<u>תזכורת:</u>

הוכחת טענות מהצורה $L \notin R$

- הוכחה ישירה $\left(\overline{L}_D\right)$
- רדוקציות $L \notin R \Leftarrow \begin{cases} L' \notin R \\ L' \le L \end{cases}$
- משפטים כלליים

(RICE: $L_S = \left\{\langle M \rangle \mid L(M) = S\right\}$). אם S תכונה לא טריוויאלית אז $L_S \notin R$)

הוכחת טענוה מהצורה $L \notin RE$:

- הוכחה ישירה: $\left(\overline{L}_D\right)$
- $L \notin RE \Leftarrow \begin{cases} L \notin R \\ \overline{L} \in RE \end{cases}$ $\left(\overline{HP}, \overline{L}_u \notin RE\right)$

דוגמה: $L_\phi = \left\{\langle M \rangle \mid L(M) = \phi\right\}$ שפת כל קידודי המכונות שהשפה שהן מקבלות היא שפה ריקה.

טענה: $L_\phi \notin RE$

הוכחה:

א. $L_\phi \notin R$

(משפט $RICE$ עם התכונה $S = \{\phi\}$

ב. $\overline{L}_\phi = \left\{\langle M \rangle \mid L(M) \ne \phi\right\} \in RE$

נבנה מכונת טיורינג שמזהה אותה: M_ϕ על קלט $\langle M \rangle$ רצה באופן הבא ("הרצה מבוקרת")

עובד באיטרציות: $i = 1, 2, 3, \ldots$

באיטרציה ה i נריץ את המכונה M על i המילים הראשונות ע"פ הסדר הלקסיקוגראפי, על כל אחת מהן למשך i צעדים.

אם M קיבלה את אחת מהמילים לפחות באיטרציה, אז עצור וקבל.

<u>נכונות:</u>

נניח $L(M) = \phi \Leftarrow$ M_ϕ לא עוצרת על קלט $\langle M \rangle \Leftarrow \langle M \rangle \notin L(M_\phi)$

נניח $L(M) \ne \phi \Leftarrow$ קיים $w \in L(M)$. אז קיימים k, j כך ש: M מקבלת את x לאחר i צעדים ו x היא המילה ה j בסדר הלקסיקוגרפי. נגדיר: $l \triangleq \max\{k, j\}$

כל איטרציה היא סופית כי יש בה בסך הכל סימולציה של חישוב במספר צעדים סופי עבור מספר סופי של מילים.

אם לא הגענו לאיטרציה ה $l \Leftarrow M_\phi$ קיבלה קודם.

נתבונן באיטרציה ה l: w היא אחת המילים הנבדקות $(l \ge j)$ ומריצים את M על w מספיק צעדים כדי לגלות ש M מקבלת $(l \ge k)$. לכן בכל מקרה M_ϕ עוצרת ומקבלת.

$\Leftarrow \langle M \rangle \in L(M_\phi)$

$\Leftarrow L(M_\phi) = \overline{L}_\phi$

משפט הרדוקציה:

$$L \notin RE \Leftarrow \begin{cases} L' \notin RE \\ L' \le L \end{cases}$$

דוגמה: $L_{\Sigma^*} = \{\langle M \rangle \mid L(M) = \Sigma^*\}$

טענה: $L_{\Sigma^*} \notin RE \cup CO-RE$ (שקול לטענה: $L_{\Sigma^*}, \overline{L}_{\Sigma^*} \notin RE$)

הוכחה:

ראינו ש $L_{\Sigma^*} \notin R$ ע"י רדוקציה: $HP \le L_{\Sigma^*}$

$\Leftarrow \overline{H}P \le \overline{L}_{\Sigma^*}$. בנוסף ידוע ש $\overline{H}P \notin RE$

$\Leftarrow \overline{L}_{\Sigma^*} \notin RE$

צ"ל: $\overline{H}P \le L_{\Sigma^*}$ (שקול ל: $HP \le \overline{L}_{\Sigma^*}$)

$$f(\langle M \rangle, \langle x \rangle) = \langle M_x \rangle$$

התקפות המבוקשת:

$$\langle M \rangle, \langle x \rangle \in \overline{H}P \Leftrightarrow \langle M_x \rangle \in L_{\Sigma^*} = \left(L(M_x) = \Sigma^*\right) = (M \text{ לא עוצרת על } x)$$

M_x על קלט w תרוץ באופן הבא:

1. הרץ את M על x למשך $|w|$ צעדים.
2. אם M לא עוצרת על x תוך $|w|$ צעדים, עצור וקבל. אחרת דחה.

אם M לא עוצרת על x אז $L(M_x) = \Sigma^*$

אם M עוצרת על x אז קיים k כך שהיא עוצרת על x לאחר k צעדים. לכן

$$L(M_x) = \{w \mid |w| < k\}$$

דוגמה: $L_{EQ} = \{\langle M_1 \rangle, \langle M_2 \rangle \mid L(M_1) = L(M_2)\}$

$$L_{EQ}, \overline{L}_{EQ} \notin RE$$

$$L_{EQ} \notin RE \Leftarrow \begin{cases} L_{\Sigma^*} \le L_{EQ} \\ L_{\Sigma^*} \notin RE \end{cases}$$

$$\overline{L}_{EQ} \notin RE \Leftarrow \begin{cases} \overline{L}_{\Sigma^*} \le \overline{L}_{EQ} \\ \overline{L}_{\Sigma^*} \notin RE \end{cases}$$

<u>משפטים כלליים:</u>

משפט RICE לשפות RE (נוסח חלש):

תהי S תכונה לא טריוויאלית של שפות RE כך ש $\phi \in S$ (כלומר השפה הריקה מקיימת את S)

אזי $L_S \notin RE$

הערות:

$\overline{L}_\phi \in RE \Leftarrow$ תנאי נוסף הכרחי

$L_{\Sigma^*, \overline{L}_\Sigma} \notin RE \Leftarrow$ הנוסח החלש איננו אפיון.

<u>הוכחה:</u> נתבונן בתכונה $\bar{S}$ - לא טריוויאלית כי $\phi \notin \bar{S}$.

$\Leftarrow *$ $HP \le L_{\bar{S}}$

$\Leftarrow$ $\bar{H}P \le \bar{L}_{\bar{S}} = L_S$

$\Leftarrow **$ $L_S \notin RE$. מש"ל

* (הוכחת משפט RICE מקרה א')

** $\left(\bar{H}P \notin RE\right)$

עד עכשיו התעסקנו ב<u>בעיות הכרעה</u> = שפות

כעת נעבור להתעסק ב<u>פונקציות</u>

<u>תזכורת</u>: פונקציה $f:\Sigma^* \to \Sigma^*$ (מלאה או חלקית) נקראת ניתנת לחישוב אם קיימת מ"ט M_f כך ש $f_{M_f} = f$ (זאת אומרת שהפונקציה שמכונת הטיורינג M_f מחשבת היא הפונקציה f)

<u>משפט</u>: בהיתן $f:\Sigma^* \to \Sigma^*$ תהי $L_f \triangleq \{(x,y) \mid f(x) = y\}$

1. f ניתנת לחישוב אם ורק אם $L_f \in RE$.
2. עבור f פונקציה מלאה (כלומר לכל x קיים y כך ש $y = f(x)$), f ניתנת לחישוב אם ורק אם $L_f \in R$.

<u>הוכחה</u>:

1+2 כיוון $\Leftarrow$

אם f ניתנת לחישוב אז קיימת מ"ט M_f המחשבת אותה.

נבנה מ"ט M עבור השפה L_f.

M על קלט (x,y):

1. חשב את $f(x)$ ע"י הרצת M_f על x. הפלט יקרא $f(x)$.
2. השווה את $f(x)$ ל y - קבל אם הם שווים ודחה אם הם שונים.

<u>נכונות</u>:

$(x,y) \in L_f \Leftarrow y = f(x)$, בפרט M_f על קלט x עוצרת עם הפלט המבוקש $f(x)$.

$(x,y) \in L_f \Leftarrow f(x)$ לא מוגדר או שונה מ y

אם $f(x)$ לא מוגדר אז M_f לא עוצרת ולכן גם M לא עוצרת.

אם $f(x)$ מוגדר אבל שונה מ y אז M_f עוצרת ומחזירה $f(x)$ ולכן M עוצרת ודוחה.

לכן $L(M) = L_f$, בנוסף, אם f מלאה אז M עוצרת תמיד.

2 כיוון $\Rightarrow$

$L_f \in R \Leftarrow L_f \in RE \Leftarrow f$ ניתנת לחישוב.

M_f: בהינתן x עוברת על y-ים לפי סדר לקסיקוגרפי ובודקת האם $(x,y) \in L_f$ ע"י המכונה המובטחת.

(דוגמה: קיימת f לא מלאה שעבורה $f: L_f \in R$ שלא מוגדרת לשום קלט: $L_f = \phi \in R$)

1 כיוון $\Rightarrow$

$L_f \in RE \Leftarrow$ קיימת מ"ט M המזהה זוגות $(x, y) \in L_f$

נבנה M_f שבהינתן x מוצאת את $f(x)$

באיטרציה ה i - בדוק ל i המחרוזות y הראשונות בסדר לקסיקוגרפי האם M מקבלת את (x, y) תוך לכל היותר i צעדים. אם כן עצור עם y בפלט.

דוגמה:

$f(\langle M \rangle) = |L(M)|$ אם $L(M)$ סופית, ואחרת לא מוגדרת.

טענה: f לא ניתנת לחישוב

הוכחה 1: (ללא המשפט)

נניח בשלילה ש f ניתנת לחישוב ע"י המ"ט M_f

נבנה מ"ט M_ϕ עבור השפה L_ϕ.

M_ϕ על קלט $\langle M \rangle$:

1. חשב את $f(\langle M \rangle)$ ע"י הפעלת M_f.

2. השווה את הפלט ל 0. אם שווים - קבל, אחרת דחה.

נכונות M_ϕ:

$\langle M \rangle \in L_\phi \Rightarrow L(M) = \phi \Rightarrow |L(M)| = 0 \Rightarrow M_f$ עוצרת ומקבלת.

$\langle M \rangle \notin L_\phi \Rightarrow L(M) \neq \phi \Rightarrow$

או ש $|L(M)| = \infty$ ואז M_f לא עוצרת

או ש $|L(M)| = k \neq 0$ ואז M_f עוצרת ודוחה.

לכן $L(M_\phi) = L_\phi$ ולכן $L_\phi \in RE$ בסתירה למה שידוע לנו. לכן לא קיימת M_f.

הוכחה 2: (על פי המשפט):

מספיק להוכיח: $L_f = \{\langle M \rangle, k \mid k = |L(M)|\} \notin RE$

אז מספיק להוכיח: $L_\phi \leq L_f$:

נוכיח באמצעות הרדוקציה: $f(\langle M \rangle) = (\langle M \rangle, 0)$