<u>אלגוריתמי קירוב</u>

<u>הגדרה:</u>

אלגוריתם A הוא אלגוריתם קירוב עד כדי קבוע **חיבורי** $d$, ל $f$, אם לכל $x$ מתקיים:

$$f(x)-d \le A(x) \le f(x)+d$$

אלגוריתם A הוא אלגוריתם קירוב עד כדי קבוע **כפלי** $\alpha$, ל $f$, אם לכל $x$ מתקיים:

$$\frac{f(x)}{\alpha} \le A(x) \le f(x)\cdot\alpha$$

עבור בעיות מינימום, <u>לפעמים</u>: $f(x) \le A(x)\alpha \cdot f(x)$

עבור בעיות מקסימום: $\frac{f(x)}{\alpha} \le A(x) \le f(x)$

<u>דוגמה 1:</u>

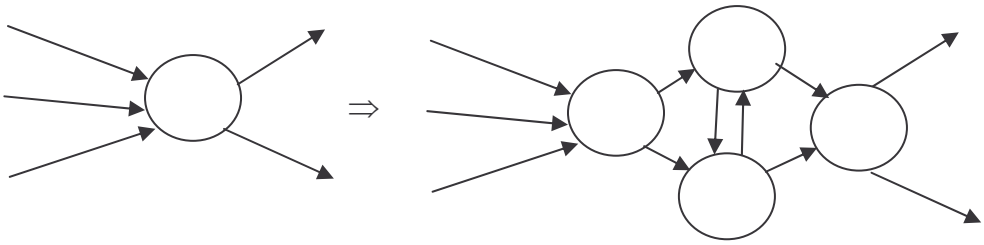
$f(\langle G\rangle)$ - מספר מעגלי ההמילטון בגרף המכוון $G$.

נוכיח שלא ניתן לקרב עד כדי קבוע חיבורי 2 בזמן פולינומי (בהנחה ש $P \ne NP$).

נניח בשלילה שקיים אלגוריתם A פולינומי המקרב עד כדי קבוע 2.

$f(x)-2 \le A(x) \le f(x)+2$.

נבחר צומת מסוים ונפצל אותו:



נקבל שבגרף החדש יש פי שנים מעגלים המילטונים.

נבצע את פעולת הפיצול לשלושה צמתים, וכך נקבל שבגרף החדש יש בדיוק פי שמונה מעגלים המילטונים.

נראה מ"ט פולינומי דטרמיניסטית ל DHC (בעיית המעגל ההמילטוני):

($DHC \in NPC$ וכאן נראה ש $DHC \in P$ ולכן $P = NP$ בסתירה להנחה)

$M$ על $\langle G\rangle$ - בונה $G'$ כמתואר. מריצה מ"ט שמחשבת את אלגוריתם A על $G'$ (בזמן פולינומי).

אם $A(\langle G'\rangle) \ge 6$ אז מקבלת ואחרת דוחה.

<u>נכונות:</u>

פולינומיות - הבניה פולינומית, וכך גם הרצת A.

נכונות:

אם $\langle G\rangle \in DHC$ אז קיים ב G מעגל המילטוני. לכן $f(\langle G\rangle) \ge 1$. לכן $f(\langle G'\rangle) \ge 8$.

לכן $A(\langle G'\rangle) \ge f(\langle G'\rangle)-2 \ge 8-2 \ge 6$. לכן $M$ תקבל את $\langle G\rangle$. לכן $\langle G\rangle \in L(M)$

אם $\langle G\rangle \notin DHC$ אז לא קיים ב G מעגל המילטוני. לכן $f(\langle G\rangle)=0$. לכן $f(\langle G'\rangle)=0$.

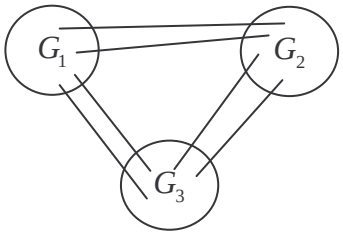
לכן $A(\langle G'\rangle) \le f(\langle G'\rangle)+2 = 0+2 = 2 < 6$. לכן $M$ תדחה את $\langle G\rangle$. לכן $\langle G\rangle \notin L(M)$

דוגמה 2:

מספר הצבעים המינימאלי לצביעה חוקית של $f_{col}\left(\langle G\rangle\right)=G$

נראה שלא ניתן לקרב עד כדי קבוע חיבורי 1 בזמן פולינומי (בהנחה ש $P\neq NP$).
נראה שאם ניתן לקרב כך, אז ניתן להכריע את $3COL$ בזמן פולינומי.

נבנה את $G'$ באמצעות שיכפול של $G$ ל $G_1,G_2,G_3$ ונחבר בקשת בין כל שני צמתים השייכים לשני חלקים שונים של הגרף המשוכפל.




נקבל ש $f\left(\langle G'\rangle\right)=3f\left(\langle G\rangle\right)$

האלגוריתם להכרעת $3COL$ בזמן פולינומי:
בהינתן גרף G, נייצר עבורו את $G'$ ע"י השכפול כנ"ל. נריץ את אלגוריתם הקירוב ואם נקבל מספר גדול מ 10 אז נדחה ואם נקבל מספר קטן מ 11 אז נקבל.

הפולינומיות נובעת מהפולינומיות של אלגוריתם הקירוב.
נכונות: אם G ניתן לצביעה ב 3 צבעים, אז $G'$ ניתן לצביעה ב 9 צבעים, לכן אלגוריתם הקירוב יחזיר לכל היותר 10 ולכן נקבל.
אם $G$ לא ניתן לצביעה ב 3 צבעים, אז $G'$ דורש לפחות 12 צבעים לצביעתו, לכן אלגוריתם הקירוב יחזיר לפחות 11, ולכן נדחה.

דוגמה 3:

טענה: אין ל $f_{col}\left(\langle G\rangle\right)$ אלגוריתם קירוב עד כדי קבוע כפלי $\alpha$, לכל $\alpha<\frac{4}{3}$ הרץ בזמן פולינומי.

(הכוונה: $f\left(\langle G\rangle\right)\leq A\left(\langle G\rangle\right)\leq\alpha\cdot f\left(\langle G\rangle\right)$ )

הוכחה: נניח בשלילה שקיים אלגוריתם קירוב A כנ"ל:

אם $G$ 3-צביע אז: $3\leq A\left(\langle G\rangle\right)\leq\alpha\cdot 3<\frac{4}{3}\cdot 3=4$

אם $G$ לא 3-צביע אז $4\leq A\left(\langle G\rangle\right)$.

לכן באמצעות האלגוריתם הזה ניתן להכריח את $3COL$ בזמן פולינומי.
פשוט נריץ את A על G, ואם נקבל 4 או יותר אז נדחה, ואחרת נקבל.

דוגמה 4:

$3COL$ היא NP שלמה. מה קורה אם נתון גרף שידוע שהוא 3 צביע, ורוצים לצבוע אותו ב 3 צבעים, בצביעה חוקית?
טענה: אם P שונה מ NP, אז לא קיים אלגוריתם פולינומי שצובע גרף 3 צביע בשלושה צבעים.
הוכחה: אם היה קיים אלגוריתם כזה, יכולנו לפתור את $3COL$ בזמן פולינומי:

נריץ את האלגוריתם הנתון לפי הפולינום המובטח. אם הוא יעצור "בזמן", נבדוק את חוקיות הצביעה שפלט ואם היא חוקית אז נקבל. אחרת (הצביעה לא חוקית או שהוא לא עצר) נדחה.

<u>משפט:</u> בהינתן גרף 3 צביע, ניתן לצבוע אותו ב $O\left(\sqrt{n}\right)$ צבעים, כאשר $n$ הוא מספר הצמתים בגרף, בזמן פולינומי.

- אפשר לצבוע ב $O\left(n^{\frac{1}{4}}\right)$
- שימו לב שזה אינו אלגוריתם עד כדי קבוע חיבור או כפל

<u>טענת עזר 1:</u>
אם $\Delta$ היא דרגת המקסימום של גרף $G$, אז $G$ ניתן לצביע פולינומית ב $\Delta+1$ צבעים.
<u>הוכחה:</u>
נבצע זאת באמצעות אלגוריתם חמדן: נשתמש בצבעים $0,1,\ldots,\Delta$.
נעבור על צמתי הגרף בסדר אקראי, ונבצע את שכניו של כל צומת, בצבע המינימאלי הפנוי.
נותר להראות שלא ניתקע:
אם נתקענו זה אומר שהצבעים $0,1,\ldots,\Delta$ אז יש לצומת יותר מ $\Delta$ שכנים, וזו סתירה.

<u>טענת עזר 2:</u>
אם $G$ גרף 3 צביע, אז "השכונה" (אוסף השכנים שלו, לא כולל אותו) של כל צומת $v$ היא גרף 2 צביע. מסמנים את השכונה ב $\Gamma(v)$.
הוכחה: $v$ צבוע באחד הצבעים. לכן השכונה שלו צבועה בשני הצבעים האחרים.

<u>טענת עזר 3:</u>
גרף 2 צביע ניתן לצבוע בזמן פולינומי:
הוכחה: נצבע באמצעות BFS. שכבות זוגיות יצבעו בצבע אחד ושכבות אי זוגיות יצבעו בצבע שני.

<u>האלגוריתם:</u>
1. אם $\Delta<\sqrt{n}$ אז $\Delta+1\le\sqrt{n}$ - פשוט נצבע באמצעות טענת עזר 1.
2. אחרת, קיים צומת $v$, שיש לו לפחות $\sqrt{n}$ שכנים.
ניקח שלושה צבעים חדשים:
צבע אחד ל $v$.
שני צבעים נוספים בשביל השכונה של $v$ (2 מספיקים ע"פ טענה 2). (נבצע זאת ב BFS ע"פ טענה 3)
נזרוק את $v$ ואת השכונה שלו מהגרף, ונחזור להתחלה.

שלב 2 יתבצע לכל היותר $\sqrt{n}$ פעמים. בכל פעם 3 צבעים. סה"כ $3\sqrt{n}$ צבעים.
שלב 1 יתבצע לכל היותר פעם אחת. השתמשנו בו לכל היותר ב $\sqrt{n}$ צבעים.
לכן סה"כ השתמשנו ב $4\sqrt{n}$ צבעים.