<u>דוגמה 1:</u> $L=\{\langle M\rangle \mid \overline{HP}\cap L(M)\neq\phi\}$ (כל המכונות שמקבלות מילים מ $\overline{HP}$).

טענה: $L\notin RE\cup CO-RE$ (את $L\notin CO-RE$ ניתן להוכיח באמצעות רדוקציה $HP\le L$).

נראה: $\overline{HP}\le L$ (ואז, מכיוון ש $\overline{HP}\notin RE$ נקבל ש $L\notin RE$).

רוצים:

אם $(\langle M\rangle,x)\in\overline{HP}$ (כלומר M לא עוצרת על x) אז $f(\langle M\rangle,x)=M_x$, כך ש $\overline{HP}\cap L(M_x)\neq\phi$ (כלומר M_x מקבלת מילה מ $\overline{HP}$).

אם $(\langle M\rangle,x)\notin\overline{HP}$ (כלומר M כן עוצרת על x) אז $f(\langle M\rangle,x)=M_x$, כך ש $\overline{HP}\cap L(M_x)=\phi$ (כלומר M_x לא מקבלת אף מילה מ $\overline{HP}$).

M_x על קלט w:

אם $w=(\langle M\rangle,x)$ אז מקבלת, אחרת דוחה.

אבחנה: $L(M_x)=\{(\langle M\rangle,x)\}$

נכונות:

f מלאה כי היא מוגדרת לכל קלט.

f ניתנת לחישוב באמצעות פעולת קומפילציה פשוטה.

f תקפה:

אם $(\langle M\rangle,x)\in\overline{HP}$ אז $L(M_x)\cap\overline{HP}=\{(\langle M\rangle,x)\}\neq\phi$ ולכן $M_x\in L$.

אם $(\langle M\rangle,x)\in\overline{HP}$ אז $L(M_x)\cap\overline{HP}=\phi$ ולכן $M_x\notin L$.

<u>דוגמה 2:</u> $L=\{\langle M\rangle \mid |\Sigma^*\setminus L(M)\le 2|\}$ (שפת כל המכונות שמקבלות את כל המילים פרט אולי ל- 2).

טענה: $L\notin RE\cup CO-RE$

הוכחה:

נראה רדוקציה: $L_{\Sigma^*}\le L$ (L_{Σ^*} היא שפת המכונות שמקבלת את כל המילים. $L_{\Sigma^*}\notin RE\cup CO-RE$).

רוצים $\langle M\rangle\in L_{\Sigma^*}$ (כלומר M מקבלת את כל המילים) אם ורק אם $f(\langle M\rangle)=\langle M'\rangle$ כך ש M' מקבלת אל כל המילים פרט אולי לשתי מילים.

M' על קלט w:

אם $w=\varepsilon$ אז דחה. אחרת נגדיר: $w=bx$ כאשר $b\in\{0,1\}$. מריצים את M על x ועונים כמוה.

<u>נכונות:</u>

f מלאה כי היא מוגדרת לכל קלט.

f ניתנת לחישוב באמצעות פעולת קומפילציה פשוטה.

f תקפה:

אם $\langle M\rangle\in L_{\Sigma^*}$ אז M מקבלת את כל המילים ולכן M' מקבלת את כל המילים פרט ל ε ולכן $\langle M'\rangle\in L$

אם $\langle M\rangle\notin L_{\Sigma^*}$ אז M לא מקבלת את כל המילים ולכן קיים x כך ש M לא מקבלת את x ולכן M' מקבלת את כל המילים פרט ל ε ופרט ל $0x$ ופרט ל $1x$. (סה"כ 3 מילים לא מתקבלות). לכן $\langle M'\rangle\notin L$.

<u>דוגמה 3:</u> $L = \{\langle M \rangle \mid$ בסרט 11 ה- מגיעה לתא ε בריצתה על $M\}$

טענה: $L \in R$.

הוכחה:

טענת עזר: אם מ"ט M לא עוצרת ולא מגיעה לתא ה- 11 בסרט, אז היא חוזרת על קונפיגורציה כלשהי פעמיים (נכנסת ללולאה). קונפיגורציה = תוכן הסרט, מיקום הראש והמצב שבו נמצאת המכונה.

הוכחת טענת העזר:

נראה שיש מספר סופי של קונפיגורציות אם הראש לא חורג מ- 10 התאים הראשונים ימינה.

- מספר מצבי הבקרה הוא $|Q|$ - סופי.
- מיקום הראש - יש 10 אפשרויות - גם כן סופי.
- תוכן עשרת תאי הסרט הראשונים (בשאר יש b) - $|\Gamma|^{10}$ - גדול, אבל סופי.

לכן מספר הקונפיגורציות האפשריות הוא: $t = |Q| \cdot 10 \cdot |\Gamma|^{10}$ - עצום, אבל סופי, ולכן אם המכונה לא מגיע לתא ה- 11 וגם לא עוצרת אף פעם, אז היא חייבת להיכנס ללולאה.

לכל מ"ט יש שלוש אפשרויות:

1 - להגיע לתא ה- 11.

2 - לעצור בלי להגיע לתא ה- 11.

3 - להיכנס ללולאה (אינסופית) בלי להגיע לתא ה- 11.

נראה M_L שמכריעה את L:

M_L על קלט $\langle M \rangle$:

מריצה את M על ε. במהלך הריצה שומרים את הקונפיגורציות שבהן M עברה כבר.

אם M הגיעה לתא ה- 11 אז עוצרים ומקבלים.

אם M עצרה (ולא ביקרה בתא ה- 11) אז עוצרים ודוחים.

אם M חוזרת על אותה קונפיגורציה פעמיים - עוצרים ודוחים.

הערה: אפשר במקום לשמור את כל הקונפיגורציות, פשוט לספור את מספר הצעדים של M - אם הוא יותר מ t אז עוצרים ודוחים, כי בטוח שהייתה קונפיגורציה שחזרה פעמיים.

<u>דוגמה 4:</u> בהינתן שפה L נגדיר את $pref(L)$ כשפת הרישות של L.

זאת אומרת: $pref(L)=\{x \mid \exists y: xy \in L\}$

הוכח / הפרך: הקבוצה R סגורה תחת הפעולה $pref$ - כלומר אם $L \in R$ אז $pref(L) \in R$.

<u>אינטואיטיבית:</u> $pref(L) \in RE$ - פשוט מחפשים מילה y משלימה בהרצה מבוקרת.

<u>הפרכה:</u> באמצעות דוגמה נגדית: $L=\{\langle M\rangle \$^k \mid M$ מקבלת את ε תוך k צעדים$\}$

$L \in R$ - פשוט קוראים את הקלט, מזהים מהו k ואז מריצים את M על ε לכל היותר k צעדים ובודקים האם היא קיבלה או לא.

נראה: $L_\varepsilon \le pref(L)$ ($L_\varepsilon \notin R$ היא שפת כל המכונות שמקבלות את ε).

נגדיר את פונקצית הרדוקציה: $f(\langle M\rangle)=\langle M\rangle \$$

נכונות: f מלאה כי היא מוגדרת לכל קלט והיא ניתנת לחישוב באמצעות שרשור.

אם $\langle M\rangle \in L_\varepsilon$ (כלומר M מקבלת את ε) אז קיים k כך ש M מקבלת את ε תוך k צעדים, ולכן $\langle M\rangle \$^k \in L$ ואז $\langle M\rangle \$$ היא רישא של מילה מ L ולכן $\langle M\rangle \$ \in pref(L)$.

אם $\langle M\rangle \notin L_\varepsilon$ (כלומר M לא מקבלת את ε) אז לא קיים k כך ש M מקבלת את ε תוך k צעדים, ולכן $\langle M\rangle \$^k \notin L$ ואז $\langle M\rangle \$$ היא לא רישא של מילה מ L כי כל המילים ב L הם מכונות שנראות אחרת מ $\langle M\rangle$ ואין בקידוד שלהן $\$$.

ולכן $\langle M\rangle \$ \notin pref(L)$.

לכן $pref(L) \notin R$ בסתירה לכך ש R סגורה לפעולת $pref$.

<u>דוגמה 5:</u> $L=\{\langle M\rangle \mid L(M)=L_\varepsilon\}$ (לא לנסות להבין מה זה אומר!!!)

$L \notin RE \cup CO-RE$

נראה: $\overline{HP} \le L$ (ולכן $L \notin RE$)

רוצים: אם M לא עוצרת על x אז $f(\langle M\rangle, x)=\langle M_x\rangle$ כך ש $L(M_x)=L_\varepsilon$.

M_x על קלט w:

מריצה M על x למשך $|w|$ צעדים. אם M לא עצרה במהלך ה $|w|$ צעדים, אז נריץ M_ε על w ונענה כמוה. אחרת - נדחה.

אם $(\langle M\rangle, x) \in \overline{HP}$ אז M לא עוצרת על x ואז $L(M_x)=L_\varepsilon$.

אם $(\langle M\rangle, x) \notin \overline{HP}$ M כן עוצרת על x תוך k צעדים, אז M_x מקבלת רק מילים בגודל קטן מ k ולכן $L(M_x)$ היא סופית ולכן היא לא L_ε.