<u>התמודדות עם בעיות NP שלמות (ובעיות קשות אחרות)</u>

1. <u>אלגוריתמי קירוב:</u>

<u>כיסוי בצמתים:</u> {קיים כיסוי בצמתים בגודל K עבור הגרף G| $L_{VC}=\{(G,k)$. שפה זו שייכת ל NPC .

ה k הקטן ביותר שמאפשר כיסוי של G בצמתים $=f_{VC}(G)$ בעיית אופטימיזציה

בעיית חיפוש של VC: נתון גרף G, והמטרה היא למצוא כיסוי בגודל מינימאלי.

<u>אבחנה:</u> $f_{VC}\in POLY \Leftrightarrow L_{VC}\in P$. (וזה שקול לטענה ש NP = P).

<u>הוכחה:</u> כיוון $\Rightarrow$: בהינתן קלט (G,k) חשב את $f_{VC}(G)$ והשווה ל k.

כיוון $\Leftarrow$: בהינתן קלט G נעבור על $(G,1)$, $(G,2)$...,$(G,|V|)$ ולכל (G,i) נבדוק האם $(G,i)\in L_{VC}$ ונחזיר כפלט את ה i המינימאלי שמקיים זאת.

<u>אבחנה:</u> $L_{VC}\in P \Leftarrow$ בעיית החיפוש ניתנת לחיפוש יעיל.

<u>הוכחה:</u> אם $L_{VC}\in P$ אז $P=NP$ (כי $L_{VC}\in NPC\cap P$) ולכן "זיהוי יעיל" גורר "חיפוש יעיל".

צריך למצוא בעיית זיהוי יעיל מתאימה.

נגדיר יחס: $R_{VC}=\{(G,k),B \mid k$ בגודל G הוא כיסוי צמתים ל B}

היחס ניתן לזיהוי יעיל - בהינתן גרף ותת קבוצה B של הצמתים, אין בעיה לבדוק האם B מהווה כיסוי בצמתים חוקי של G בגודל k.

לכן R_{VC} ניתן לחיפוש יעיל.

<u>בהינתן גרף G:</u>

1. נחשב את $f_{VC}(G)$.
2. נפתור את בעיית החיפוש של R_{VC} על קלט $(G,f_{VC}(G))$.

- f_{VC} היא בעיה קשה
- נציג אלגוריתם קירוב **<u>יעיל</u>**, A, המתחייב למצוא כיסוי שגודלו לכל היותר פי 2 מגודל הכיסוי המינימאלי.

נסמן את הכיסוי ב $A(G)$. יתקיים: $f_{VC}\le|A(G)|\le 2\cdot f_{VC}$.

<u>תזכורת:</u>

שידוך בגרף $G=(V,E)$, הוא קבוצת קשתות $M\subseteq E$ זרה בצמתים.

שידוך מקסימאלי - שידוך שלא ניתן להרחבה ע"י אף קשת $e\in E$.

שידוך מקסימום - שידוך שלכל שידוך אחר בגרף, השידוך הזה גדול או שווה לו.

זהו שידוך מקסימאלי: (הקשת האמצעית בלבד נמצאת בשידוך)

זהו שידוך מקסימום: (שתי הקשתות הקיצוניות נמצאות בשידוך)

אלגוריתם למציאת שידוך מקסימאלי בגרף G (אלגוריתם חמדן):

א. $M\leftarrow\phi$

ב. עבור על כל הקשתות $e\in E$ (בסדר שרירותי כלשהו). אם e זרה לכל הקשתות ב M אז $M\leftarrow M\cup\{e\}$.

מתקיים:

- האלגוריתם פולינומי: $O\left(|E|^2\right)$.
- M הוא שידוך (ניתן להוכיח באינדוקציה).
- M מקסימאלי (אם הייתה e שניתן להוסיף, אז האלגוריתם היה עושה זאת).

A על קלט G:

1. מצא שידוך מקסימאלי M בגרף G.
2. הפלט: הקבוצה B המכילה את כל הצמתים המשתתפים בקשתות M.

מתקיים:

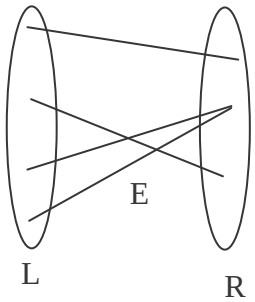
- האלגוריתם פולינומי - מציאת השידוך היא פולינומית, וכך גם בחירת הצמתים.
- הקבוצה B היא כיסוי בצמתים. כל הקשתות שבשידוך מכוסות (אפילו פעמים). אם $e \notin M$ (הקשת לא בשידוך) אז אם היא לא מכוסה ע"י B, אז זה אומר שהיא זרה לכל הקשתות ב M בסתירה למקסימאליות של M.
- נסמן B^* - כיסוי בצמתים בגודל מינימאלי. נראה $\left|B^*\right| \le |B| \le 2\cdot\left|B^*\right|$.

אי השוויון השמאלי ברור מעצם ההגדרה של B^*.
נראה שגם אי השוויון הימני מתקיים:
B^* הוא כיסוי ולכן בפרט הוא מכסה כל קשת $e \in M$. מכיוון שהקשתות ב M זרות, זה אומר ש $\left|B^*\right| \ge |M|$. לכן $|B| = 2\cdot|M| \le 2\cdot\left|B^*\right|$.

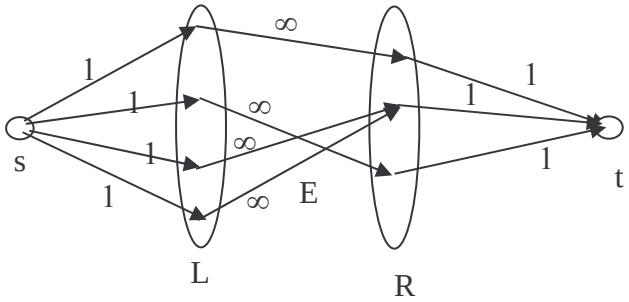
2. <u>צמצום מרחב הקלט:</u>

<u>דוגמה 1:</u> SAT. נתונה נוסחת CNF. השאלה היא האם ניתן לספק אותה. זוהי בעיה קשה.
גם הבעיה 3SAT (בכל פסוקית יש לכל היותר 3 ליטרלים) היא בעיה קשה.
לעומת זאת, הבעיה 2SAT (בכל פסוקית יש לכל היותר 2 ליטרלים), היא בעיה קלה. $2SAT \in P$.

<u>דוגמה 2:</u> VC (כיסוי בצמתים) - בעיה קשה.
VC בגרפים מישוריים - גם בעיה קשה.
VC בגרף דו צדדי היא בעיה קלה - שייכת ל P.
<u>נתון:</u> גרף דו צדדי: $G = (L, R, E)$



בהינתן גרף כזה, נמצא כיסוי בצמתים מינימאלי.
נוסיף שני צמתים s,t כאשר נוסיף קשת מ s אל כל צומת ב L. נוסיף קשת מכל צומת ב R אל t.
נקבע כיוון מ L אל R לכל צומת ב E.
נקבע קיבולת 1 לקשתות הנוגעות ב s וב t. נקבע קיבולת אינסוף לקשתות ב E.



זרימה מקסימאלית שקולה לקיבולת החתך המינימאלי.
כאשר חתך הוא חלוקה של הגרף לשני חלקים זרים $\left(S,\bar{S}\right)$ כך ש $s\in S$ ו $t\in\bar{S}$ וקיבולת החתך היא אוסף הקיבולת של הקשתות $e=\left(u,v\right)$ כך ש $u\in S$ ו $v\in\bar{S}$.

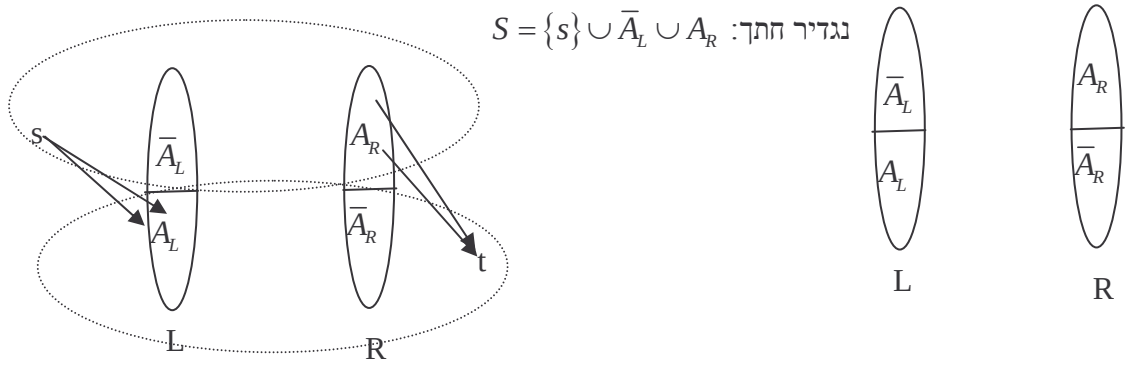
<u>טענה:</u>
1. לכל כיסוי בצמתים A של הגרף G, בגודל k, ניתן להתאים חתך ברשת הזרימה בגודל k.
2. לכל חתך $\left(S,\bar{S}\right)$ בעל קיבולת סופית k, ניתן להתאים כיסוי בצמתים בגודל k.

<u>מסקנה:</u>
גודל הכיסוי המינימאלי ב G שווה לגודל החתך המינימאלי ברשת הזרימה השווה לזרימה המקסימאלית, שניתנת לחישוב פולינומי.
לכן קיים אלגוריתם פולינומי למציאת כיסוי בצמתים מינימאלי בגרף דו צדדי.

<u>הוכחה:</u>
בהינתן כיסוי בצמתים A לגרף G, נסמן: $A=\left(A_L,A_R\right)$.

$$\bar{A}_L=L\setminus A_L$$
$$\bar{A}_R=R\setminus A_R$$

נגדיר חתך: $S=\{s\}\cup\bar{A}_L\cup A_R$



נחשב את קיבולת החתך $\left(S,\bar{S}\right)$

1. קשתות מהמקור s לצמתים ב A_L - מספרן (וקיבולן) הוא $\left|A_L\right|$.
2. קשתות מ A_R ל t - מספרן (וקיבולן) הוא $\left|A_R\right|$.
3. קשתות מ $\bar{A}_L$ אל $\bar{A}_R$ - אם קיימת קשת כזאת היא איננה מכוסה ע"י $A=\left(A_L,A_R\right)$. לכן אין קשתות כאלו.

לכן קיבולת החתך היא $\left|A_L\right|+\left|A_R\right|=\left|A\right|$

3. <u>היוריסטיקות:</u>

<u>SAT</u>:

- אם קיים משתנה שמופיע תמיד בחיוב, או תמיד בשלילה, אז הצב את הערך המועדף (ופשט את הפסוק).
- אם אין כזה, בחר משתנה שמופיע הכי הרבה פעמים. הצב פעם 0 ופעם 1, ובכל מקרה נסה לפתור רקורסיבית.

4. <u>ניתוח ממוצע:</u>

- פילוג הסתברות על הקלט - D.
- תוחלת זמן הריצה.

נגדיר: $D=\{D_n\}_{n\geq 0}$.

D_n על המחרוזות $\{0,1\}^n$ - כלומר לכל <u>אורך</u> נגדיר פילוג.

<u>חסרונות:</u>

בדרך כלל לא ברור מהו הפילוג D.

5. <u>אלגוריתמים אקספוננציאלים משופרים:</u>

לדוגמה, בעיית 3COL.

האלגוריתם הנאיבי עובד בסיבוכיות $3^n \cdot p(n)$. - מספר ה- 3 צביעות של גרף עם n צמתים.

אלגוריתם (קצת) משופר: עבור על כל תתי הקבוצות של V - יש $2^{|V|}$ כאלה.
לכל אחת מהן, צבע אותה בצבע אחד, ובדוק ששאר הגרף הוא 2-צביע (פולינומי).

6. <u>אלגוריתמים הסתברותיים:</u>

לכל קלט מוכנים לטעות בהסתברות נמוכה.

$comp=\{x \mid \text{פריק } x\}$

דוגמה לאלגוריתם קירוב הסתברותי:

בעיית $MAX-CAT$ - נתון גרף והמטרה היא למצוא חיתוך **<u>מקסימאלי</u>.**

נתון גרף G + קיבולות לקשתות.

רוצים למצוא חתך בגרף, $(S,\bar{S})$ בעל קיבול מקסימאלי.

בעיית ההכרעה היא בעיה NP-שלמה.

האלגוריתם:

לכל צומת מטיל מטבע כדי להחליט האם הצומת שייך ל S או ל $\bar{S}$.

נגדיר משתנים מקריים:

אם e היא קשת בחתך $(S,\bar{S})$ שהאלגוריתם בחר, אז $X_e=1$

אם e היא לא קשת בחתך $(S,\bar{S})$ שהאלגוריתם בחר, אז $X_e=0$

ההסתברות ש $X_e=1$ היא חצי וההסתברות שהוא 0 היא חצי. לכן התוחלת היא $E(X_e)=\frac{1}{2}$.

$\sum_{e\in E} C_e \cdot X_e$: הקיבולת של החתך שבחרנו. (C_e היא קיבולת הקשת e).

$E\left(\sum_{e\in E} C_e \cdot X_e\right)=\sum_{e\in E} C_e \cdot E(X_e)=\frac{1}{2}\sum_{e\in E} C_e$ התוחלת של קיבולת החתך.

בנוסף, המקרה האופטימאלי הוא קטן או שווה ל $\sum_{e \in E} C_e$.

(ניתן לשפר ע"י ביצוע האלגוריתם מספר פעמים).