רדוקציה - פונקציה שלוקחת אותנו משפה אחת לשפה אחרת.

אי אפשר לבצע רדוקציה לשפה הריקה ϕ משפה אחרת ומשפה שאיננה Σ^* אל Σ^*.

אם יש רדוקציה מהשפה L_1 אל השפה L_2 אז נסמן $L_1 \le L_2$.
אם $L_1 \le L_2$ אז גם $\overline{L_1} \le \overline{L_2}$
הוכחה: $L_1 \le L_2 \Leftarrow$ קיים פונקצית רדוקציה f. נשתמש באותה פונקציה:

$$x \in \overline{L_1} \Leftrightarrow x \notin L_1 \underbrace{\Leftrightarrow}_{*} f(x) \notin L_2 \Leftrightarrow f(x) \in \overline{L_2}$$

* - נובע מהתקפות של פונקצית הרדוקציה.

משפט: אם $L_1 \le L_2$ ו $L_2 \in R$ אז $L_1 \in R$
אפשר לומר גם להפך: אם $L_1 \le L_2$ וגם $L_1 \notin R$ אז $L_2 \notin R$

על מנת להראות רדוקציה יש להראות את הדברים הבאים:
נכונות: הפונקציה מלאה (כלומר לכל x קיים $f(x)$).
הפונקציה ניתנת לחישוב (כלומר ניתן לבנות M_f שתחשב את f).
תקפה (כלומר $x \in L_1 \Leftrightarrow f(x) \in L_2$)
מסקנה: $L_1 \le L_2$ ולכן $L_1 \in R$ או $L_2 \notin R$

דוגמה: השפה $L_\infty = \{\langle M \rangle \mid |L(M)| = \infty\}$
טענה: $L_\infty \notin R, RE, CO-RE$

הוכחה:
נוכיח ש $HP \le L_\infty$ ומכיוון ש $HP \notin R$ נקבל ממשפט הרדוקציה ש $L_\infty \notin R$
רוצים: M עוצרת על x $\Leftrightarrow$ $f(\langle M \rangle, x) = M_x$ כך ש $|L(M_x)| = \infty$.
הרדוקציה:

$$f(\langle M \rangle, x) = \langle M_x \rangle$$

אופן הפעולה של M_x: כאשר היא מקבלת קלט w היא מתעלמת ממנו, ומריצה M על x ואם M עצרה אז M_x מקבלת.
<u>אבחנה:</u>
$L(M_x) = \phi$ אם M לא עוצרת על x
$L(M_x) = \Sigma^*$ אם M כן עוצרת על x

נכונות של f
מלאה - כן, כי היא עוצרת לכל קלט - לכל $\langle M \rangle, x$ היא מייצרת את M_x.
ניתנת לחישוב - ייצור הקידוד $\langle M_x \rangle$ מהזוג $(\langle M \rangle, x)$ כולל פעולות מכאניות של שרשור פונקציות מעברים, החלפת אינדקסים וכולי (פעולות קומפילציה פשוטה)
תקפה - צ"ל: $(\langle M \rangle, x) \in HP \Leftrightarrow f(\langle M \rangle, x) \in L_\infty$
הוכחה:

$\Leftarrow \left(\langle M\rangle, x\right) \in HP$ עוצרת על x M

$\Leftarrow$ ע"פ האבחנה, $L\left(M_x\right) = \Sigma^* \Leftarrow \left|L\left(M_x\right)\right| = \infty \Leftarrow f\left(\langle M\rangle, x\right) \in L_\infty$

$\Leftarrow \left(\langle M\rangle, x\right) \notin HP$ לא עוצרת על x M

$\Leftarrow$ ע"פ האבחנה, $L\left(M_x\right) = \phi \Leftarrow \left|L\left(M_x\right)\right| = 0 \neq \infty \Leftarrow f\left(\langle M\rangle, x\right) \notin L_\infty$

מסקנה:

$HP \leq L_\infty$

בנוסף ידוע ש $HP \notin R, CO-RE$ ולכן על פי משפט הרדוקציה נקבל:

$L_\infty \notin R, CO-RE$

דוגמה נוספת:

$L = \{\langle M\rangle \mid$ בריצת M על ε קיימים שלושה צעדים עוקבים ימינה$\}$

טענה: $L \in RE \setminus R$

נוכיח $L \notin R$

הוכחה: $L_\varepsilon = \left\{\langle M\rangle \mid \varepsilon \in L\left(M\right)\right\}$ ראינו בתרגול קודם ש $L_\varepsilon \notin R$.

נראה ש: $L_\varepsilon \leq L$

$f\left(\langle M\rangle\right) = \langle M'\rangle$

רוצים: M מקבלת את ε אם ורק אם M' הולכת בריצה על ε שלושה צעדים ימינה.

נבנה את M' באופן הבא:

1. אם בפונקצית המעברים של M מופיע מעבר $\delta\left(q,\sigma\right) = \left(p,\rho,R\right)$ (תנועה ימינה) אז נחליף ל:

$$\delta'\left(q,\sigma\right) = \left(p',\rho,R\right)$$

$$\forall \rho : \delta'\left(p',\rho\right) = \left(p,\rho,S\right)$$

כך M' לא תוכל ללכת 2 צעדים ימינה - אחרי כל צעד ימינה היא עוצרת במקום בצעד הבא.

2. אם $\delta\left(q,\sigma\right) = \left(q_A,\rho,A\right)$ נחליף ל:

$$\delta'\left(q,\sigma\right) = \left(q_R,\rho,R\right)$$

$$\forall \rho : \delta'\left(q_R,\rho\right) = \left(q_R,\rho,R\right)$$

כך אם M קיבלה את ε, נקבל ש M' תרוץ ימינה עד אינסוף, כלומר תבצע שלושה צעדים ימינה.

תזכורת: $L = \left\{\langle M\rangle \mid L\left(M\right) \in RE\right\}$ - השפה הזו היא Σ^*

תרגיל שלישי:

$L = \{\langle M_f\rangle \mid f$ ניתנת לחישוב$\}$

מהי L?

פונקציה ניתנת לחישוב אם קיימת מ"ט המחשבת אותה.

$\Leftarrow$ f ניתנת לחישוב כי M_f מחשבת אותה.

$\Leftarrow \langle M_f\rangle \in L$ לכל $M_f \Leftarrow L = \Sigma^*$

דוגמה אחרונה:

$L_1 = \{\langle M \rangle \mid |L(M)| = 1\}$ - שפת כל קידודי המכונות שמקבלים מילה אחת בדיוק.

0 מילים - אי אפשר לדעת מה לעשות - אולי בעתיד היא תקבל.
מילה אחת - אי אפשר לדעת מה לעשות - אולי בעתיד היא תקבל.
אם ראינו שתי מילים או יותר - נדחה מיד.
טענה: $L_1 \notin R, RE, CO-RE$

נראה: $HP \le L_1$

רוצים: M עוצרת על x אם ורק אם $f(\langle M \rangle, x) = \langle M_x \rangle$ כך ש M_x תקבל רק מילה אחת.

M_x על קלט w:
מריצים M על x:
אם M עוצרת על x אז אם $w = \varepsilon$ אז המכונה תקבל, ואם $w \ne \varepsilon$ אז המכונה תדחה.
אבחנה:
אם M לא עוצרת על x אז $L(M_x) = \phi$
אם M עוצרת על x אז $L(M_x) = \{\varepsilon\}$

נראה: $\overline{HP} \le L_1$

רוצים: M לא עוצרת על x אם ורק אם $f(\langle M \rangle, x) = \langle M_x \rangle$ כך ש M_x תקבל רק מילה אחת.

M_x על קלט w:
אם $w = \varepsilon$ אז המכונה תקבל.
אחרת, מריצה M על x. אם M עצרה - תקבל.
אבחנה:
אם M לא עוצרת על x אז $L(M_x) = \{\varepsilon\}$
אם M עוצרת על x אז $L(M_x) = \Sigma^*$