא תעצור, ניתן את הפלט שלה.

<u>רדוקציה:</u>
דוגמה מאלגוריתמים: למצוא את גודל השידוך המקסימאלי בגרף דו צדדי. במקום לפתור את הבעיה הזו מההתחלה, נמיר אותה לבעיית מציאת זרימה מקסימאלית באמצעות הוספת מקור ובור, וקשתות מהמקור אל כל הצמתים שבצד שמאל של השידוך, וקשתות מכל הצמתים שבצד ימין של השידוך אל הבור, כאשר הקיבולת של כל קשת היא 1, ונחפש זרימה מקסימאלית מהמקור אל הבור.

רדוקציה = המרת הקלט מבעיה אחת לקלט של בעיה שניה.

<u>הגדרה:</u> (רדוקציה)
נתונות שתי שפות $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$.
פונקציה $f:\Sigma^* \to \Sigma^*$ נקראת רדוקציה מ L_1 אל L_2 אם:
1. f פונקציה מלאה - לכל $x \in \Sigma^*$ מוגדר $f(x)$
2. f ניתנת לחישוב.
3. (תקפות) $x \in L_1 \Leftrightarrow f(x) \in L_2$.

אם קיימת f כנ"ל, נאמר ש L_1 ניתנת לרדוקציה ל L_2 ומסמנים $L_1 \le L_2$.

<u>דוגמאות:</u>
1. טענה: $L_D \le Lu$

<u>הוכחה:</u> נתאר f כנדרש: $f(\langle M\rangle)=(\langle M\rangle,\langle M\rangle)$
1. f מלאה (כל מחרוזת היא קידוד של מ"ט)
2. f ניתנת לחישוב.
3. תקפות: $\langle M\rangle \in L_D$ ע"פ הגדרת L_D מתקיים אמ"מ $\langle M\rangle \in L(M)$ וזה מתקיים אמ"מ $\langle M\rangle,\langle M\rangle \in Lu$ ומהבניה $f(\langle M\rangle)=(\langle M\rangle,\langle M\rangle)$.

2. טענה: $Lu \le HP$

<u>הוכחה:</u> נתאר f כנדרש: $f(\langle M\rangle,\langle x\rangle)=(\langle A\rangle,\langle x\rangle)$ כאשר A על קלט x עובדת כמו M למעט אם M עומד להיכנס למצב q_R אז A תיכנס למצב q_∞ בו יש לולאה אינסופית.
f מקיימת את הדרישות מהרדוקציה:

1. f מלאה (כל קלט לגיטימי).
2. f ניתנת לחישוב - "פעולות קומפילציה"
3. תקפות $\langle M\rangle,\langle x\rangle \in Lu \underbrace{\Leftrightarrow}_{**} M$ מקבלת את $x \underbrace{\Leftrightarrow}_{*} A$ עוצרת על $x \underbrace{\Leftrightarrow}_{***} \langle A\rangle,\langle x\rangle \in HP$

* - על פי הבניה.
,* - על פי הגדרת השפות.

תכונות של רדוקציות:
$L \le L$ (באמצעות פונקצית הזהות $f(x)=x$)

$L_1 \le L_3 \Leftarrow L_1 \le L_2, L_2 \le L_3$ (טרנזיטיביות)
הוכחה: $L_1 \le L_2 \Leftarrow$ קיימת f המהווה רדוקציה מ L_1 אל L_2
$L_2 \le L_3 \Leftarrow$ קיימת g המהווה רדוקציה מ L_2 אל L_3
כדי להוכיח $L_1 \le L_3$ נתאר פונקציה כנדרש: $h(x)=g(f(x))$.
h היא מלאה וניתנת לחישוב כי כך הן f,g.
h תקפה כי $x \in L_1 \underbrace{\Leftrightarrow}_{*} f(x) \in L_2 \underbrace{\Leftrightarrow}_{**} g(f(x)) \in L_3$
* - מתקפות f ** - מתקפות g

$\overline{L}_1 \le \overline{L}_2 \Leftarrow L_1 \le L_2$ (נשתמש באותה פונקציה f).

קיבלנו ש
$$L_D \le Lu \le HP$$
$$\overline{L}_D \le \overline{L}u \le \overline{H}P$$

משפט הרדוקציה (נוסח א'):
נניח ש $L_1 \le L_2$
$L_1 \in R \Leftarrow L_2 \in R$
$L_1 \in RE \Leftarrow L_2 \in RE$ (הקושי של L_1 חסום ע"י הקושי של L_2)
$L_1 \in CO-RE \Leftarrow L_2 \in CO-RE$
הוכחה:
$L_1 \le L_2 \Leftarrow$ קיימת פונקצית רדוקציה f וקיימת מ"ט M_f שמחשבת את f.
<u>1.</u> $L_2 \in R \Leftarrow$ קיימת מ"ט M_2 שמכריעה את L_2.
צ"ל: קיימת M_1 שמכריעה את L_1. נבנה אותה באופן הבא: ניקח את הקלט x, נפעיל עליו את M_f ואת הפלט שיתקבל, $f(x)$, נריץ על M_2, הפלט של M_2 על $f(x)$ יהיה הפלט של M_1 על x.
מתקיים ש M_1 עוצרת תמיד כי
1. M_f עוצרת כי f מלאה ו M_f מחשבת את f.
2. M_2 עוצרת כי M_2 מכריעה את L_2.
הוכחה ש $L(M_1)=L_1$:
מתקפות f נקבל ש $x \in L_1 \Leftrightarrow f(x) \in L_2$ ולכן M_1 מקבלת כל $x \in L_1$ ודוחה כל $x \notin L_1$.

<u>2.</u> $L_2 \in RE \Leftarrow$ קיימת מ"ט M_2 המקבלת את L_2

צ"ל: קיימת M_1 שמקבלת את L_1. נבנה אותה באופן הבא: ניקח את הקלט x, נפעיל עליו את M_f ואת הפלט שיתקבל, $f(x)$, נריץ על M_2, הפלט של M_2 על $f(x)$ יהיה הפלט של M_1 על x.
התכונות דומות למעט ההבדל שאם $x \notin L_1$ אז $f(x) \notin L_2$ ולכן M_2 לא בהכרח עוצרת על $f(x)$, ולכן על פי הבניה של M_1 היא לא בהכרח עוצרת על x

.3 $$L_1 \in CO-RE \Leftarrow \overline{L_1} \in RE \Leftarrow \begin{cases} \overline{L_1} \le \overline{L_2} \Leftarrow L_1 \le L_2 \\ \overline{L_2} \in RE \Leftarrow L_2 \in CO-RE \end{cases}$$

שפות שאינן ב R (ושפות שאינן ב RE)
טיעון ספירה: קיימות שפות שאינן ב RE ולכן בוודאי שאינן ב R:
$|RE| \underset{*}{\le}$ |קבוצת כל מ"ט| $\underset{**}{\le}$ |קבוצת כל המחרוזות הבינאריות| $\underset{***}{\le}$ |קבוצת כל השפות מעל $\Sigma = \{0,1\}$|

* - כל שפה ב RE - ניתן לבנות לה מכונה.
** - כל מכונה - ניתן לתאר באמצעות מחרוזת בינארית סופית.
*** - הוכח בתרגול הראשון.

טענה: $L_D \notin R$ (הוכחה בשבוע הבא).

משפט הרדוקציה (נוסח ב'): אם $L_1 \le L_2$ אז:
$$L_2 \notin R \Leftarrow L_1 \notin R$$
$$L_2 \notin RE \Leftarrow L_1 \notin RE$$
$$L_2 \notin CO-RE \Leftarrow L_1 \notin CO-RE$$

ממשפט הרדוקציה והטענה $L_D \notin R$ והרדוקציה מ L_D אל Lu, HP נקבל שגם $Lu, HP \notin R$.
גם $\overline{L_D}\overline{Lu}, \overline{HP} \notin R$ כי $L \in R \Leftrightarrow \overline{L} \in R$