<u>מכונת טיורינג לזיהוי שפות</u>

מה שמעניין אותנו זה האם המכונה עצרה ב q_A או ב q_R או שלא עצרה בכלל (הפלט לא מעניין).

המכונה מקבלת את הקלט אם היא עצרה ב q_A ולא מקבלת את הקלט בכל אפשרות אחרת. (עצרה ב q_R או לא עצרה בכלל).

המכונה דוחה את הקלט אם היא עצרה ב q_R

המכונה מקבלת שפה אם לכל מילה בשפה היא מקבלת אותה ולכל מילה שלא בשפה היא לא מקבלת אותה. אוסף השפות שניתן לבנות עבורן מכונות שמקבלות אותן נקרא RE.

המכונה מכריעה שפה אם לכל מילה בשפה היא מקבלת אותה ולכל מילה שלא בשפה היא דוחה אותה. אוסף השפות שניתן לבנות עבורן מכונות שמכריעות אותן נקרא R.

$R \subseteq RE$

<u>תרגיל 1:</u>

$f(\langle M \rangle, x) = \begin{cases} t & * \\ 2000 & else \end{cases}$ כאשר: * פירושו M עוצרת על x תוך t צעדים.

האם f ניתנת לחישוב? לא!

הוכחה: נניח ש f ניתן לחישוב, כלומר קיימת מכונה M_f המחשבת אותה.

נבנה מ"ט M_{HP} המשתמשת ב M_f ומכריעה את HP (בסתירה לכך ש $HP \notin R$)

תזכורת מההרצאה: $halting-problem = HP \triangleq \{\langle M \rangle, \langle x \rangle \mid x$ עוצרת על $M\}$

M_{HP} על $w = (\langle M \rangle, x)$ מריצה את M_f על $w = (\langle M \rangle, x)$. נסמן את הפלט של M_f ב t.

אם $t \neq 2000$ אז M_{HP} עוצרת ומקבלת.

אחרת $(t = 2000)$, תריץ סימולציה של M על x למשך 2000 צעדים. אם M עצרה על x - תקבל, ואחרת תדחה.

צ"ל: $HP = L(M_{HP})$ ושה M_{HP} תמיד עוצרת.

$(\langle M \rangle, x) \in HP \Leftarrow$ M עוצרת על x תוך t צעדים.

אם $t \neq 2000$ אז M_f תפלוט פלט $t \neq 2000$ ואז M_{HP} תעצור ותקבל.

אם $t = 2000$ אז M_f תפלוט פלט $t = 2000$ ובסימולציה של M על x למשך 2000 צעדים M תעצור ותקבל.

$(\langle M \rangle, x) \notin HP \Leftarrow$ M לא עוצרת על x.

לכן M_f תעצור עם פלט $t = 2000$ ובסימולציה של M על x M לא תעצור, ולכן M_{HP} תעצור ותדחה.

<u>תרגיל 2:</u>

$L_\varepsilon = \{\langle M\rangle \mid \varepsilon \in L(M)\}$ כלומר קבוצת כל קידודי המכונות שמקבלות את ε.

היא ניתן להכריע (או לפחות לקבל) את L_ε?

הרעיון הטריוויאלי הוא לבנות מכונה שמסמלצת הרצת M על ε.
אם M מקבלת את ε או דוחה את ε אין לנו בעיה - נחזיר את התשובה שלה. הבעיה היא מה לעשות אם M לא עוצרת על ε.
מכאן ברור ש L_ε שייכת ל RE. אבל לא ברור האם היא שייכת ל R.

שייכות ל RE - מתארים מ"ט + הוכחת נכונות (מקבלת את השפה).

אי שייכות ל R (רדוקציה) - הנחה בשלילה ששייכת ל R + הכרעת שפה שאינה כריעה (HP).
הוכחה:
נניח בשלילה ש L_ε שייכת ל R, לכן קיימת לה מ"ט M_ε המכריעה אותה. נראה כיצד לבנות מ"ט M_{HP} המכריעה את HP ע"י שימוש ב M_ε בסתירה לכך ש HP לא כריעה.

רוצים: $\varepsilon \in L(M_x) \Leftrightarrow (\langle M\rangle, x) \in HP$

הרעיון: M_{HP} על קלט $(\langle M\rangle, x)$ תחשב קידוד של מ"ט חדשה M_x כך שאם M עוצרת על x אז M_x תקבל את ε ואם M לא עוצרת על x אז M_x לא תקבל את ε.
M_{HP} "תשאל" את M_ε על $\langle M_x\rangle$ ותדחה או תקבל כמוה.

M_{HP} על קלט $w = (\langle M\rangle, x)$ מייצרת את $\langle M_x\rangle$ ואז מריצה את M_ε על $\langle M_x\rangle$ ועונה כמוה.
הערה: M_{HP} תמיד עוצרת כי שלב הקידוד (הייצור של $\langle M_x\rangle$) הוא סופי, ו M_ε תמיד עוצרת כי היא <u>מכריעה</u> את L_ε.

כיצד נייצר את M_x? נסתכל כיצד היא עובדת:
M_x על קלט w: מריצה M על x עד שתעצור (יכול להיות שלב אינסופי). אם M עצרה אז מקבלת.

אבחנה: $L(M_x)$ היא אחת משתי האופציות:
אם M עוצרת על x אז $L(M_x) = \Sigma^*$ ואחרת $L(M_x) = \phi$.
(במקרה: אם M עוצרת על x אז $\varepsilon \in L(M_x) = \Sigma^*$ ואחרת $\varepsilon \notin L(M_x) = \phi$)
קל לראות שקיים אלגוריתם שבהינתן קלט $(\langle M\rangle, x)$ פולט $\langle M_x\rangle$.
נשים לב ש M_{HP} יוצרת קידוד $\langle M_x\rangle$ אולם **<u>לא</u>** מריצה את M_x.

נכונות: אם $\underline{(\langle M, x\rangle \in HP)}$ - M עוצרת על x ולכן $L(M_x) = \Sigma^*$ ולכן $\varepsilon \in L(M_x)$. לכן $\langle M_x\rangle \in L_\varepsilon$ ולכן M_ε תעצור על $\langle M_x\rangle$ ותקבל. לכן M_{HP} תעצור ותקבל את $(\langle M\rangle, x)$.
אם $\underline{(\langle M, x\rangle \notin HP)}$ - M לא עוצרת על x ולכן $L(M_x) = \phi$ ולכן $\varepsilon \notin L(M_x)$. לכן $\langle M_x\rangle \notin L_\varepsilon$ ולכן M_ε תעצור על $\langle M_x\rangle$ ותדחה. לכן M_{HP} תעצור ותדחה את $(\langle M\rangle, x)$