# סיכום הרצאות : גלים

## מרצה : עמית קרן

## כתב וערך : מאיר חיים דהן

**תודה ל: רואי סנדוב – בלעדיך לא הייתי קרוב ללהצליח לעשות את זה כל כך מפורט**

**למתניה בן ששון על הצילום והעזרה בהגהה**

**לגבריאל אדרי על העזרה בהגהה**

**ותודה לכל מי שעיכב את עמית בהרצאות...**

**בהצלחה במבחנים...**

**אם יש טעויות רציניות אני מה זה אשמח לדעת מזה לפני המבחן....**

**Mkdahan@gmail.com**

מאיר חיים דהן

# גלים: סיכומי הרצאות:

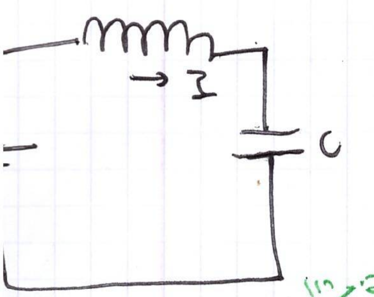
(מרצה - עמית קרן - 2013-14)

שעות קבלה: יום ד׳ אחה״צ 16:00 חדר 304 - פיזיקה

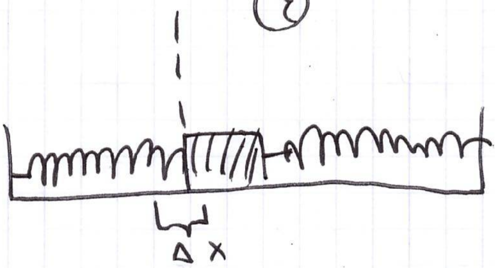
ספר Berkeley I.-II.

## תנודות חופשיות: מבט כללי על גלים בענפי פיזיקה שונים:

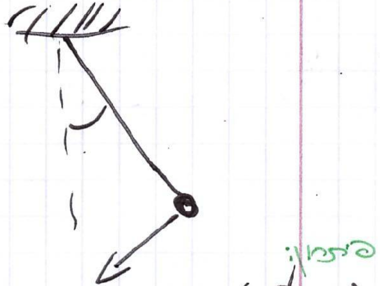
(3) (2) (1)




$$I = A\cos(wt+\varphi)$$ פיתרון

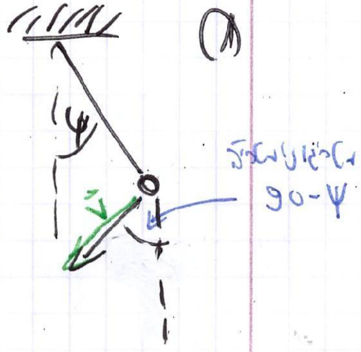



$$x = A\cos(wt+\varphi)$$ פיתרון



$$\psi = A\cos(wt+\varphi)$$ פיתרון

### בדוגמא 1:




$$F = mg\cos(90-\psi) \overset{\text{זהות}}{=} mg\sin(\psi)$$

$$\text{דרך} = l\cdot\psi \quad \text{(ברדיאנים)}$$

גזירה

$$\frac{m\,d^2(\text{דרך})}{dt^2} = ml\frac{d^2\psi}{dt^2}$$

$$ml\frac{d^2\psi}{dt^2} = -mg\sin(\psi)$$

(טור טיילור של סינוס)

$$\sin(\theta) = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \dots$$

נשתמש בפיתוח טיילור:

נניח $\sin\psi \approx \psi$ (בזוויות קטנות)

אז:

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} = -\frac{g}{l}\psi$$

מקיים את המשוואה כאשר

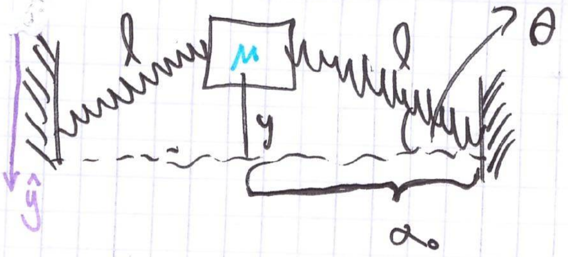
(התדירות העצמית של המע׳) $w_p^2 = \frac{g}{l}$


(2) קפיצים:

$$F = -k(a+x-a_0)+k(a-x+a_0) = -2kx$$

$$\frac{m\,d^2x}{dt^2} = -2kx \quad w^2 = 2\frac{k}{m} \text{ כאשר} \quad \text{פתרון } y = A\cos(wt+\varphi)$$

נסתכל על תנועה רק בציר $\hat{y}$.   10״




$$T = k\underbrace{(l - a_0)}^{\text{התארכות הקפיץ}}$$

$$F_y = T\cos(90-\theta) = T\sin\theta$$

זהות מסובכת

$$\sin\theta = \frac{y}{l}$$ כאשר

לפי ניוטון:

$$M\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -2k\underbrace{(l - a_0)}_{\text{כמה התארך}}\frac{y}{l} \quad (*)$$

<u>תנודות קטנות</u> (קירוב):

$$a \text{ או } a_0 >> y$$

ממשפט פיתגורס אנחנו יודעים:
$$l^2 = a^2 + y^2$$

(*) בפיתוח עבור $\frac{1}{l}$:

$$\frac{1}{l} = \frac{1}{a}\left(1 + \left(\frac{y}{a}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}} \overset{(*)}{\cong} \frac{1}{a}\left(1 - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{a}\right)^2\right)$$

(*) ( כי טיילור אחד פעם: $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \dots$ )

אם נציב ב-(*) את ה-y הזוגי ונעשה את הניוטון.

$$1 - \frac{a_0}{l} = 1 - \frac{a_0}{a} + \frac{y^2 a_0}{2a^3} \Rightarrow M\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -2ky\cdot\left(1 - \frac{a_0}{a} + \frac{y^2 a_0}{2a^3} + O(y^3)\right)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\frac{2k}{M}\left(\frac{a - a_0}{a}\right)y \qquad \omega^2 = \frac{2k}{M}\left(\frac{a - a_0}{a}\right)$$

הרי   התדירות

(קירוב סלינקי)

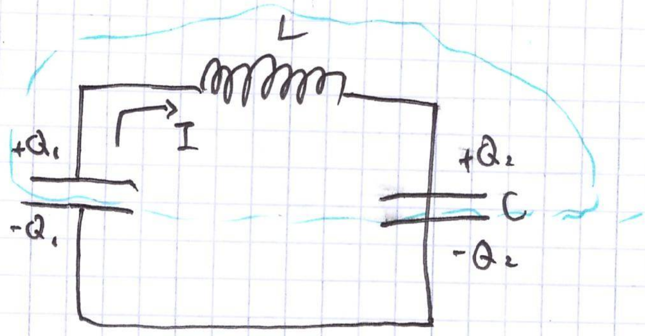
$$T = k(l - a_0) \cong kl$$

$$\boxed{\text{כי } a_0 \text{ מאוד / לא כל כך חשוב}}$$

$$l = \frac{a}{\cos\theta} \qquad T = k\frac{a}{\cos\theta}$$

$$ka = T_0$$ מתיחות (במצב מנוחה)

③ נתבונן במעגל:




נסתכל על מצב ספציפי בו הQ מפולגים כמוראה בתרשים.

נרשום את קירכהוף על המעגל:

$$\frac{Q_1}{C} - L\frac{dI}{dt} - \frac{Q_2}{C} = 0$$

נסתכל על החלק הזה של המעגל, ש-

$$-Q_1 = Q_2 = Q$$

(כי על המשרן לא נצבר מטען) אז:

$$\text{I.}\quad L\frac{dI}{dt} = -\frac{2Q}{C}$$

ואנחנו יודעים ש- $\frac{dQ}{dt} = I$

נגזור עם עזר את I:

$$L\frac{d^2I}{dt^2} = -2\frac{I}{C}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{d^2I}{dt^2} = -\frac{2I}{LC}$$ וקיבלנו משוואה של אוסילטור!

ונשים לב שאם ניתן דחיפה לזרם (דחיפה קלה - נגיד נכניס מגנט לסליל מיגרוט זרם של המשרן) נקבל אוסילציה של הזרם.

בכל המקרים הגענו למשוואה מהצורה:

$$\boxed{\frac{d^2\psi}{dt^2} = -\omega^2\psi}$$ שזה אוסילטור הרמוני פשוט

משמעות ההזנחה שעשינו את $\psi^3$ (סדרים גבוהים):

נניח $\psi_1$ ו $\psi_2$ פתרון

$$\frac{d^2\psi_1}{dt^2} = -\omega^2\psi_1 \qquad \frac{d^2\psi_2}{dt^2} = -\omega^2\psi_2$$

אז גם $\psi = \psi_1 + \psi_2$ [illegible] הוא פתרון (מלינאריות המד"ר)

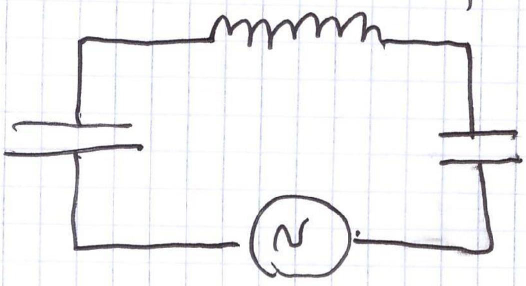
$$\frac{d^2\psi}{dt^2} = \frac{d^2\psi_1}{dt^2} + \frac{d^2\psi_2}{dt^2} = -\omega^2\psi_1 - \omega^2\psi_2 = -\omega^2(\psi_1+\psi_2) = -\omega^2\psi$$

וזה לא נכון כאשר

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} = -\omega^2\psi + \alpha\psi^3$$

! $\frac{d^2\psi}{dt^2} = -\omega^2\psi$ זו משוואה דיפרנציאלית לינארית.

אם נפעיל כח שרירותי בזמן, נקבל



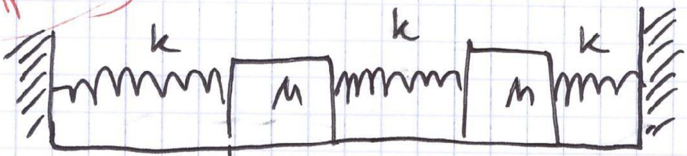
ספק כח חיצוני

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} + \omega^2\psi = F(t)$$ נקבל

שזו משוואה דיפרנציאלית לא הומוגנית.

**2 דרגות חופש:**

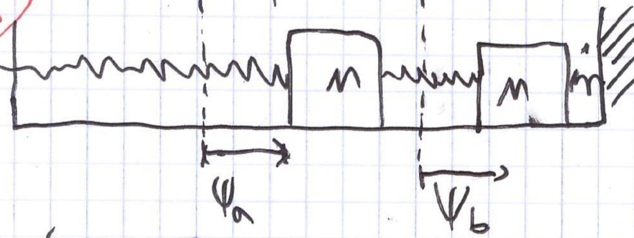
שיווי משקל




נניח קפיצים נמצאים בשיווי משקל, זה מצב מנוחה.

לא שיווי משקל

מצב לא מנוחה:




אם $\psi_a$ חיובי ה-k נמתח ⇐ נוצר תאוצה שלילית אזי:

$$M\frac{d^2\psi_a}{dt^2} = -k\psi_a + k(\psi_b - \psi_a)$$

כי ה-$\psi_a$ כמו שרוצים במינוס

$$M\frac{d^2\psi_b}{dt^2} = -k\psi_b - k(\psi_b - \psi_a)$$

כי בהצבה את $\psi_b$ ה-$\psi_a$ בפלוס.

כי 1 משוואה 4

אחרי אלגברה מסובכת נקבל:

$$M\frac{d^2\psi_a}{dt^2} = -2k\psi_a + k\psi_b \qquad M\frac{d^2\psi_b}{dt^2} = k\psi_a - 2k\psi_b$$

קיבלנו זוג משוואות דיפרנציאליות לינאריות

נסתכל על $\psi_1 = \psi_a + \psi_b$ ונחבר את 2 המשוואות כי

אנחנו יודעים שמותר לחבר בגלל (מלינאריות):

$$M\frac{d^2}{dt^2}(\psi_a + \psi_b) = -k(\psi_a + \psi_b) \Rightarrow M\frac{d^2}{dt^2}\psi_1 = -k\psi_1$$

קודם נרמלנו

ולכן הפתרון: $\psi_1 = A_1\cos(\omega_1 t + \varphi_1)$ כאשר $\omega_1^2 = \frac{k}{M}$

מ״ן

ונסתכל על האופציה של קוא' נורמאלית 2: $\psi_2 = \psi_a - \psi_b$

$$M\frac{d^2\psi_2}{dt^2} = -3k\psi_a + 3k\psi_b = -3k(\psi_2)$$

נקבל בסוף את נוסחה כמו שצריך.

אז שמנו לב שבחרנו את המצב כי אנחנו יודעים מה

זה $\psi_1$ ו $\psi_2$ נוכל לשחזר את $\psi_a, \psi_b$ ע"י הצבה:

ונקבל בסוף כשחזור:

$$\psi_a = \frac{1}{2}(\psi_1 + \psi_2)$$

$$\psi_b = \frac{1}{2}(\psi_1 - \psi_2)$$

$$\psi_a = \frac{A_1}{a}\cos(\omega_1 t + \varphi_1) + \frac{A_2}{a}\cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

$$\psi_b = \frac{A_1}{a}\cos(\omega_1 t + \varphi_1) - \frac{A_2}{a}\cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

מערכת המעבר לקוא' נורמאליות ניתן לפתור עם שנראות מסובכות ע"י הצבה

$$\left.\begin{aligned}\psi_1 &= \psi_a + \psi_b \\ \psi_2 &= \psi_a - \psi_b\end{aligned}\right\}$$ קוא' הנורמאליות $\psi_1, \psi_2$ של המצב.

הערה: לא תמיד המעבר לקוא' נורמאליות מסודר כמו שפה המעבר פשוט

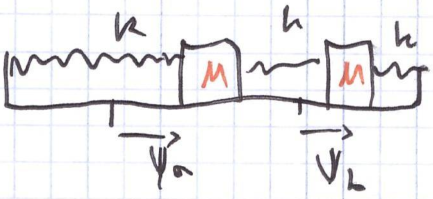
י״

## תנים - הרצאה 2:

$\psi_1$ ו-$\psi_2$ מהצורה הקודמת נקראות קואורדינטות נורמליות (תנועת הגוף)
עם תדר אחד ופאזה אחת $\equiv$ מוד (mod), אופן תנודה.

אלה הן המשתנים שבהם נוח לנו לפתור ולקבל את המשוואה:

תזכורת:




$(*_1)\ \psi_1 = \psi_a + \psi_b$

$(*_2)\ \psi_2 = \psi_a - \psi_b$

מעבר לקואורדינטות נורמליות

$$M\frac{d^2\psi_a}{dt^2} = -2k\psi_a + k\psi_b$$

$$M\frac{d^2\psi_b}{dt^2} = k\psi_a - 2k\psi_b$$

ואם נציב בתוך מצב ימין נקבל

ונקבל ש:

$w_1 = \sqrt{\frac{k}{M}}$

$w_2 = \sqrt{\frac{3k}{M}}$

$$\text{I.}\quad M\frac{d^2\psi_1}{dt^2} = -k\psi_1$$

$$\text{II.}\quad M\frac{d^2\psi_2}{dt^2} = -3k\psi_2$$

ואחרי פתירת I ו-II נקבל $\psi_1$ ו-$\psi_2$ נציב אותם ב-$(*_1)$ ו-$(*_2)$ ונקבל:

$$\boxed{\begin{aligned}\psi_a &= \frac{A_1}{2}\cos(w_1 t+\varphi_1) + \frac{A_2}{2}\cos(w_2 t+\varphi_2)\\ \psi_b &= \frac{A_1}{2}\cos(w_1 t+\varphi_1) - \frac{A_2}{2}\cos(w_2 t+\varphi_2)\end{aligned}}$$

נניח ונתון לנו כי בצורה שזה: (נתונה מה תנאי ההתחלה עכשיו)

$$\psi_a(t=0) = \psi_b(t=0) = \frac{A}{2}$$

עבור ת״ה:

בהצבת תנאי ההתחלה נקבל:

$$\frac{d\psi_a}{dt}(t=0) = 0 \qquad \frac{d\psi_b}{dt}(t=0) = 0$$

$$\text{I.}\quad \frac{A_1}{2}\cos(\varphi_1) + \frac{A_2}{2}\cos(\varphi_2) = \frac{A}{2}$$

$$\text{II.}\quad \frac{A_1}{2}\cos(\varphi_1) - \frac{A_2}{2}\cos(\varphi_2) = \frac{A}{2}$$

אחרי גזירה והצבה $t=0$

$$\text{III.}\quad -\frac{A_1}{2}w_1\sin(\varphi_1) - \frac{A_2}{2}w_2\sin(\varphi_2) = 0$$

$$\text{IV.}\quad -\frac{A_1}{2}w_1\sin(\varphi_1) + \frac{A_2 w_2}{2}\sin(\varphi_2) = 0$$

ולכן נציב את הכל ונקבל:

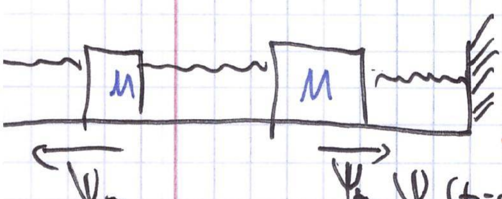
מקיימים במשוואות האלה

$$\varphi_2 = 0 ,\quad A_1 = A ,\quad \varphi_1 = 0 ,\quad A_2 = 0$$

ולכן הפתרון יהיה:

$$\psi_a = \frac{A}{2}\cos(w_1 t)$$

$$\psi_b = \frac{A}{2}\cos(w_1 t)$$




נניח פעולה אחרת על הקפיצים

שימו לב סימן מינוס

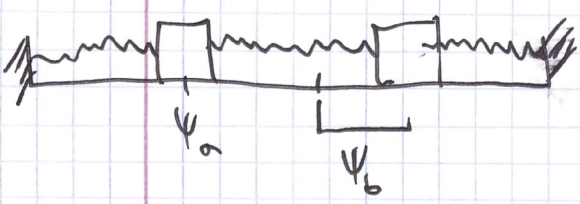
$$\psi_a(t=0) = -\psi_b(t=0) = \frac{A}{2}$$

עבור ת״ה:

אז נקבל שהתנועה תהיה בתדירות של $\sqrt{\frac{3k}{m}}$

(כי הקפיץ האמצעי יתכווץ אז ב-k

סוף




הבא - ניקח תנאי התחלה אחרים:

$$\Psi_b(t=0)=A_{\text{כלומר}}$$

$$\Psi_a(t=0)=0$$

והמהירויות - $$\frac{\partial \Psi_a}{\partial t}=\frac{\partial \Psi_b}{\partial t}=0$$

(הצבנו רק את הימני)

לכן הפיתרון (נתון אינו בלי להסביר):

$$\Psi_a=\frac{A}{2}\cos(w_1 t)-\frac{A}{2}\cos(w_2 t)$$

$$\Psi_b=\frac{A}{2}\cos(w_1 t)+\frac{A}{2}\cos(w_2 t)$$

(חיבור קוסינוסים) נציב

$$\Psi_b=A\cos\left(\frac{w_1+w_2}{2}t\right)\cos\left(\frac{w_1-w_2}{2}t\right)=$$

$$=A(t)\cos\left(\frac{w_1+w_2}{2}t\right)$$

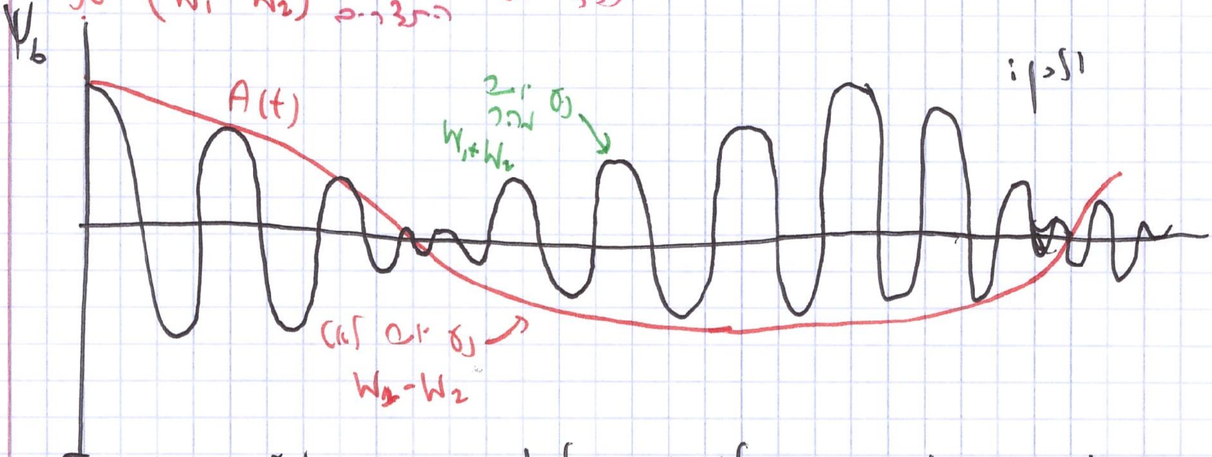
נציב

$$A(t)=A\cos\left(\frac{w_1-w_2}{2}t\right)$$

כון

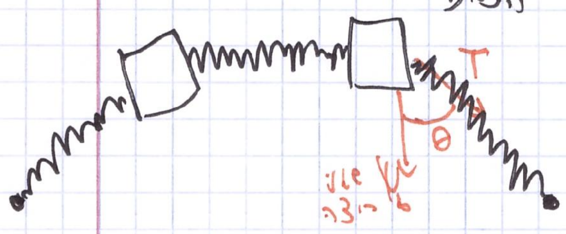
הגל משתנה לאט כי זה הפרש התדרים $(w_1-w_2)$ - יען $w$ קטנה.

ולכן:




(*) אם ה-$k$ באמצע לא שווה לk האחרים - נעסה בתרגיל.

נניח ועכשיו מבקשים לנתח את המקרה הבא:




לא חייב תמיד משוואות ואפשר רק מניתוח הבעיה צריך להסיק נסמן A הכח המחזיר:

($a$ - כמה המרחק הקפיץ) $$F_y=T\frac{\Psi_b}{a}=T\cos\theta$$ עבור תנודות קטנות (מתיחה קטנה)

ונקבל כי: $$W^2=\frac{T}{M_a}$$ וזה בדיוק מה שמבחינת יחידות...

י׳

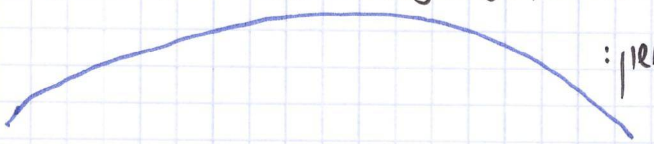
# הרצאה - הרצף:

נמצא אופני תנודה לרצף קפיצים:

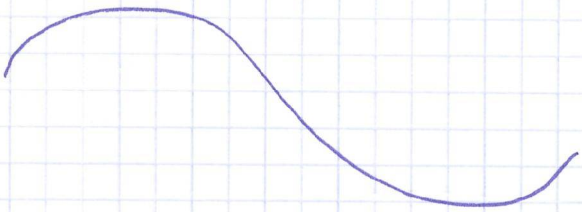

כאשר נצפה כי לאמצעי האמפליטודה הגדולה ביותר ולקיצוניים אמפליטודה 0 כי הם לא נעים

אני מצפה ל-3 אופני תנודה (A) כולם באותו תדר

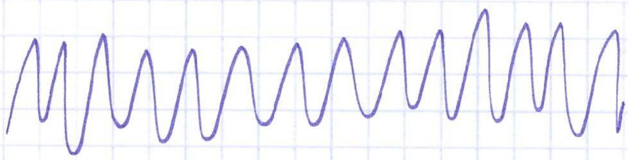
(א) אופן תנודה ראשון:



(ב) אופן תנודה שני:



(ג) אופן תנודה ג׳:

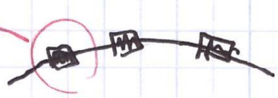


n - יסמן מוד. - אינדקס (שם) אופן התנודה

פתרון שאפשר להניח מהצורה (במקרה של רוחבי)

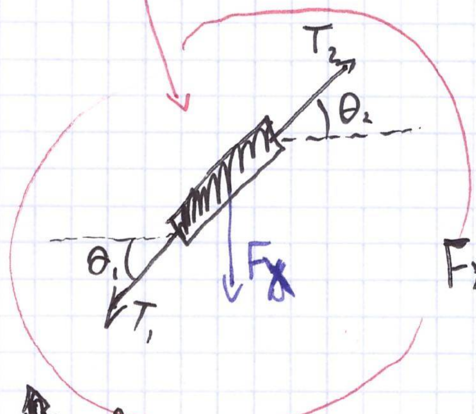
$$\Psi_x^n(i,t) = A_i^n \cos(\omega_n t + \varphi_n)$$ (אין פה הנחות - הכל אינדקסים)

i - מיקום המסה.



ברצף:

$$\Psi_x^n(z,t) = A^n(z)\cos(\omega_n t + \varphi_n)$$



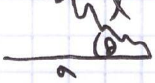

המטרה אני עכשיו להעביר את משוואות התנועה של רצף קפיצים למשוואות תנועה ברצף.

משוואות כוחות של ניוטון עבור מסה אחת:

$$F_x = T_2 \sin\theta_2 - T_1 \sin\theta_1 =$$

$$= T_2 \cos\theta_2 \, tg\,\theta_2 - T_1 \cos\theta_1 \, tg\,\theta_1 =$$

עבור l אורך הקפיץ במתוח - בקירוב הסלינקי נניח ש $\frac{a}{\cos\theta}$ הוא קירוב הקירוב ל-l בתנאי ההנחה:




$$T = kl = k\frac{a}{\cos\theta} \Rightarrow T\cos\theta = ka = T_0$$

ולכן נקבל כי:

$$T_1 \cos\theta_1 = T_0$$

$$T_2 \cos\theta_2 = T_0$$

בנוסף יש את קירוב טיילור:

$$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2} \approx 1$$

בגלל שזה קטן

אז

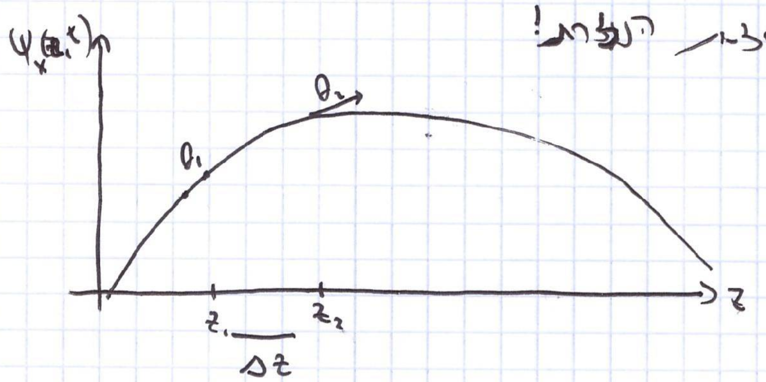
$$F_x = \underbrace{T_2 \cos\theta_2}_{T_0} \tan\theta_2 - \underbrace{T_1 \cos\theta_1}_{T_0} tg\,\theta_1$$

ולכן בקירובים אלה:

[illegible] $\Rightarrow F_x = T_0 \tan\theta_2 - T_0 \tan\theta_1$

טיילור $\Rightarrow F_x = T_0 \tan\theta_2 - T_0 \tan\theta_1$

אבל מה זה $\tan$? ⇐ זאת הנגזרת!




לכן נוכל לרשום:

$$\Rightarrow \tan\theta_2 = \frac{\partial\psi}{\partial z}\bigg|_{z_2}$$

$$\tan\theta_1 = \frac{\partial\psi}{\partial z}\bigg|_{z_1}$$

$$\Delta z = z_2 - z_1 \quad (*)$$

נכפול ונחלק:

$$\Rightarrow F_x = T_0 \left( \frac{\partial\psi}{\partial z}\bigg|_{z_2} - \frac{\partial\psi}{\partial z}\bigg|_{z_1} \right)$$

$$F_x = \Delta z\, T_0 \left( \frac{\frac{\partial\psi}{\partial z}\big|_{z_2} - \frac{\partial\psi}{\partial z}\big|_{z_1}}{\Delta z} \right) = \rho_0 \Delta z \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}$$

$(*)$

מניוטון $F=ma$

עכשיו נצמצם את $\Delta z$

$$\rho_0 = \frac{\overset{\text{מסת החבל}}{m}}{\underset{L}{\text{אורך החבל}}}$$

כאשר נגדיר את צפיפות החוט $= \rho_0$

(בניגוד לאינטואיציה זאת צפיפות אורכית)

$$\Downarrow$$

$$\text{I.}\quad \rho_0 \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}$$

נניח כי נחפש פתרון שאמור לפתור את I:

$$\psi = A^n(z) \cdot \cos(\omega_n t + \varphi_n)$$

ובצורה רציפה הוא אמור להיראות כך:

$$\psi(z,t) = A(z)\cos(\omega t + \varphi)$$

נציב את הפתרון הזה
ונראה לאיזו בעיה זה יביא
ומה אילו ערכים מתקבלים
...

$$-w^2 A(z)\cos(wt+\varphi) = \frac{T_0}{\rho_0}\frac{\partial^2 A(z)}{\partial z^2}\cos(wt+\varphi)$$

ולכן אפשר לצמצם את הקוסינוס!

$$-w^2 A(z) = \frac{T_0}{\rho_0}\frac{\partial^2 A(z)}{\partial z^2}$$

נשים לב שזה לא נשאר אחרי
גזירה כפולה אותו דבר עד
כדי קבוע $(-w^2)$

אזי $A(z)=C\sin(kz)+B\cos(kz)$ $(*_1)$ יקיים את המד"ר הנ"ל

עבור $k$ מהצורה: $k^2=\frac{w^2\rho_0}{T_0} \Rightarrow k=\pm\sqrt{\frac{\rho_0}{T_0}}\,w$

המינוס לא משנה, מספיק לי הפלוס כי אם נכניס מינוס ב$(*_1)$
בסינוס הוא יצא בקבוע.

נגדיר גדלים בסיסיים:

$\nu=\frac{1}{T}$ תדר $(H_z)$, $\bar{\nu}=\frac{1}{\lambda}$ מספר גל, $\lambda$ אורך גל, $k=\frac{2\pi}{\lambda}$ מספר גל זוויתי, $w=\frac{2\pi}{T}$ תדר זוויתי, $T$ זמן מחזור

ונשים לב כי:

$$\Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda}=\sqrt{\frac{\rho_0}{T_0}}\cdot\frac{2\pi}{T}=\sqrt{\frac{\rho_0}{T_0}}\,2\pi\nu \Rightarrow \nu\cdot\lambda=\sqrt{\frac{T_0}{\rho_0}}$$

ונוכל לרשום פתרון בצורה הבאה:

$$\boxed{\Psi(z,t)=\left(C\sin(kz)+B\cos(kz)\right)\cos(wt+\varphi)}$$

כאשר כבר ראינו כי $w=\sqrt{\frac{T_0}{\rho_0}}\,k$

# הרצאה - גלים

נזכיר:

בשיעור הקודם הגענו למשוואה:

(עבור רצף של מסות מחוברות בקפיצים)

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=\frac{T_0}{\rho_0}\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}$$

כאשר הצבנו פיתרון מגובה במשוואה הנ"ל:

(ניחשנו פיתרון רצוי)

$$\psi(z,t)=A(z)\cdot\cos(\omega t+\varphi)$$

$$\frac{\partial^2 A(z)}{\partial z^2}=-\frac{\rho_0}{T_0}\omega^2 A(z)$$

$$A(z)=B\cos(kz)+C\sin(kz)$$ נניח זה

$$\Downarrow$$

$$k^2=\frac{\rho_0}{T_0}\omega^2$$

$$\boxed{\omega=\sqrt{\frac{T_0}{\rho_0}}\,k\ (*)}$$

קיבלנו קשר שנובע מ2 הפיתרונות:

(הפיתרון של הזמן והפתרון של המקום)

בשיעור הקודם התחלנו לדון מה קורה כאשר המיתר קשור בקצה או לא קשור בקצה וכו':

## תנאי שפה:

עבור קשירה בקצה אחד ומבלי הגבלת הכלליות:

ת.ה 1

$$\boxed{\psi(0,t)=0}\Rightarrow[B\cos(0)+C\sin(0)]\cdot\cos(\omega t+\varphi)=0\Rightarrow B=0$$

עכשיו ניכנס עם מה שנשאר (בלי B) למשוואה הבאה:

ת.ה 2

$$\boxed{\psi(L,t)=0}\Rightarrow C\sin(kL)\cdot\cos(\omega t+\varphi)=0$$

$$\Downarrow$$

2 גורמים כדי המכפלה תתאפס: או $\underline{C=0}$ אבל לא מעניין כי

או $\sin(kL)=0 \Leftarrow kL=\pi\cdot n\ ,\ n\in\mathbb{N}$

$$k=\frac{\pi}{L}n$$

כלומר:

בהתחלה רצינו ש-k יהיה כל דבר אבל קיבלנו שהוא דיסקרטי ולכן זה אומר [illegible]

כי בהתחלה [illegible] פתרונות

$\lambda$ - האורך שצריך לעבור בשביל להגיע לאותו מקום בגל

T - הזמן שצריך לעבור כדי להגיע לאותו מקום בגל.

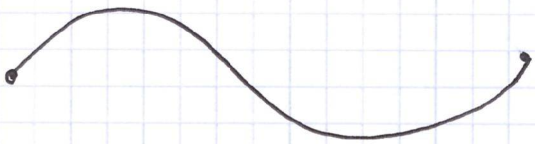
ויש לנו את הקשר:

$(*_1)\ \frac{2\pi}{\lambda} = k \overset{\text{נציב}}{=} \frac{\pi}{L} n \Rightarrow \lambda = \frac{2L}{n}\ (*_3)$ וקיבלנו אורכי גל:

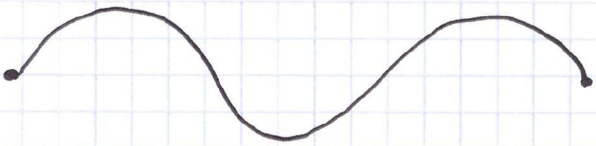
אז נשים לב לאופני התנודה שהתקבלו במיתר:

n=1:

n=2:



n=3:



זוכרים את הקשר הותיק? $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu\ (*_4)$

כי: $[T]=[s]$

כי: $\nu = [\frac{1}{s}]$

$\omega$ זה רדיאנים לשניה אחרי הכפלה ב-$2\pi$

לכן נוכל לקבל אוסף של תדירויות (אוסף דיסקרטי)

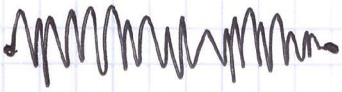
אנו מקבלים תדר

$$\boxed{\lambda = \frac{2L}{n} \qquad \nu = \sqrt{\frac{T_0}{\rho_0}} \cdot \frac{n}{2L}}\ (*_{2,3,4})$$

נציב את $\Leftarrow (*_1)$

נשים לב שאין גבול. ואפילו כמות ה-n יש אורכי גל יותר קטנים.

אבל עבור אופן תנודה כזה למשל



זה לא יכול להתקיים, החוט יתפרק כי יותר מדי כאן.

אז מתברר שהמיתר לא נותן ל-n גדולים להתקיים אצלו.

אחרת המיתר יקרע.

לקשר הזה: $\omega = \sqrt{\frac{T_0}{\rho_0}}\, k$ קוראים "יחס נפיצה"

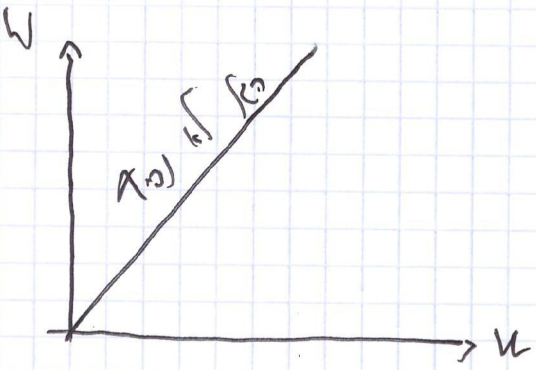
וגם הקשר הכי חשוב בפיזיקה בערך, ובמקרה שלנו הוא לינארי:

כחד

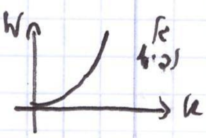
קיימים הרבה יחסי נפיצה לא דווקא לינאריים

במקרה שלנו - זה הוא לינארי

זה אומר שהגל לא נפוץ




$\Downarrow$




אז מה שקיבלנו עד כה זה הדבר הזה:
(עבור ההרמוניה ה-n-ית)

$$\Psi^n(z,t) = A^n \cos(\omega_n t + \varphi_n)\sin(k_n z)$$

$$k_n = \frac{n\pi}{L}$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{T_0}{\rho_0}}\, k_n$$

## אם נרצה יש לבנות אותו למצב המקודם:

נקבע תנאי התחלה חדשים: (כהרגלנו בקודש נתחיל מהכי קל):

תנאי ההתחלה:

$f(z)$ נתונה.

I. $\Psi(z,0) = f(z)$ האמפליטודה

II. $\frac{\partial \Psi}{\partial t}(z,t)\Big|_{t=0} = 0$ המהירות של האמפליטודה — הכי קל שלו

אז נראה איך שלנו גל נקבל

$$\Psi(z,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A^n \cos(\omega_n t + \varphi_n)\cdot\sin(k_n z)$$

(כי כיון יש אינסוף גורמים)

נתחיל מהמהירות (כי זה פשוט יותר):

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \sum_n A_n(-\omega_n)\sin(\omega_n t+\varphi_n)\cdot\sin(k_n\cdot z)\Big|_{t=0} = 0 =$$

$$= \sum_n A_n(-\omega_n)\sin(\varphi_n)\cdot\sin(k_n\cdot z)$$

לכל n: $A_n \sin(\varphi_n) = 0$

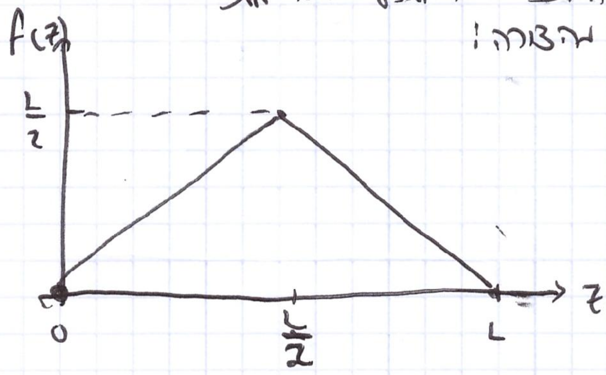
אז $\varphi_n = 0$ או $A_n = 0$ או דבר שאין גם שניהם זה בהתחלה שווים ל-0 (הם לא קבועים). נבחר $\varphi_n = 0$ לכל n. (מתוך הניסיון כבר...)

לא שוה הרבה:

קיבלנו עבור $\psi_n=0$ טור פוריה:

אז מה הם $A_n$? (העמוד הזה חשוב - לעקוב אחרי כל שלב!!!)

אז נניח ונמשוך את המיתר מהאמצע והרפינו
פונ' התחלתית שלנו תהיה מהצורה!




$$f(z)=\begin{cases} z & 0\le z\le \frac{L}{2} \\ L-z & \frac{L}{2}<z\le L\end{cases}$$

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{\pi}{L}nz\right) \Big/ \cdot \int_0^L \sin\left(\frac{\pi}{L}\cdot 3z\right)dz$$ אזי

כפול

נראה מה ההכפלה עושה - נראה שבסוף תאפס את כל הטור חוץ מ-$A_3$:

נפתור כל-צד את $A_3$
נתמודד עם צד ימין:

$$\int_0^L dz \sum_n A_n \sin\left(\frac{\pi}{L}nz\right)\cdot \sin\left(\frac{\pi}{L}3z\right)=?=$$

עבור שינוי ה-n ב-$\sum A_n$ ונקבל רק 0 האינטגרלים, ולסכום נסכום...

$$=\int_0^L dz\, \sin\left(\frac{\pi}{L}n\cdot z\right)\sin\left(\frac{\pi}{L}\cdot 3z\right)=\int_0^L\left\{\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{L}(n-3)z\right)-\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{L}(n+3)z\right)\right\}dz$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\frac{\pi}{L}(n-3)}\underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{L}(n-3)z\right)}_{0}-\frac{1}{2}\frac{1}{\frac{\pi}{L}(n+3)}\underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{L}(n+3)\right)}_{0}dz\Big|_0^L$$

עבור $n\neq3$ נקבל 0 ב-$\sum_n A_n$

כאשר עבור $n=3$:

$\left(\frac{\sin(0)}{0}\xrightarrow{n\to3}1\right)$

$$=\int_0^L dz\left(\frac{1}{2}-\cancel{\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{L}6\cdot z\right)}^{0}\right)dz=\frac{L}{2}$$

כי עבור כל ה-$n\neq3$ התאפסו.

$$\int_0^L \sin\left(\frac{\pi}{L}\cdot 3z\right)f(z)dz=\frac{L}{2}A_3 \Rightarrow$$

מצאנו את $A_3$, יש!

$$\boxed{A_3=\frac{2}{L}\int_0^L \sin\left(\frac{\pi}{L}\cdot 3\cdot z\right)f(z)dz}$$

$\Downarrow$

אז באופן כללי:

$$\boxed{A_m=\frac{2}{L}\int_0^L \sin\left(\frac{\pi}{L}mz\right)f(z)dz}$$

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{\pi}{L} n\cdot z\right)$$

וראינו בהרצאה כלל עבור $A_n$:

$$A_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(z)\sin\left(\frac{\pi}{L}\cdot n\cdot z\right)dz$$

המקרה שלנו: ("$\wedge$")

$$A_n=\frac{2}{L}\int_0^{\frac{L}{2}} \underbrace{z\sin\left(\frac{\pi}{L}\cdot n\cdot z\right)dz}_{:\mathrm{I}}+\frac{2}{L}\int_{\frac{L}{2}}^{L} \underbrace{(L-z)\sin\left(\frac{\pi}{L}n\cdot z\right)dz}_{:\mathrm{II}}$$

$$\mathrm{II}.=\frac{2}{L}\int_{\frac{L}{2}}^{L}(L-z)\sin\left(\frac{\pi}{L}\cdot n\cdot z\right)dz =$$

$$z'=L-z$$
$$dz'=-dz$$

$$=\mathrm{II}=-\frac{2}{L}\int_{\frac{L}{2}}^{0} z'\sin\left(\frac{\pi}{L}n(L-z')\right)dz'=\frac{2}{L}\int_{\frac{L}{2}}^{0} z'\sin\left(\pi n\left(\frac{z'}{L}-1\right)\right)dz'=$$

נחליף משתנים ונציב אותם

לא כתבתי ה-n

$$=-\frac{2}{L}\int_0^{\frac{L}{2}} z'\sin\left(\pi n\frac{z'}{L}-\pi n\right)dz'=$$

$$=-\left(\frac{2}{L}\right)(-1)^n\int_0^{\frac{L}{2}} z'\sin\left(\frac{\pi n z'}{L}\right)dz$$

לא קיבלתי את זה בכיתה כי הוא לא הסביר את זה טוב.

נשים לב ש-II נראה כמו I חוץ מה-$(-1)^n$ הזה והמינוס מקדם.

$$A_n=\mathrm{I}+\mathrm{II}=\frac{2}{L}\left(1-(-1)^n\right)\int_0^{\frac{L}{2}} z'\sin\left(\frac{\pi n z'}{L}\right)dz'$$

נשים לב שעבור כל ה-n הזוגיים $A_n$ מתאפס.

נזכיר שאם נציב $n=2p+1$ כאשר $n$ אי זוגי!!:

$$A_{2p+1}=\frac{4}{L}\int_0^{L/2} z\sin\left(\frac{\pi}{L}(2p+1)z\right)dz=\frac{4(-1)^p\cdot L}{\pi^2(2p+1)^2}$$

אני לא פותר אינטגרל

והוא אמר שאני צריך להראות בגרפים שמתכנס את הסכום הלזה עד $n=10$
כי השאר כל ה...

סוף

תזכורת:

בשיעור הקודם - הכפלנו ב $\int_0^L \sin(k_m z)\,dz$ (פונ׳ מאותו סוג רק באינדקס m)

וזה היה צריך לגזור $A_n$ ב $t=0$.

$$\int_0^L f(z)\sin(k_m z)\,dz = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \int_0^L \sin(k_n z)\sin(k_m z)\,dz = (*)$$

כאשר:

$$\int_0^L \sin\left(\frac{\pi}{L} n z\right)\sin\left(\frac{\pi}{L} m z\right)dz = \begin{cases} 0 & n\neq m \\ \frac{L}{2} & n=m \end{cases} = (*)$$

שבה $\delta_{m,n}$ (דלתא של קרוניקר)

פונ׳ ששווה ל-1 רק כש $n=m$ שימושי לכתוב זוג פונקציות A מסכל- סכומים עם אינדקסים ארוכים שונים...

כאשר: $\boxed{\delta_{m,n} = \begin{cases} 0 & n\neq m \\ 1 & n=m \end{cases}}$

$$(*) = \frac{L}{2}\delta_{m,n}$$

לסיכום קיבלנו:

$$(*) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{L}{2}\delta_{mn} = \frac{L}{2}A_m$$

לכן

$$A_m = \frac{2}{L}\int_0^L \Big(\underbrace{\wedge}_{\psi \text{ התחלתי } t=0}\Big)\sin\left(\frac{\pi}{L} m z\right)dz$$

נבחין בכל הכח ל-m יש אי זוגיים ע״י:

$$m = 2P+1 \qquad P = 0,1,2,\ldots$$

וקיבלנו:

$$A_{2P+1} = \frac{4(-1)^P L}{\pi^2 (2P+1)^2}$$

לכן:

$$\psi(z,t) = \sum_{P=0}^{\infty} \frac{4(-1)^P L}{\pi^2 (2P+1)^2}\sin\left(\frac{\pi}{L} z(2P+1)\right)\cos\left(c\frac{\pi}{L}(2P+1)t\right)$$

האם $\psi(-z,t) \overset{?}{=} -\psi(z,t)$

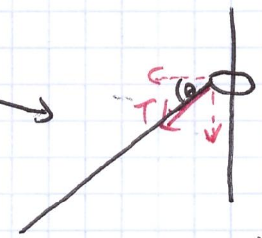
אבל מוגדר לקטע $[0,L]$ נשים לב כי קיבלנו

פונ׳ אנטי סימטרית (פונ׳ אנטי סימטרית = פונ׳ אי זוגית ז״א $f(-x)=-f(x)$)

נניח מקרה יותר קשה שיש לולאה במקום חיבור של החוט באחד מהקצוות ולכן הטיפול בצד הזה יכול לנוע ונקרא לדבר הזה:

## מיתר חופשי:


כאשר אם נתבונן לעומק נראה:




חסר יחידות

$$F_y = -T\frac{\partial\psi}{\partial z} = -T\sin\theta \underset{\substack{\text{בזוית}\\\text{קטנה}\\\text{(לא למה)}}}{\approx} -T\tan\theta = -T\frac{\partial\psi}{\partial z}$$

הטבעת אינסופית דקה שלא תפעל לו תאוצה אינסופית והוא עושה זאת ע"י לדאוג ש $\frac{\partial\psi}{\partial z}$ יהיה שווה ל-0

כי: $m\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = F_y$ אבל $m=0$ אז $\frac{\partial\psi}{\partial z}=0$

תמיד אבל תמיד במיתר חופשי כי בצד החופשי המיתר ינוע מעלה-מטה לפי הצורך בשביל איך שלא לעמוד ולהפעיל כוח אינסופי.

אז תנאי השפה שלנו יהיו:

$\psi(0,t)=0$ — בכל רגע ורגע החוט ידאג להיות אופקי בעמוד השני.

$\frac{\partial\psi}{\partial z}(L,t)=0$ — כאשר תנאי שפה זה "לכל זמן - בקצוות".

נציב את הפיתרון שהמצאנו פעם:

$$\boxed{\psi(z,t) = \left(A\cos(kz) + B\sin(kz)\right)\cos(\omega t+\varphi)}$$

ונפתור את משוואת הגל, בבדיקה! $\boxed{\omega = ck}$

$$\psi(0,t)=0 \underset{\text{לכן}}{\Longrightarrow} A=0$$

$$\psi(z,t) = B\sin(kz)\cos(\omega t+\varphi)$$

ולא נשכח להציב גם:

$$\left.\frac{\partial\psi}{\partial z}\right|_{z=L} = 0 \Rightarrow B\cos(kL)=0$$

אנחנו לא יכולים לאפס גם את B - כי אז קיבלנו פיתרון טריוויאלי

אז $\cos(kL)=0$

מה שאומר ש- $kL = \frac{\pi}{2}+\pi n$

אחרי קצת אלגברה -

$$k = \frac{\pi}{2L} + \frac{\pi}{L}n \qquad n=0,1,\dots$$

פה מותר לנו לפיו שווה ל-0 כי $\frac{\pi}{2L}$ נספר להוסיף את סינוס היה "0" ולכן פה

קודם - שם

לפני קיבלנו מפעם לקבל

כאשר עבור $n=0$:

$$k = \frac{\pi}{2L}$$

אבל הגדרנו בשיעור הקודם "$\lambda$": (אורך גל)

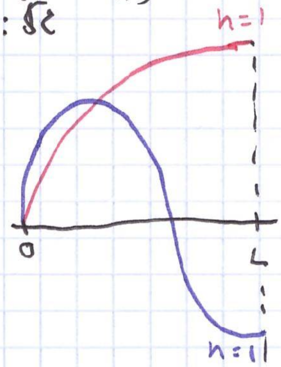
$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

אז נמצא אורך גל לכל מוד:

$\underline{n=0}$: $\frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\pi}{2L} \Rightarrow \lambda = 4L$

וזה רבע גל:

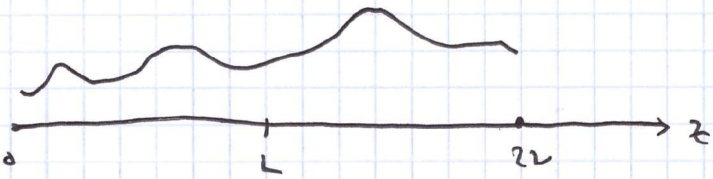
$\underline{n=1}$: $\lambda = 4\frac{L}{3}$




## טורי פוריה:

פוריה רצה לפרק פונ' כלשהי לפונ' sin ו cos. (מגשו-עממי)

נניח שיש לנו פונ' שתחומה ב $[0, 2L]$




פוריה גם לא גילה יכול לפרק את הפונ' כלשהי, סכום של:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \sin(k_n z) + B_n \cos(k_n z)$$

כאשר $k_n = \frac{\pi}{L} n$

ולפונ' הללו יש תכונה ש:

$$f(z+2L) = f(z)$$

## טורי פוריה:

(ספר "תורת פוריה והתמרות אינטגרליות" - צפרני ורבינוביץ'. אבל זה אחלה ספר שבעולם.)

הטור נראה ככה:

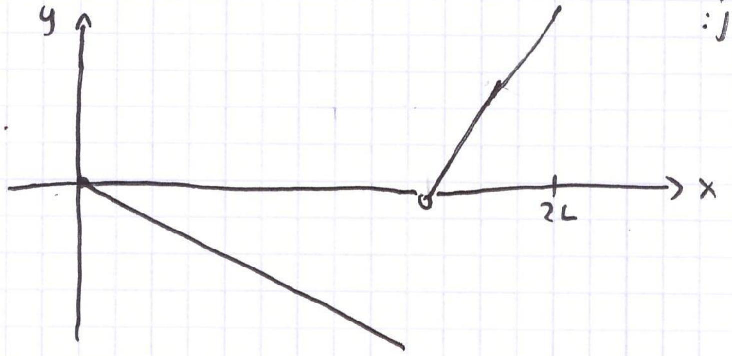
$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n\sin(k_n z)+B_n\cos(k_n z)$$

כאשר: $k_n=\frac{\pi}{L}n$

היתרון בטורים של פוריה הוא שנוכל לפונ' שמקבלות את הקודקודים והערך לא משנה.

בסה"כ $f(z), f'(z)$ צריכות להיות רציפות למקוטעין.

למשל הפונ':




לפונ' הזאת - היא אינה מחזורית והיא יתכנס ממוצע בקצוות גם הוא לא יתכנס בנקודה שונה - אלה יתכנס לממוצע הקפיצות.

בנוסף כי תכונה של טור פוריה שכדאי לזכור: $f(z+2L)=f(z)$

נראה זאת:

$$\sum_{n=0}^{\infty}A_n\sin(k_n(z+2L))+B_n(\cos(k_n(z+2L)))=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}A_n\sin(k_n z+k_n 2L)+B_n\cos(k_n\cdot z+2Lk_n)=$$

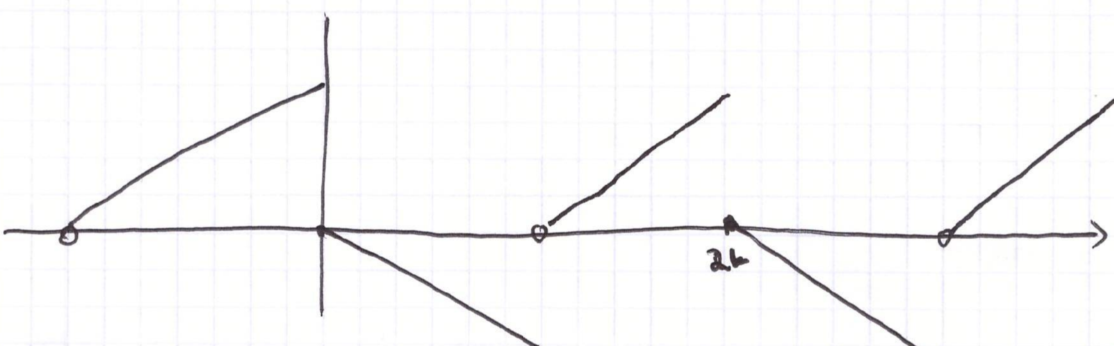
$$\boxed{k_n=\frac{\pi}{L}n}$$

והפלא ופלא:

$$=\sum_{n=0}^{\infty}A_n\sin\left(\frac{\pi}{L}nz\right)+B_n\cos\left(\frac{\pi}{L}nz\right)$$

אני בטור פוריה מחוץ לאיזור בה מוגדרת הפונ' $[0,2L]$

הפונ' תמשיך להיראות אותו דבר (מחזורית):




מסקנה:

אז אפשר לעשות טור פוריה על פונ' מחזוריות או פונ' מקוטעת על $[0,2L]$

ד׳

אם $n=0$ כ קבוע:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n\sin(k_nz)+B_n\cos(k_nz)\underset{n=0\ \text{עבור}}{=}B_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\left(\frac{\pi}{L}nz\right)+B_n\cos\left(\frac{\pi}{L}nz\right)$$

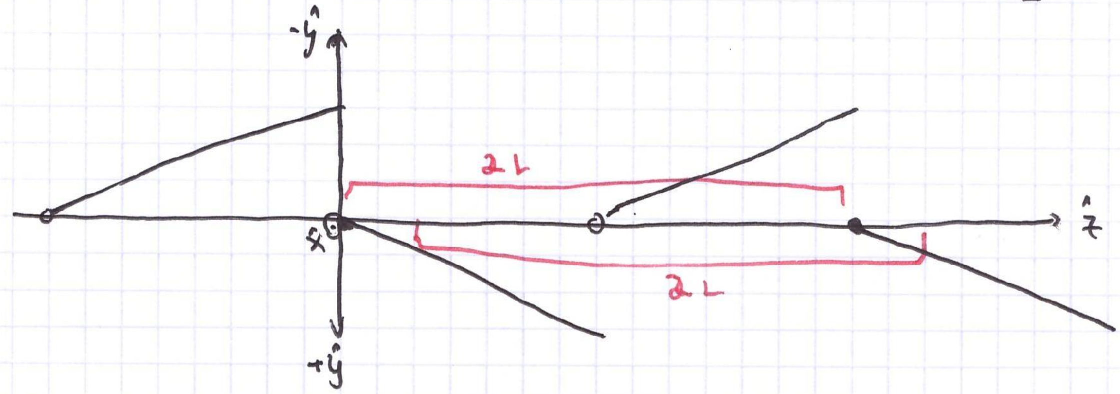
אם נבצע אינטגרל על $f$ נמצא את $B_0$

בגלל המחזוריות הפונקציה אפשר לבחור כל נקודה התחלה ולעשות אינטגרל על $2L$

$$\int_0^{2L}f(z)dz=\int_{z_1}^{z_2}f(z)dz=\underbrace{\int_{z_1}^{z_1+2L}B_0dz}_{\text{I}}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\underbrace{\int_{z_1}^{z_1+2L}dz\sin\left(\frac{\pi}{L}nz\right)}_{\text{II}}+B_n\underbrace{\int_{z_1}^{z_1+2L}dz\cos\left(\frac{\pi}{L}nz\right)}_{\text{III}}=(*_1)$$

כי לא משנה מאיזה נקודה נספור את האינטגרל תמיד נקבל אותו ערך אם

ב-$2L$:




$(*_1)\Rightarrow$

$$\text{I}=B_0 2L$$

$$\text{II}.=\int_{z_1}^{z_1+2L}\sin\left(n\frac{\pi}{L}z\right)dz=\left.\frac{-\cos\left(\frac{\pi}{L}nz\right)}{\frac{\pi}{L}n}\right|_{z_1}^{z_1+2L}=$$

$$=\frac{1}{\frac{\pi}{L}n}\left[\cos\left(\frac{\pi}{L}n(z_1+2L)\right)-\cos\left(\frac{\pi}{L}n(z_1)\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{\frac{\pi}{L}n}\left[\cos\left(\frac{\pi}{L}nz_1+2\pi n\right)-\cos\left(\frac{\pi}{L}n\right)\right]=0$$

$$\text{III}.=\int_{z_1}^{z_1+2L}\cos\left(\frac{\pi}{L}nz\right)=0$$

אבל נכון בסינוס זה בלי חלקי 2L:

כי ה- $B_0$ כבר מצאנו

$$B_0=\frac{1}{2L}\int_{z_1}^{z_1+2L}dz\,f(z)$$

וככה נמצא את $A_n$ ...

$$\int_{z_1}^{z_1+2L} f(z)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{L}mz\right)dz = \int_{z_1}^{z_1+2L} \underbrace{B_0\cdot\sin\left(\frac{\pi}{L}mz\right)}_{\mathrm{I}} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \int_{z_1}^{z_1+2L} \underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{L}nz\right)\sin\left(\frac{\pi}{L}mz\right)}_{\mathrm{II}}dz +$$

$$+ B_n\int_{z_1}^{z_1+2L} \underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{L}nz\right)\sin\left(\frac{\pi}{L}mz\right)}_{\mathrm{III}}dz$$

(אינם כה ארוכים:)

נבצע את האינטגרלים אחד אחד כי כל מה כבר יהיה שימושי:

פונק' מחזורית

$$\mathrm{I} = 0$$

$$\mathrm{II} = \int_{z_1}^{z_1+2L}\left[\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{L}(n-m)z\right) - \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{L}(n+m)z\right)\right]dz =$$

לפי הנוסחה:

נשים לב כי אם $n \neq m$ האינטגרנד שלם 0

ואילו אם $n=m$ נקבל האינטגרנד 1 ב...

$$\mathrm{II} = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ \frac{1}{2}\cdot 2L & n=m \end{cases} = L\cdot\delta_{nm}$$

כך נמצא את $A_n$

כנ"ל

$$\mathrm{III} = \int_{z_1}^{z_1+2L}\left[\frac{1}{2}\sin\left((n+m)\frac{\pi}{L}z\right) + \frac{1}{2}\sin\left((m-n)\frac{\pi}{L}z\right)\right] = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ 0 & \end{cases}$$

לכן:

$$A_m = \frac{1}{L}\int_{z_1}^{z_1+2L} f(z)\sin\left(\frac{\pi}{L}mz\right)dz$$

$$B_0 = \frac{1}{2L}\int_{z_1}^{z_1+2L} dz\, f(z)$$

שימו לב להבדל!!!...

אז נשאר רק למצוא את $B_n$ בדרך הזה-

בשביל למצוא את $B_n$ נכפיל בקוסינוס:

$$\int_{z_1}^{z_1+2L} f(z)\cos\left(\frac{\pi}{L}mz\right)dz = \underbrace{\int_{z_1}^{z_1+2L} B_0\cos\left(\frac{\pi}{L}mz\right)dz}_{=0} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \underbrace{\int_{z_1}^{z_1+2L}\sin\left(\frac{\pi}{L}nz\right)\cos\left(\frac{\pi}{L}mz\right)dz}_{=0} +$$

כמו שראינו ב-III קודם

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} B_n \underbrace{\int_{z_1}^{z_1+2L}\cos\left(\frac{\pi}{L}nz\right)\cos\left(\frac{\pi}{L}mz\right)dz}_{=L\delta_{nm}}$$

אז $f_m$ מפורק ה $m$ לכן האפסים.

ויש לנו נוסחאות למקדמים:

$$A_m = \frac{1}{L}\int_{z_1}^{z_1+2L} f(z)\sin\left(\frac{\pi}{L}mz\right)dz$$

$$B_0 = \frac{1}{2L}\int_{z_1}^{z_1+2L}$$

$$B_m = \frac{1}{L}\int_{z_1}^{z_1+2L} f(z)\cos\left(\frac{\pi}{L}mz\right)dz$$

ולפני לעשות את זה להבין...

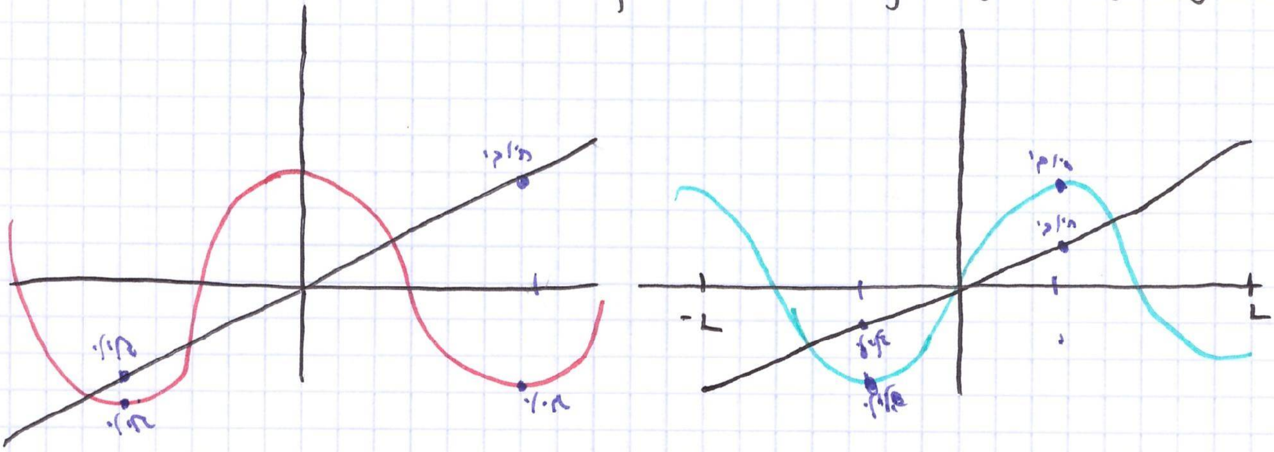
<u>תרגיל בית:</u>

להוכיח:

$$\int\cos\left(\frac{\pi}{L}nz\right)\cos\left(\frac{\pi}{L}mz\right)dz = L\,\delta_{mn}$$

$$\int\sin\left(\frac{\pi}{L}nz\right)\cos\left(\frac{\pi}{L}mz\right)dz = 0$$

סינוס זו פונק' אנטי סימטרית וקוסינוס היא פונק' סימטרית




המכפלות לכל פונק' יסומן בכחול.

כך אם נכפול את הסינוס
במספר זוגי המכפלה של כל
צד בצד ה"סימטרי" לו יש את
הצירים בסינוס המכפלה תיתן
מספר ובקוסינוס היא שהוא סימטרי
מכפלה של מספר זוגי בקוסינוס לא
משנה כי צד הסימטרי של הצד בציר
(חיובי) תמיד אותו ולכן כל הקטע שמקבל את האינטגרל...

* אין מה לכפול קווים האלה כי זה רק ... כי זה היה נכון
מאוד...

י"ז

# ההכללה של טורי פוריה בטרנספורם פוריה:

אנחנו רוצים לדבר על הבעיה של נוסחאות בגלים, כש- $L \to \infty$ ;

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{T_0}{\rho_0} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}$$

עד עכשיו דיברנו על $e^{i\omega t}$ - כעת נדבר על פישון בנפרד:

$$\psi(z,t) = e^{i(kz-\omega t)} = e^{ikz} e^{-i\omega t}$$

(סתם הוספנו $kz$)

אם נגזור פעמיים נקבל את יחס הנפיצה (גזירה לפי משוואת הגלים):

$$-\omega^2 e^{i(kz-\omega t)} = \frac{T_0}{\rho_0}(-k^2) e^{i(kz-\omega t)}$$

אז אפשר לבודד ולקבל את יחס הנפיצה:

$$\boxed{\omega^2 = \frac{T_0}{\rho_0} k^2} \Rightarrow \boxed{\omega = \pm\sqrt{\frac{T_0}{\rho_0}}\, k}$$

תנאי שפה מחזורי: (כאשר $L \to \infty$) (=מבחינתנו לוקחים את n מ- $-\infty$ ל- $+\infty$).

$$\psi(z+L,t) = \psi(z,t)$$

$$\Downarrow$$

פיצול פורמלי למשוואת הגלים.

$$\psi(z,t) = e^{ik(z+L)-i\omega t} = e^{ikz-i\omega t}$$

$$\Downarrow$$

$$e^{ikL} = 1 \Rightarrow k = \frac{2\pi}{L} n$$

$$e^{i\frac{2\pi}{L}nz} \not\propto e^{i\frac{2\pi}{L}(-n)z}$$

(לא שווה עד כדי מקדם משותף (לא פרופורציוני))

כאן הפקטור 2 הבה לנסות שנלך מ- $-\infty$ עד $\infty$ נקבל איש כמו $A_n$

טור פוריה מורחב

$$\boxed{f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\frac{2\pi}{L}nz} \cdot \alpha_n}$$

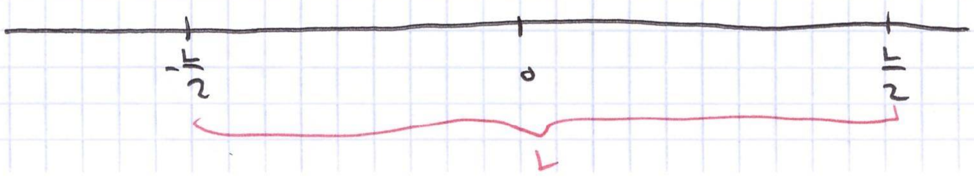
במצב של מיתר אינסופי אנחנו לא יכולים לכתוב את הפישון:

כאשר כעת ממשי והפיסיקלי המקדמים $\alpha_n$ לא לגמרי לבד.

אם נבחר את ה $\alpha_n$ הנכונים כך ש $f(z)$ ממשי הפישון יהיה ממשי.

כאשר הרעיון הוא לוקח בסוף את L לאינסוף.

אם נסתכל על L סופי:



אם נכפול ב - $e^{i\frac{2\pi}{L}mz}$ ונקבל:

$$\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(z)\cdot e^{-i\frac{2\pi}{L}mz}\,dz=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\alpha_n\underbrace{\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} e^{i\frac{2\pi}{L}nz}\,e^{-i\frac{2\pi}{L}mz}\,dz}_{(*)}=$$

$$(*)\underset{(2*)}{=}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} e^{i\frac{2\pi}{L}(n-m)z}\,dz=\left.\frac{e^{i\frac{2\pi}{L}(n-m)z}}{i\frac{2\pi}{L}(n-m)}\right|_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}=$$

$$=\frac{1}{i\frac{2\pi}{L}(n-m)}\left[e^{i\pi(n-m)}-e^{-i\pi(n-m)}\right]=\begin{cases}0 & n\neq m\\ L & n=m\end{cases}=L\,\delta_{n,m}$$

אפשר לראות ב-(2*) שלפני האינטגרציה החלק

אז קיבלנו כי:

$$\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(z)\,e^{-i\frac{2\pi}{L}mz}\,dz=L\sum_{n=-\infty}^{\infty}\alpha_n\,\delta_{mn}\underset{\text{נסכום}}{=}L\,\alpha_m$$

לכן נוסחת המקדמים תיראה כך:

$$\alpha_m=\frac{1}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(z)\,e^{i\frac{2\pi}{L}mz}\,dz\qquad\left(\text{כאשר: } f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{i\frac{2\pi}{L}nz}\,\alpha_n\right)$$

והנה לנו טור פורייה נוח (שימוש במספרים קומפלקסים).
אז עכשיו יש לנו 2 כלים מתמטיים לקירוב של פונ' ב $t=0$
אחד קומפלקסי ואחד ממשי ל הבעיה.
וזה עוד לפני שהשאפנו את L לאינסוף...

כ״ו

## גלים - הרצאה:

תנאי שפה

$$\psi(z+L,t)=\psi(z)$$

תנאי שפה מחזוריים (כאשר המוט באורך ארוך)

הפיתרון:

$$\psi=e^{i(kz-Wt)}$$

הוי זה פיתרון פורמלי למשוואת הגלים

$$e^{ik(z+L)}=e^{ikz}$$

$$e^{ikL}=1$$

$$k_n=\frac{2\pi}{L}n$$

$$k_n=\frac{2\pi}{\lambda_n}$$

יחס הנפיצה ($W$ כפונ׳ של $k$)

אנחנו מניחים לבנות שאנו כותבים את $f(z)$ באמצעות סינוסים או קוסינוסים או בצורה של:

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\alpha_n e^{ik_n z}$$

### טרנספורם פוריה:

מה שעושים זה נכפיל את 2 האגפים ב- $e^{-ik_m z}$ ונעשה אינטגרל.

$$f(z)\cdot e^{-ik_m z}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\alpha_n\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}e^{i(k_n-k_m)z}\,dz=L\cdot\delta_{n,m}$$

וזאת הדרך למצוא נוסחאות המקדמים בסה״כ...

כש $n\neq m$ מתקבל אפס:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\alpha_n L\,\delta_{m,n}\underset{m\neq n}{=}L\,\alpha_m$$

ולכן:

$$\alpha_m=\frac{1}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}f(z)\cdot e^{-ik_m z}\,dz$$

האם במתמטיקה יכולה להיות מסובכת

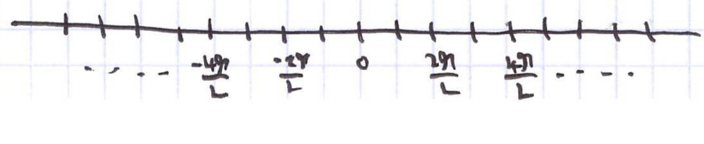
כי הפיזיקה בכלל מגיעה וככה ה-$\alpha$ אמורים להיות גדולים...

נציב את $\alpha_m$ ונקבל כי:

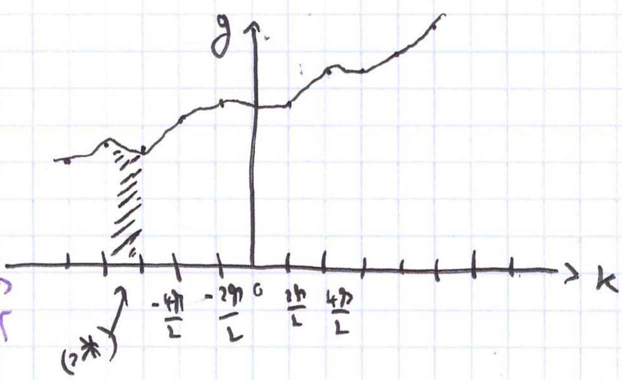
$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\underbrace{\left[\frac{1}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}dz'\,f(z')\cdot e^{-ik_n z'}\right]e^{ik_n z}}_{g(k_n)}$$

ועכשיו ניקח את $L$ לאינסוף

והנה יש לנו $k$:



מתקבל גרף $g(k_n)$



כשנעשה לב מה קורה
כש L גדל לאינסוף...
זמן

(*) האינטגרל הוא הסכימה בתנאי שבסכימה אני מכפיל במרחק בין 2 נק'.

לכן נוכל לרשום סכום כאינטגרל בצורה הבאה:

$$\boxed{\frac{2\pi}{L}\sum_{k_n} \qquad = \frac{L}{2\pi}\int dk = \frac{1}{\frac{2\pi}{L}}\int dk}$$

בגבול שבו כל אינטגרל

כאשר סכימה על n היא סכימה על $k_n$ (זה אותו דבר מבחינתי)

$\left(k_n = \frac{2\pi}{L} n\right)$ (כי יש ביניהם תלות לינארית)

$$\sum_n = \sum_{k_n}$$

אז נחליף את הסכימה באינטגרל:

לב כבר כל k
לא משנה

$$f(z) = \frac{\cancel{L}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk\left[\frac{1}{\cancel{L}}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dz' f(z') e^{-ikz'}\right] e^{ikz} = (*)$$

וזה קירוב של הסכום של $g(k_n)$ במעבר הקודם
כש L הולך לאינסוף. ובפרט תיקון $\left(\frac{L}{2\pi}\right)$ חשוב...
אז נשאיף את L לאינסוף

$$(*) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk\left[\int_{-\infty}^{\infty} dz' f(z') e^{-ikz'}\right] e^{ikz} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} dk\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} dz' f(z') e^{-ikz'}\right] e^{ikz} =$$

נפצל את $\frac{1}{2\pi}$

בקלט הזה ויבדנו
נקרא את תנאי השפה
כי עברנו לאינסוף
לכן נקרא לזה
$F(k) = \tilde{f}(k)$
או

-הטל הזה-הוא אינטגרל
לפי z אז הוא פונ' של k.

וזה טרנספורם פורייה

התרנספורמציה

$$F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(z) e^{-ikz} dz$$

התרנספורמציה ההפוכה

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F(k) e^{ikz} dk$$

אוסף של מקדמים (מספרים)

זה הפונ' המחזורית ($e^{\dots}$)

ונשים לב כי זה טרנספורם פורייה והוא סימטרי.
בצורה הפונ' (שהן מחזוריות) לפי z הפונ' אחרי 2 צורות
תלויות לצורה על בקטור k.
הטרנספורם פורייה הזה הופך את כל המקדמים לפי $A_{ik}$ ק"ח.

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dk\left[\int_{-\infty}^{\infty}dz'f(z')e^{-ikz'}\right]e^{ikz}=$$

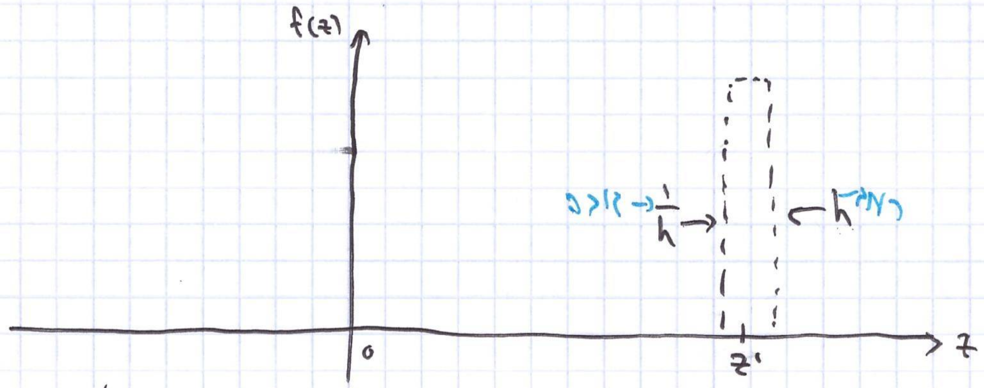
הוא רוצה להראות לנו נס לפני סוף השיעור - הוא מחליף את מקומות האינטגרלים של dk ו-dz'!

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dk\int_{-\infty}^{\infty}dz'f(z')e^{ik(z'-z)}\Big]=$$

זה מותר כי אנחנו מחליפים את z ב-z' (עכשיו נחליף מקומות):

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dz'\int_{-\infty}^{\infty}dk\,\underbrace{f(z')}_{\text{קבוע הכפל}}e^{-ik(z'-z)}=\int_{-\infty}^{\infty}dz'f(z')\underbrace{\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dk\,e^{-ik(z'-z)}\right]}_{\text{המשהו}}$$

פונק שנותנת לאינטגרל את ערכה בגלל משהו - מה זה? נראה מהצורה הבאה:




כשה-h קטן הפונקציה נהיית צרה וגבוהה (השטח שלה הוא שווה ל-1)
(הפסה)

ואנחנו כופלים את f(z) בפונקציה ומבצעים אינטגרל ואז אנחנו מקבלים

$$\int f(z')\cdot\overbrace{\delta(z-z')}^{\text{המשהו}}dz=f(z')$$

כי הרי שלחנו את h לאינסוף והוא גרם לפונק' ה-א להצטמצם
וזה בדיוק הפונקציה כמו שאת הולך זה.

11.11 

# טרנספורם - פוריה המשך הרצאה:

בשיעור הקודם קיבלנו פתרונות מהצורה:

(1). $e^{ikz-i\omega t}$      (3). $\cancel{e^{-ikz-i\omega t}}$

(2) $e^{ikz+i\omega t}$      (4). $\cancel{e^{-ikz+i\omega t}}$

כי לקחנו $n$ חיוביים ולכן $k$ חיובי $\left(k=\frac{2\pi}{L}n\right)$

אז מספיקים הפתרונות (1) ו-(2)!

אז ראינו בשיעור הקודם שעבור קפיץ חצי אינסופי

כשאנחנו רוצים לפתח את $f$ לטור פורייה מהצורה:

$$f(z)=\sum_n \alpha_n e^{ik_n z}$$

וראינו שזה אפשרי אם אנו לוקחים את האלפא שלנו כך ש:

$$\alpha_n=\frac{1}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(z')e^{-ik_n z'}dz'$$

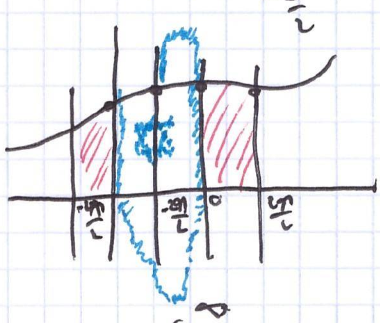
$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(z')e^{-ik_n z'}dz'\right]e^{ik_n z}= \quad !$$

וראינו שסכום $A$ הוא בעצם סכום $A$ כי הם בקשר לינארי

לכן:

$$=\frac{1}{L}\sum_k\left[\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(z')e^{-ik_n z'}dz'\right]e^{ikz}=$$

(נחליף סכום באינטגרל)




וראינו גם ש-$k$ נהיים כל כך צפופים

כשאנו לוקחים את $L$ לאינסוף ולכן

זה כמו סכום רימן שנותן בגבול אחרון

אינטגרל ולכן: (נחליף סכום באינטגרל)

$$=\frac{L}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dk\,\frac{1}{\cancel{L}}\left[\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(z')e^{-ik_n z'}\right]e^{ikz}=$$

ורצינו אפשר לקחת קורס ניתוח קסמים

$\lim$ ... $=1$

כשאני לוקח את L לאינסוף מ במקום טור הופך לכך:

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dk\,e^{ikz}\int_{-\infty}^{\infty}f(z')e^{-ikz'}dz' \;=(*_1)$$

אצלנו מ קבועים אנחנו נוהגים ל הפוך את $\frac{1}{2\pi}$ ל: $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$
ולצרף אותם לפני כל אינטגרל. לכן (אחרי חלוקת הקבועים)
ה-2 שני חלקים $f(k)$ ו-$f(z)$ הם:

כאשר

$$F(k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(z')e^{-ik_nz'}dz'$$

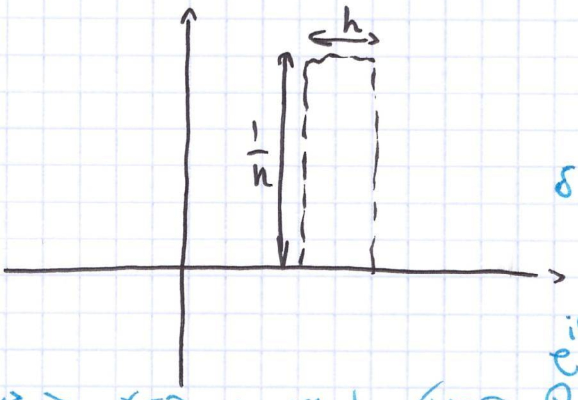
$$f(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}F(k)\,e^{ik_nz}dk$$

אז ב-$(*_1)$ אנחנו אומרים לקבל:

$$(*_1)=\int_{-\infty}^{\infty}dz'\,\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dk\,f(z')e^{ik(z-z')}=\int_{-\infty}^{\infty}dz'\,f(z')\,\frac{1}{2\pi}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}dk\,e^{ik(z-z')}}_{\text{וקיבלנו פונק'}}$$

כי אנחנו מבצעים אינטגרל על z' ולא על z והוא מבחינתנו קבוע.

יש הפרש בין z ל-z' והדבר הזה הוא לא משהו פשוט



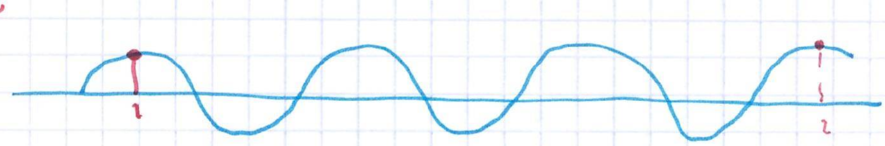

אז נרצה להגדיר δ
$\delta(z-z')$ כאשר:

$$\delta(z-z')=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dk\,e^{ik(z-z')}$$

וזאת ע"י הסכום
של פונק' מחזוריות $e^{ik(z-z')}$

אם נעשה אינטגרציה על הפונק' מחזורית קטע בגודל מסוים
עד? נקבל אחרי הסכום גובה אז נקבל באינטגרל שבסוף
גדול של הסינוס או הקוסינוס: (ציור להמחשה):

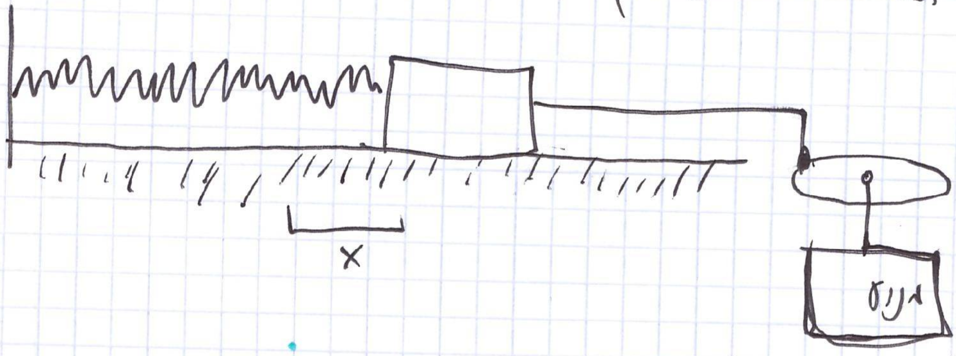
בנק' 2 גדלה. בגלל




האינטגרל יהיה 0 אבל אם $z=z'$ אנחנו עושים אינטגרל על 1
ולכן נקבל $\infty$ (הפוך מקודם) וזה המבולבל שיצא אותם

# אוסילטורים מאולצים מרוסנים:

כאן נרצה לטפל את העיקר את המסה עם האויר בלבד בגוף הבא:




$$M\ddot{x} + \cancel{M}\Gamma\dot{x} + \cancel{M}\omega_0^2 x = F(t) \overset{\text{כ"ו}}{\Rightarrow} r^2 + \Gamma r + \omega_0^2 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = \frac{-\Gamma \pm \sqrt{\Gamma^2 - 4\omega_0^2}}{2}$$

משוואה אופיינית

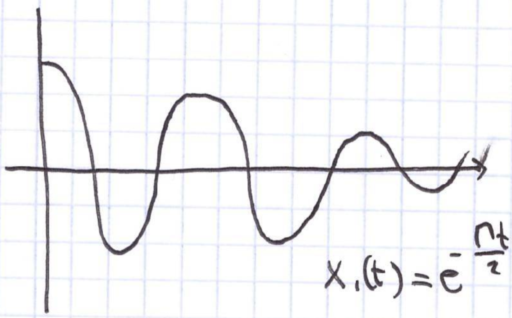
$-\omega_1$

נטפל את מקרים:

מקרה I: $F=0$ , $\Gamma \neq 0$ ; $2\omega_0 > \Gamma$ (ריסון חלש)

נכתוב פיתרון מהצורה:

$$x_1 = e^{-t/2\tau}(A_1 \sin\omega_1 t + B_1 \cos\omega_1 t)$$



כאשר $\tau = \frac{1}{\Gamma}$

$$\omega_1^2 = \omega_0^2 - \frac{1}{4}\Gamma^2 \quad (*_2)$$

פיתרון הכי כללי של המקרה הנ"ל:

$$x_1(t) = e^{-\frac{\Gamma t}{2}}\left\{x_1(0)\cos(\omega_1 t) + \left[\dot{x}_1(0) + \frac{1}{2}\Gamma x_1(0)\right]\frac{\sin(\omega_1 t)}{\omega_1}\right\}$$

מקרה II; $\Gamma > 2\omega_0$ : (גרוסן)

פה אנחנו רואים שמה נמצא מתחת לשורש ב$(*_2)$ שלילי

ולכן מרוכב - אז הסולקים הופכים לגבלי וכיפשאים:

בסך $\pm\frac{\Gamma}{2}$ יהיה מרוכב אז מקבלים כאן

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{1}{4}\Gamma^2} = \sqrt{(-1)\left(\frac{1}{4}\Gamma^2 - \omega_0^2\right)} = \pm i|\omega_1|$$

$$\cos(i|\omega_1|t) = \frac{e^{i(i\omega_1 t)} + e^{-i(i\omega_1 t)}}{2} = \cosh(|\omega_1|t)$$

גאוני!

$$\sin(i|\omega_1|t) \to \sinh(|\omega_1|t)$$

וכריסון קריטי $\Gamma = 2\omega_0$:

$$x_1(t) = e^{-\frac{\Gamma t}{2}}\left\{x_1(0)\cos(\omega_1 t) + \left[\dot{x}_1(0) + \frac{1}{2}\Gamma x_1(0)\right]t\right\}$$

הוא מחק...

כי $\omega_1 \to 0$

$$\lim_{\omega_1 \to 0}\frac{\sin(\omega_1 t)}{\omega_1} = t\,!$$

נשים לב כי $\omega_0$ הוא של המקור ו $\omega_1$ הוא של המנוע.

## $\Gamma << \omega_0$ ; $F \neq 0$ :

ראינו שכשמפסיקים את הלא הומוגני דועך, ונשארים באמת מסובלים

$\Gamma$ גדל מספיק. נגיד כמו בנדנדה שלא עוצרת הרבה זמן

המסה תנוע משהו עם תדר של מישהו עצמו ולכן הוא "מנחש"

והכוח יעשה עם אותו $\omega$ את הנדנדה:

$$M\ddot{x} + M\Gamma\dot{x} + M\omega_0^2 x = F_0\cos(\omega t)$$

ולכן בשביל לכוון צמודים לאקספוננציאלים נקרא ( $\eta_0 = \frac{F_0}{M}$ )

סיוח אם כבה

ונציב הדבר הבא:

$$x = A_{ab}\sin(\omega t) + A_{el}\cos(\omega t)$$

נסביר מה זה

לפי השוויון הבא

$$\frac{F_0}{M} = \omega_0^2 \eta$$

כאשר $\ddot{x} + \Gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{M}\cos(\omega t)$

ועכשיו נציב בגבול הספורה:

$$-\omega^2\left(A_{ab}\sin(\omega t) + A_{el}\cos(\omega t)\right) + \Gamma\cdot\omega\left(A_{ab}\cos(\omega t) - A_{el}\sin(\omega t)\right) +$$
$$+\omega_0^2\left(A_{ab}\sin(\omega t) + A_{el}\cos(\omega t)\right) = \frac{F_0}{M}\cos(\omega t)$$

וקיבלנו כי:

$$(-\omega^2 A_{ab} - \Gamma\omega A_{el} + \omega_0^2 A_{ab})\sin(\omega t) + \left(-\omega^2 A_{el} + \Gamma\omega A_{ab} + \omega_0^2 A_{el} - \frac{F_0}{M}\right)\cos(\omega t) = 0$$

ונקבל ש:

$$\boxed{A_{ab} = \frac{\Gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} A_{el}}$$

$$(\omega_0^2 - \omega^2) A_{el} + \Gamma\omega A_{ab} = \frac{F_0}{M}$$

$$(\omega_0^2 - \omega^2) A_{el} + \frac{\Gamma^2\omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2} A_{el} = \frac{F_0}{M}$$

ונקבל

$$\boxed{A_{el} = \frac{F_0}{M}\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2) + \Gamma^2\omega^2} \qquad A_{ab} = \frac{F_0}{M}\frac{\Gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2) + \Gamma^2\omega^2}}$$

בקצור ניחשנו $Ae^{i\omega t + i\phi}$ — עכשיו חשוב מה הקשר בין 2 הפקטורים. צם חשוב...

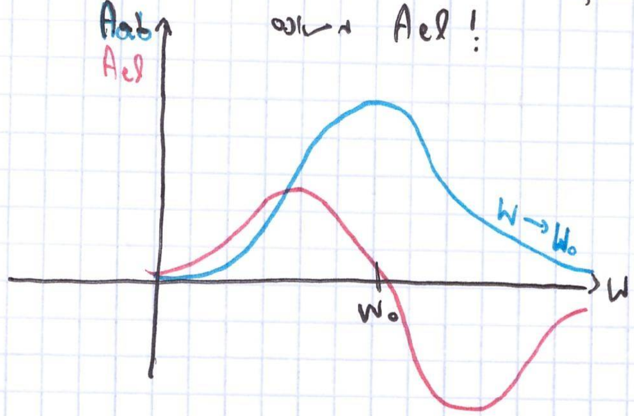
הנה אין אין יותר דף (נוסחאות)

אז אם $\omega \to 0$ נקבל $A_{ab}$ אפס ממש

אם $\omega \to \omega_0$ נקבל $A_{ab}$ חיובי - נצייר:

$A_{el}$ מתאפס!

קיצר נצייר: $\begin{pmatrix} \omega \to 0 \\ \omega \to \infty \\ \omega \to \omega_0 \end{pmatrix}$




כך עוד שיש לנו $\omega$ מרוחק מ-$\omega_0$ יש לנו סוג של איזון

כך עוד ש-$\omega \to \omega_0$ אנחנו מקבלים מקסימום תגובה ($A_{ab}$) ובולט ה הסינוס כשהמנוע עובד בקוסינוס. יש הפרש פאזה ביניהם - יעני כשהמנוע ב-0 המסה ב-$\frac{\pi}{2}$ וכו'.

מה שמעניין בסעיף ובכלל בפרק הקודם ישמש אותנו. המנוע בשביל להזיז את המסה צריך לעבוד כי יש חיכוך ונרצה לשאול את עצמנו מהו ההספק שהמנוע מבזבז:

$$P = F \cdot V = F \cdot \dot{x} = F(t) \cdot \dot{x}(t) =$$

$$= \cos(\omega t)\left(A_{ab}\cos(\omega t) - A_{el}\sin(\omega t)\right)$$

נמצא את האופן שהוא הספק ממוצע לזמן מתלוי כי ההספק המתקבל הוא בכן מקרה הספק ממוצע.

הקוסינוס כפול קוסינוס יתן לו תמיד מספר כי הוא תמיד חיובי והקוסינוס כפול סינוס לפעמים חיובי לפעמים שלילי אז רק כפול הקוסינוס נשאר: (נצטרך בתחילת אינטגרל את $\cos^2(\omega t)$...)

$$\langle \bar{P} \rangle = \frac{1}{T}\int_t^{t+T} dt = \frac{1}{2} F_0 \omega A_{ab} =$$

וזה למה קוראים ל-$A_{ab}$ אבסורבשיין כי מתבזבז שם אנרגיה.

$$= \frac{F_0}{M}\frac{\Gamma \omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \Gamma^2 \omega^2}$$

וזה ההספק שהמנוע צריך לספק בשביל להשאיר תנועה לנו בתדר $\omega$.

בס"ד

ברזוננס (שהוא דבר נבחר בקפידה) $\omega=\omega_0$

$$\langle P\rangle\Big|_{\omega_0}=\frac{1}{2}\frac{F_0^2}{\Gamma M}$$

אז מקובל לכתוב את הספק ע"י זה של $\frac{F_0^2}{2\Gamma M}$ בשם הזה $\langle P\rangle_{\omega_0}$

לכן

$$\langle P\rangle=\langle P\rangle_{\omega_0}\frac{\Gamma^2\omega^2}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\Gamma^2\omega^2}$$

בעמוד הקודם

last בא נזכר: cos נוסף ל Aab (הגל - הצורה הזמני, גרף).

אם $\omega_0\to\omega$ אנחנו נוכל לרשום את הביטוי כך (הוכחה)

$$(\omega_0^2-\omega^2)^2+\Gamma^2\omega^2=(\omega_0-\omega)^2\underset{\downarrow\,\omega_0}{(\omega_0+\omega)^2}+\Gamma^2\underset{\downarrow\,\omega_0}{\omega^2}\cong(\omega_0-\omega)^2(2\omega_0)^2+\Gamma^2+\omega_0^2=$$

אז עכשיו הוא מקבל את הלוח...
(קיצר בכל מקום ש-$\omega$ זה עושה נכון נראה נחליף את $\omega$ ב-$\omega_0$)

$$\langle P\rangle=\langle P\rangle_{\omega_0}\frac{\Gamma^2\omega_0^2}{(\omega-\omega_0)^2(2\omega_0)^2+\Gamma^2\omega_0^2}=\langle P\rangle_{\omega_0}\underbrace{\frac{(\Gamma/2)^2}{(\omega-\omega_0)^2+(\Gamma/2)^2}}$$

וזאת פונק' שנקראת לורנציאן והיא פונק' סופר פופולרית בפיזיקה
ובכל מיני שאלות תדבר בקבלים לורנציאנים - הסיגנל אופק לורנציאני
ואם אתה לא יודע להסביר את זה. וזה מצביע לאללה כי הלורנציאן
הוא הטרנספורם פורייה של אקספוננט דועך

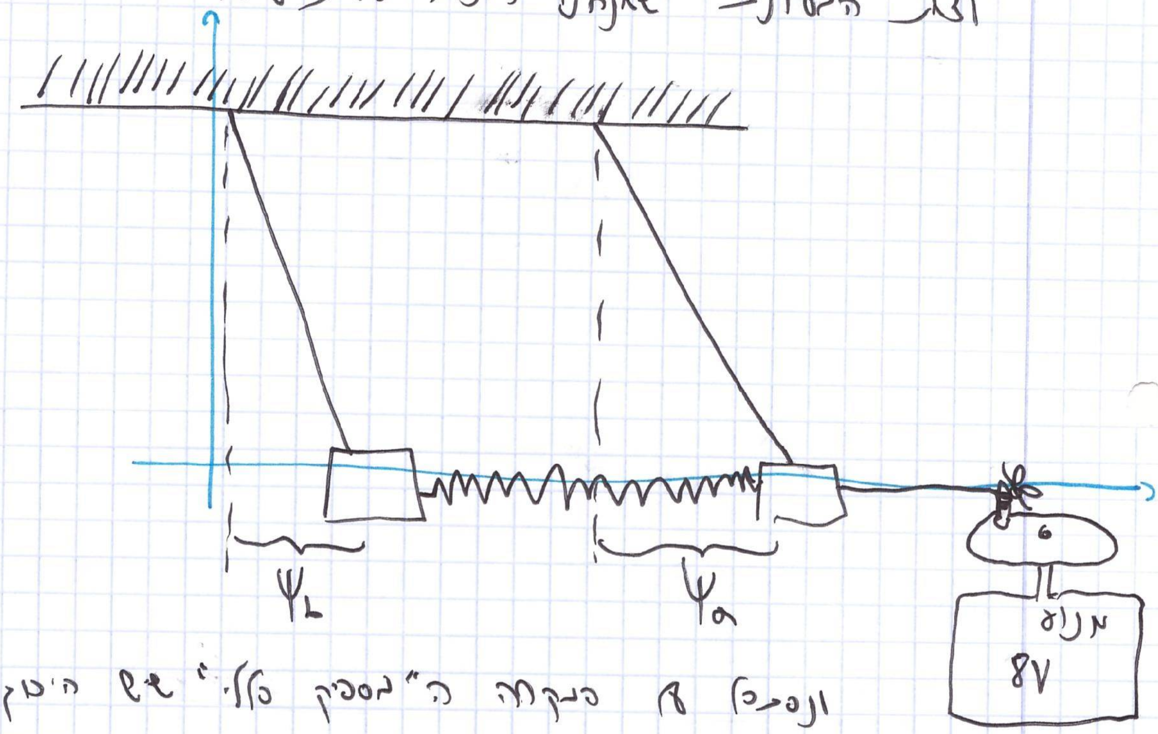
המשך...

# מערכת מאולצת עם מספר אופני תנודה:

במקרה $\Gamma \neq 0$ ,$F \neq 0$ הוא לא דן - יש מקרה כזה ואנחנו יכולים לפתור

אבל בבית אם בא לנו.

וזה הדיון שאנחנו רוצים לראות עכשיו:




ונפתח את המקרה ה"מספיק כללי" שיש ריסון וכח

$$M\ddot{\psi}_a = -\frac{Mg}{l}\psi_a - k(\psi_a - \psi_b) - M\Gamma\dot{\psi}_a + F_0\cos(\omega t)$$

כי $\psi_a$ גורם להתנגדות

$$M\ddot{\psi}_b = -\frac{Mg}{l}\psi_b - k(\psi_a - \psi_b) - M\Gamma\dot{\psi}_b$$

ונרשום: (ונצטרך קורדינטות לחרוג הצה קואו' נורמאליות)

$$\psi_1 = \frac{1}{2}(\psi_a + \psi_b) \qquad \psi_2 = \frac{1}{2}(\psi_a - \psi_b)$$

$$M\ddot{\psi}_1 = -\underbrace{\frac{Mg}{l}}_{\omega_{0,1}}\psi_1 - M\Gamma\dot{\psi}_1 + \frac{1}{2}F_0\cos(\omega t)$$

$$M\ddot{\psi}_2 = -M\underbrace{\left[\frac{g}{l} + \frac{2k}{M}\right]}_{\omega_{0_2}\text{ מפה}}\psi_2 - M\Gamma\dot{\psi}_2 + \frac{1}{2}F_0\cos(\omega t)$$

אז קיבלנו 2 $\omega_0$ שונים אז נצייר

$$\omega_1^2 = \frac{g}{l}$$

$$\omega_2^2 = \left(\frac{g}{l} + \frac{2k}{M}\right)$$

ואז אני יודע את השורה - הפתרון ללא הומוגני מקודם

$$\psi_1 = A_{ab}(w_1, w_2)\sin(wt) + A_{ab}(w_1, w_2)\cos(wt)$$

$$\psi_2 = A_{ab}\sin(w_1 t) + \cos(w_2 t)$$

ועכשיו רק נצטרך להציב את הפתרונות ולראות מה נקבל...

14/1

1.

## הרצאה - גלים

נמשיך מהשיעור הקודם - נרשום את $A_{ab}$ ו- $A_{el}$ שמצאנו:

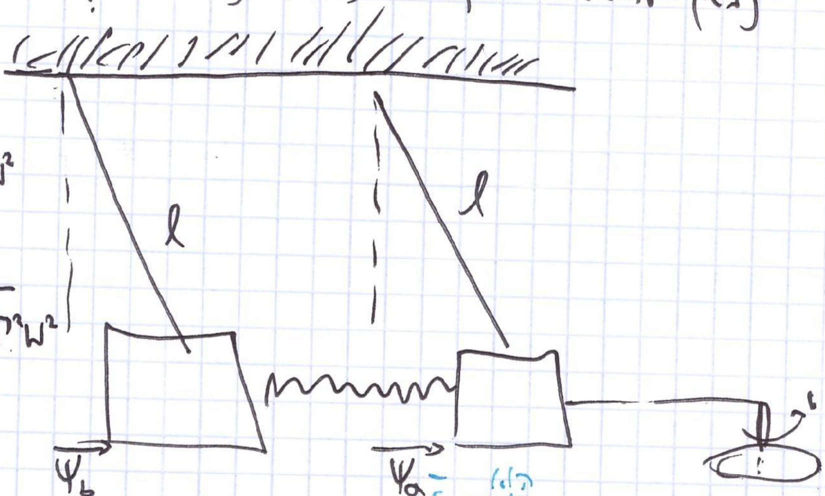
$$A_{ab}=\frac{F_0}{M}\frac{\Gamma\omega}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\Gamma^2\omega^2}$$

$$A_{el}(\omega,\omega_0)=\frac{F_0}{M}\frac{\omega_0^2-\omega^2}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\Gamma^2\omega^2}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{A_{el}}{A_{ab}}=\frac{\omega_0^2-\omega^2}{\Gamma\omega}$$

אז $A_{el}>A_{ab}$




וקיבלנו כי:

$$\ddot{\Psi}_1+\Gamma\dot{\Psi}_1+\omega_1^2\Psi_1=\frac{1}{2}\frac{F_0}{M}\cos(\omega t)$$

$$\ddot{\Psi}_2+\Gamma\dot{\Psi}_2+\omega_2^2\Psi_2=\frac{1}{2}\frac{F_0}{M}\cos(\omega t)$$

כאשר קיבלנו את ההגדרות:

$$\boxed{\omega_1^2=\frac{g}{l}},\ \boxed{\omega_2^2=\frac{g}{l}+\frac{2k}{M}}$$

כאשר: (בקואורדינטות נורמליות)

$$\Psi_1=\frac{1}{2}(\Psi_a+\Psi_b)$$

$$\Psi_2=\frac{1}{2}(\Psi_a-\Psi_b)$$

וקיבלנו כי:

אינדקסים

$$\Psi_1=A_{ab}^1\sin(\omega t)+A_{el}^1\cos(\omega t)$$

$$\Psi_2=A_{ab}^2\sin(\omega t)+A_{el}^2\cos(\omega t)$$

זה - של המחובר למנוע

$$\Psi_a=\underbrace{(A_{ab}^1+A_{ab}^2)}\sin(\omega t)+\underbrace{(A_{el}^1+A_{el}^2)}\cos(\omega t)\Rightarrow\left(\Rightarrow \Psi_1 \text{ בתדירות } \omega,\ \Psi_2 !\right)$$

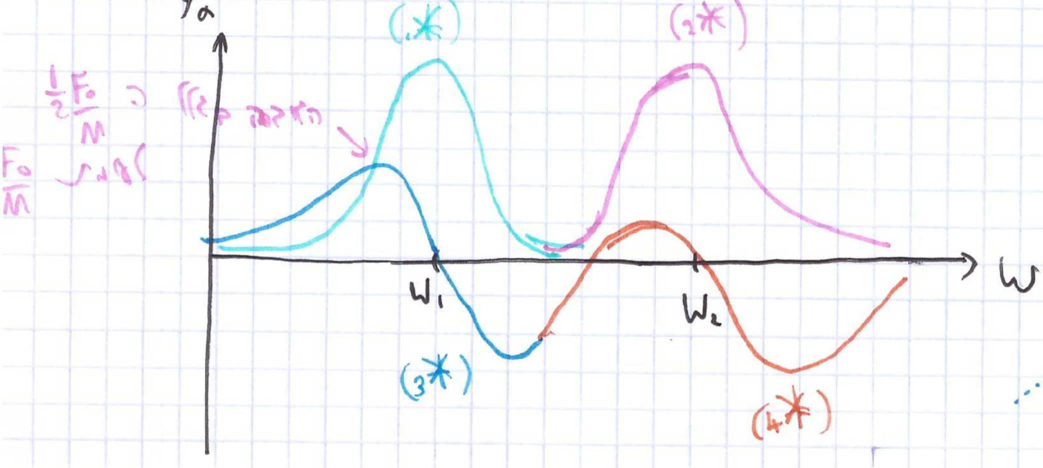
(1*) כי עיקר שיא $A_{ab}$ פיק ב- $\omega_1$

(2*) פיק ב- $\omega_2$

$$A_{ab}^a=\frac{1}{2}A_{ab}(\omega,\omega_1)+\frac{1}{2}A_{ab}(\omega,\omega_2)$$

$$A_{el}^a=\underbrace{\frac{1}{2}A_{el}(\omega,\omega_1)}_{(3*)}+\underbrace{\frac{1}{2}A_{el}(\omega,\omega_2)}_{(4*)}$$

נשרטט:




כמו בשיעור הקודם...

$$\psi_b = (A^1_{ab} - A^2_{ab})\sin(wt) + (A^1_{el} - A^2_{el})\cos(wt) \Rightarrow \begin{pmatrix} \text{בסה"כ למצוא את } \psi_b \\ \text{נעשה } \psi_1 - \psi_2 \end{pmatrix}$$

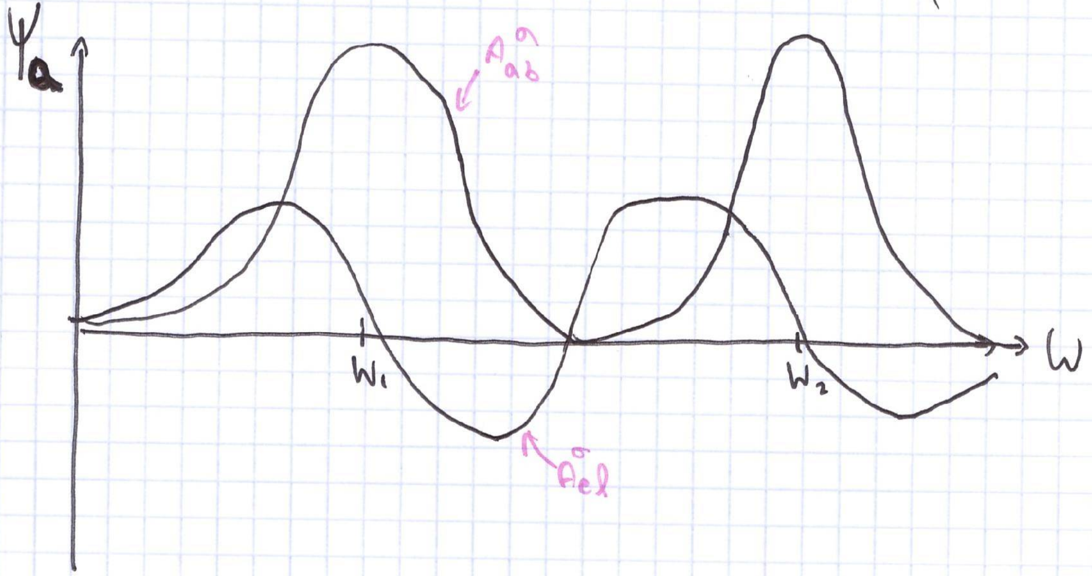
$$A^b_{ab} = \frac{1}{2} A_{ab}(w, w_1) - \frac{1}{2} A_{ab}(w, w_2)$$

$$A^b_{el} = \frac{1}{2} A_{el}(w, w_1) - \frac{1}{2} A_{el}(w, w_2)$$

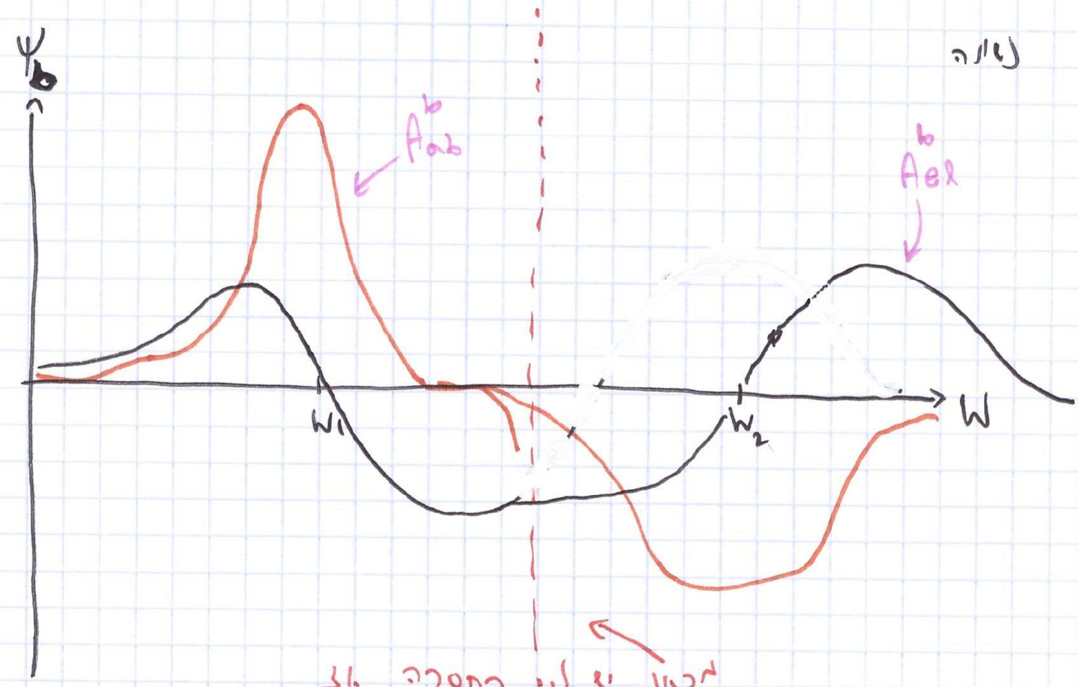
$$w = ck = c\frac{2\pi}{\lambda}$$

$$c = \sqrt{\frac{T_0}{\rho_0}}$$

$A^0$ סך הפיקים והקולגאנים כמו מקודם




נשוה




מכאן יש לנו החסרה וצ
נהפוך את הכול מפעם הקודמת...

ד"ג

# סיכום משיעור הקודם:

בשיעור הקודם דיברנו על $M\ddot{x} + M\Gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = F_0\cos(\omega t)$

$$x = A_{ab}\sin(\omega t) + A_{el}\cos(\omega t)$$

וראינו ש:

$$A_{ab}(\omega,\omega_0) = \frac{F_0}{M}\frac{\Gamma\omega}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\Gamma^2\omega^2}$$

$$A_{el}(\omega,\omega_0) = \frac{F_0}{M}\frac{\omega_0^2-\omega^2}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\Gamma^2\omega^2}$$

אז נוכל להגדיר את $A$ כוקטור ע"י:

$$A = \sqrt{A_{ab}^2 + A_{el}^2}$$

(האמפליטודה המוחלטת)

ואז:

$$x = A\left(\frac{A_{ab}}{A}\sin(\omega t) + \frac{A_{el}}{A}\cos(\omega t)\right)$$

ואז: $\sin\phi = \frac{A_{ab}}{A}$ $\quad \cos\phi = \frac{A_{el}}{A}$

$$x = A\sin\phi\sin(\omega t) + A\cos\phi\cos(\omega t)$$

ולפי הזהות:

$$x = A\cos(\omega t + \phi)$$

נחפש את $A^2$ שבה קיצון עוצמה:

$$A^2 = \frac{F_0^2}{M^2}\frac{\left((\omega_0^2-\omega^2)^2+\Gamma\omega^2\right)}{\left((\omega_0^2-\omega^2)^2+\Gamma^2\omega^2\right)^2} = \frac{1}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\Gamma^2\omega^2}\cdot\frac{F_0^2}{M^2} = (*)$$

המכנה מינימלי (למצוא מינימום של פונ' אפשר לגזור) כאשר:

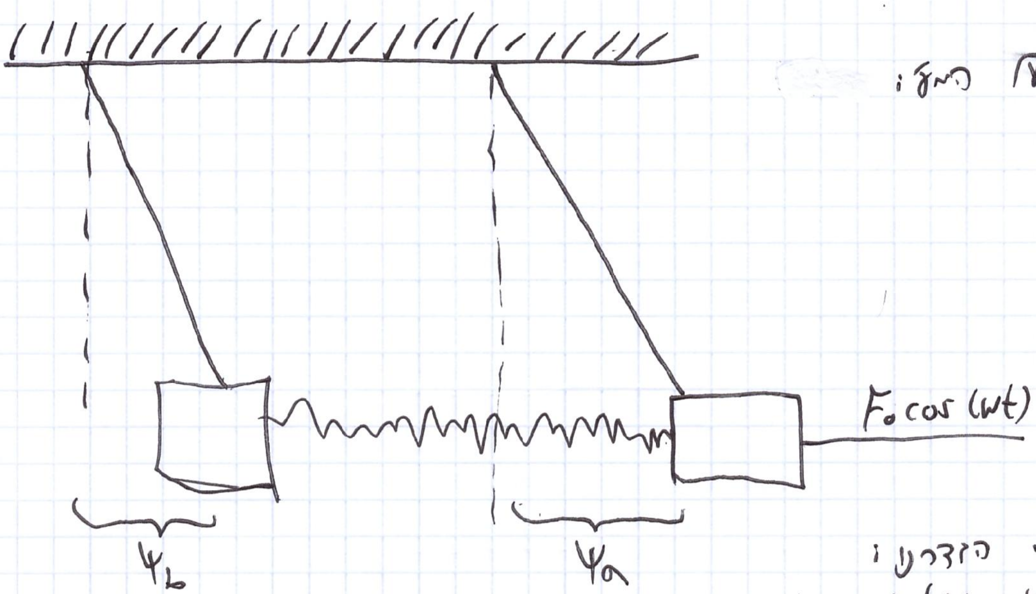
(לגזור את המכנה לפי $\omega$ ולהשוות ל-0 ולמצוא את $\omega$...)

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2 \Rightarrow \omega \cong \omega_0$$

שבה $A^2$ מקסימלי.

$$(*) = \frac{F_0^2}{M^2}\frac{1}{(2\omega_0)^2(\omega-\omega_0)^2+\Gamma^2\omega_0^2} = \frac{F_0^2}{4M^2\omega_0^2}\cdot\frac{1}{(\omega-\omega_0)^2+\left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2}$$

סעיף B המצב:




נזכור כי הגדרנו:

$$\psi_1 = \frac{1}{2}(\psi_a + \psi_b)$$

$$\psi_2 = \frac{1}{2}(\psi_a - \psi_b)$$

ובעזרת הגדרה זו הצלחנו לבטא את $\psi_a$ ו-$\psi_b$:

$$\psi_a = A^a_{el}\cos(\omega t) + A^a_{ab}\sin(\omega t)$$

$$\psi_b = A^b_{el}\cos(\omega t) + A^b_{ab}\sin(\omega t)$$

כאשר קיבלנו ש:

$$\boxed{A^a_{el} = \frac{1}{2}\left(A_{el}(\omega,\omega_1) + A_{el}(\omega,\omega_2)\right)}$$

$$A^a_{ab} = \frac{1}{2}\left(A_{ab}(\omega,\omega_1) + A_{ab}(\omega,\omega_2)\right)$$

$$\boxed{A^b_{el} = \frac{1}{2}\left(A_{el}(\omega,\omega_1) - A_{el}(\omega,\omega_2)\right)}$$

$$A^b_{ab} = \frac{1}{2}\left(A_{ab}(\omega,\omega_1) - A_{ab}(\omega,\omega_2)\right)$$

(3*)

(2*)

נניח שכיוון שהיה B הגדל כמו בסעיף הקודם

נסתכל A הביטוי

$$\frac{A_{el}}{A_{ab}} = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\Gamma\omega}$$

כאשר $\omega \to \infty$ (2*) אנחנו מקבלים יחס שווה:

$$\frac{A_{el}}{A_{ab}} = \frac{-\omega}{\Gamma}$$

כיון $|A_{el}| >> |A_{ab}|$ לכן נשווה בה $A_{el}$ של $\omega_2$ בגדול (3*)

$|A^a_{el}| > |A^b_{el}|$ ואפשר לקבל תשובה (אינטואיטיבית) לעובדה

כי a ו-B עוקב הכח ולא (שריכוך) רק דרוך זה דוחק

תמיד נגד שמשנים B-ו זה הקפוץ! (ד)

חשוב בתיאור הכללי שעכשיו $A_n$ כמו cos'ים ! sin'ים

אבל אנחנו נעבוד עם פתרון בהצגה הבאה:

$$\Psi = e^{i(kan - Wt)}$$

כי זה יותר קצר - ונציב במד"ר ונקבל:

$$-MW^2 e^{i(kan-Wt)} = MW_0^2 e^{i(kan-Wt)} + k\left(e^{i(ka(n+1)-Wt)} + e^{i(ka(n-1)-Wt)} - 2e^{i[kan-Wt]}\right) =$$

נשים פה את

הקיבוע הדיסקרטי כאן

נצמצם רק מספר את היחידות ואחרי צמצום של כל האקספוננטים נקבל:

$$-MW^2 = -MW_0^2 + k(\underbrace{e^{ika} + e^{-ika}}_{\text{וזה מוכר לנו}} - 2)$$

רצח...

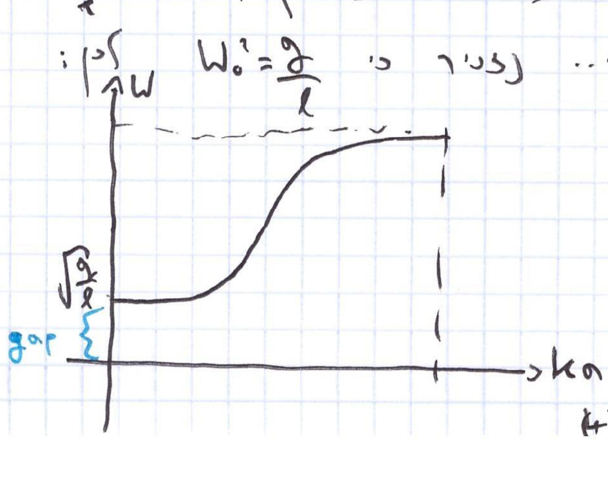
ולכן

$$-MW^2 = -MW_0^2 + k\left(2\cos(ka) - 2\right)$$

יחס הנפיצה הוא הקשר בין המספר שסופר את התדירות בזמן $(W)$
לבין המספר שסופר את התדירות במקום $(k)$
דהיינו - אומר לי מה המספר שמייצג את התדירות במקום ואז
יאמר לך מה המספר שמייצג את התדירות בזמן.
עכשיו נחלק ב- $M$ ועם טריגונומטריה של $(\cos\theta - 1)$ נקבל:

$$W^2 = W_0^2 + \frac{4k}{M}\sin^2\frac{ka}{2}$$

וזה הפעם הראשונה שאנחנו רואים כאן שנינו יחס נפיצה
לא לינארי - אומר לי את התדירות במקום ואני אומר לך את
התדירות בזמן ולהפך... נזכיר כי $W_0^2 = \frac{g}{l}$ ולכן:




נניח עד $ka = \pi$:

בנוסף נזכיר כי

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

אז יש לנו גם

$\lambda$

לכל תדירות נקבל אורך גל אחר (+)

נסתכל על המקרה קיצון של $\omega$, ונתבונן בקיטוב:

$$\frac{A_{el}}{A_{ab}} = \frac{\omega_0^2-\omega^2}{\Gamma\omega}$$

ונקבל התוצאות אחרי שראינו וזה כי

שוב $|A_{el}| \gg |A_{ab}|$ רק שכאן הפעם חיובי

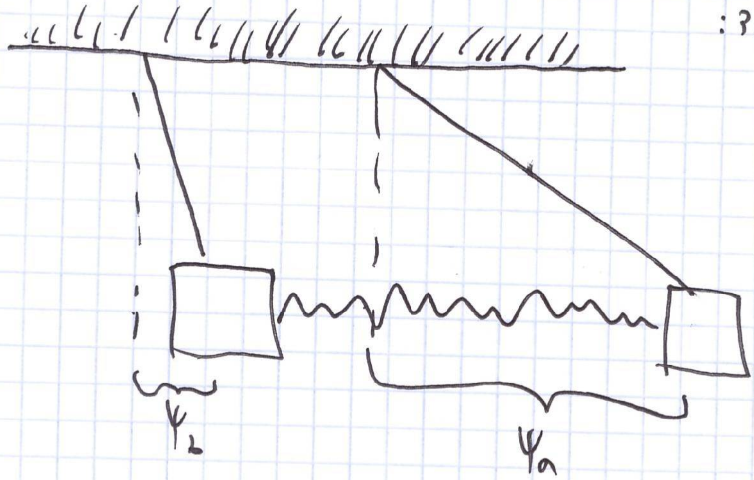
ואני טוען שהאמפליטודה של $a$ שוב פעם יותר גדולה משל $b$

לכן גם הפעם $|A_{el}^b| < |A_{el}^a|$

רק הפעם אין מצב בו הסימנים הפוכים ומצב כזה יכול לקרות

רק כאשר האמפליטודה של $a$ יותר גדולה משל $b$ - ואז סימן-לין

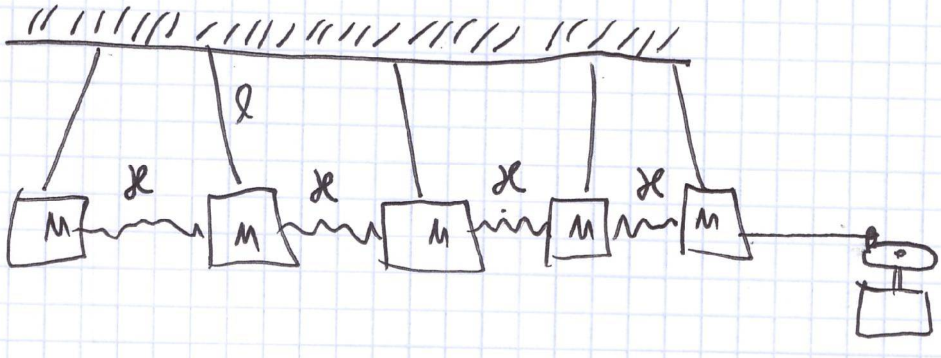
הם מתנדנדים ביחד:




וכן כל מה שנותח הזה - הוא כי גם מעניין אותנו באותו זה

מקרה כללי עם הרבה קפיצים:

והרי הקללה:




עבור: $\omega_0^2 = \frac{g}{l}$

כאשר מחקק המנותח בין 2 קפיצים הוא ה

נסתכל על ה-ע' ללא כוח המאזן כדי למצוא נוס נפיצה.

הוא וראה לנו כמיק למצוא הכיפשון כאשר נגדיר $\kappa$ - $K$ במשוואת קפיצי

$-K$ שנית

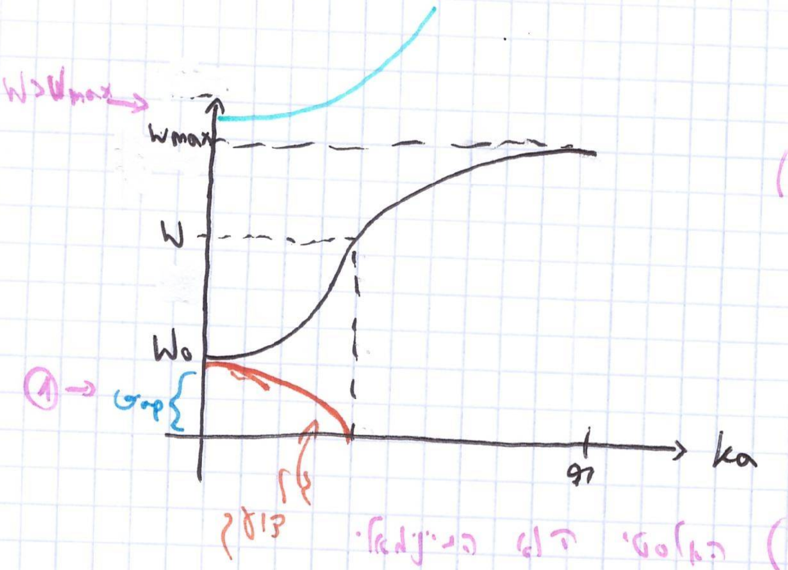
וזה נגזרת ראשונה לפי ה
שווה לנגזרת שנייה לפי ה

כאשר

$$M\ddot{\psi}_n = -M\omega_0^2\psi_n + \underbrace{\kappa(\psi_{n+1}-\psi_n) - \kappa(\psi_n-\psi_{n-1})}_{(2)\ \kappa(\psi_{n+1}+\psi_{n-1}-2\psi_n)}$$

וזה קירוב דיסקרטי לנגזרת שנייה
(הוא הראה לנו)

נסתכל על 2 המצבים הקיצוניים (כמצוין בגרף) ①, ②




$(\omega<\omega_0)$; נניח עבור ① (ב gap) האלסטי הדי הדינמי: והאמפליטודה יורדת — עבור תדר נמוך מ $\omega_0$:

לכן נחפש פתרון דועך: (דועך במקום ולא דועך בזמן)

$$\Psi(n,\omega)=Ae^{-kan-i\omega t}$$

אז מה קורה כשאנו נכניס למשוואה:

$$M\ddot{\Psi}=-M\omega_0^2\Psi+\mathcal{K}(\Psi_{n+1}+\Psi_{n-1}-2\Psi_n)$$

ונציב:

$$-\omega^2MAe^{-kan-i\omega t}=-M\omega_0^2Ae^{-kan-i\omega t}+\mathcal{K}\left(e^{-ka(n+1)}+e^{-ka(n-1)}-2e^{-kan}\right)e^{-i\omega t}$$

ונצמצם את ה $e^{-i\omega t}$ הזה ונשים לב כי $e^{-kan}$ מצטמצם בכל מקום ונקבל כי:

$$-\omega^2M=-M\omega_0^2+\mathcal{K}(e^{-ka}+e^{ka}-2)$$

לכן:

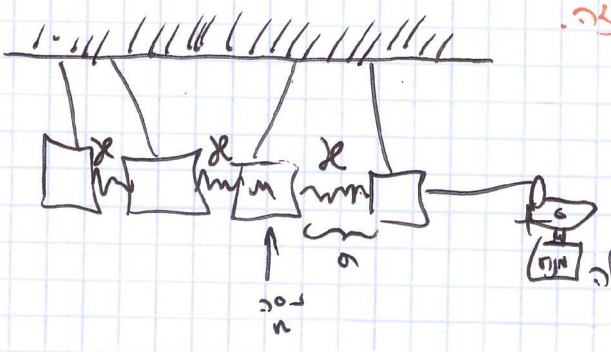
$$\omega^2=\omega_0^2+\frac{\mathcal{K}}{M}(2-2\cosh(ka))$$

אחרי טריגונומטריה מטורפת של $1-\cosh\theta$ נקבל:

$$\omega^2=\omega_0^2-\frac{4\mathcal{K}}{M}\sinh^2\left(\frac{ka}{2}\right)$$ וזה היחס נפיצה שקיבלנו!

ומהסתכלות ככל ש k ילך ויגדל הפתרונים ילך ויגדל ולכן נצייר באיור למעלה בצבע הזה.

$\omega>\omega_{max}$ נסתכל על ②:




נניח ~ לם כי ראינו שאם אני מגדיל את המסה — האמפליטודה של הימניים גדולה משל השמאליים

10

$$\Psi(n,w) = A(-1)^n e^{-kan - iwt}$$

נציב בהגדרה שני ונקבל אחרי צמצומים שהראינו מקודם:

$$M(-w^2)(-1)^n = -Mw_0^2(-1)^n + \varkappa\left((-1)^{n+1}e^{-ka} + (-1)^{n-1}e^{ka} - 2(-1)^n\right)$$

$$-Mw^2 = -Mw_0^2 + \varkappa\left(-e^{-ka} - e^{ka} - 2\right)$$

לכן

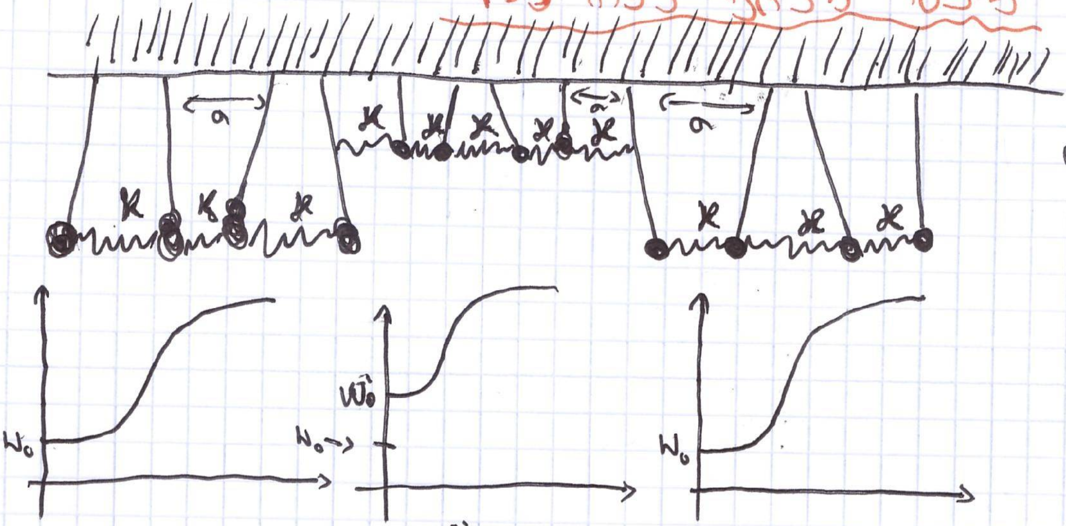
$$w^2 = w_0^2 + \frac{2\varkappa}{M}\left(1 + \cosh(ka)\right)$$

$$w^2 = w_0^2 + \frac{4\varkappa}{M}\cosh^2\left(\frac{ka}{2}\right)$$

ונצייר בצבע תכלת את הארה.

# הרצאה - חזים

## פילטר מכאני כפרה עצים



$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$\omega_0' = \sqrt{\frac{g}{l'}}$$

כאשר משיעור קודם: $(*_m)\quad \ddot{\psi}_n = -\omega_0^2\psi_n + \kappa(\psi_{n+1}+\psi_{n-1}-2\psi_n)$

ואנחנו רואים פה פילטר מכאני כי כל התדרים בין $\omega_0$ ל $\omega_0'$

לא עוברים. לכן ניתן את המעבר כי יחס התנודה בזכות: $\omega_0=\sqrt{\frac{g}{l}}$ מול $\sqrt{\frac{g}{l'}}$

מוריד את מעבר התדרים מתחת ל $\omega_0'$. וזה פילטר מכני.

## קירוב הרצף לשרשרת:

אם יש לנו 10 כדורים מאוד - במקום לדבר על המסה ה-n אחרי מעבר

על כל השאר נדבר על אינדקס של מסה

במקום לדבר על $\psi_n(t)$ נדבר על $\psi(z,t)$

מה שאומר ש: $(*_1)\quad \psi_n(t) \longrightarrow \psi(z,t)$

שיוך מבחינתנו:

$\mathrm{I}\quad \psi_{n+1}(t) \longrightarrow \psi(z+a,t)$

$\mathrm{II}\quad \psi_{n-1}(t) \longrightarrow \psi(z-a,t)$

ובקירוב:

$$\psi_{n+1}(t) = \psi(z+a,t) = \psi(z,t) + a\frac{\partial\psi}{\partial z}(z,t) + \frac{1}{2}a^2\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}(z,t)$$

$$\psi_{n-1}(t) = \psi(z-a,t) = \psi(z,t) - a\frac{\partial\psi}{\partial z}(z,t) + \frac{1}{2}a^2\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}(z,t)$$

I פחות $(*_1)$ ; II פחות $(*)$ נקבל:

$$\psi_{n+1}-\psi_n = a\frac{\partial\psi}{\partial z} + \frac{1}{2}a^2\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}$$

$$\psi_{n-1}-\psi_n = -a\frac{\partial\psi}{\partial z} + \frac{1}{2}a^2\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}$$

ונוכל לרשום עבור הכל:

$$\psi_{n+1}+\psi_{n-1}-2\psi_n = a^2\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}$$

ונקבל את משוואת קליין גורדון (אחרי הצבה[2] בי (**) ב עמודים אחורה):

$$\frac{\partial^2 \psi(z,t)}{\partial t^2} = -\omega_0^2 \psi(z,t) + \frac{\kappa}{M} a^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \quad \text{הגבול הרציף}$$

כאשר $M = \sum_n m_n$

$\psi$ הצבה שמאלה או ימינה – אומר לי כמה הצבני ימינה ושמאלה ותציג לי כמה אטומים בקצב – כל פירוש מילולי למשוואת קליין-גורדון שקיבלנו

נחש הנפיצה:

$$\psi = e^{i(kz - \omega t)}$$

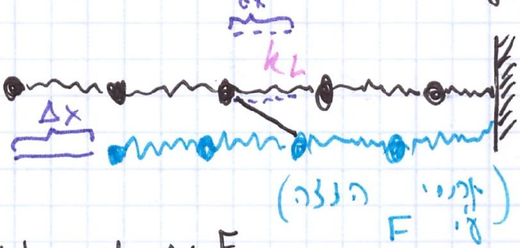
$$-\omega^2 = -\omega_0^2 + -\frac{\kappa a^2}{M} k^2 \Rightarrow \omega^2 = \omega_0^2 + \frac{\kappa a^2 k^2}{M}$$

שימו לב לכפולה של ק.בצני

קבועים אטומים בגניר על קבוצ נרצה כתוב את הכוחות הדינמיים ואנחנו רוצים לכתוב קבוע קפיץ לכתוב אלה, את המרחק המוזן אני מודד על חיסור את אורך הגניר בגודל המשוגים כאשר ידוע לי כמה אטומים יש.

עד שבגרל לתאר לי מודל כמה הוא מוזי מהצורה הבאה:

$k_L$ - קבוע הקפיץ של כל השרשרת




$$\left.\begin{aligned} \Delta x &= \underbrace{N}_{\text{כמה של קפיץ היצג}} \cdot dx \\ F &= k_L \Delta x \end{aligned}\right\} \Rightarrow F = k_L \cdot N dx = k_L \cdot N \frac{F}{\kappa}$$

כמה מטר

$$\Downarrow$$

$$(**)\quad \kappa = N k_L$$

וקיבלנו פה חיבור קפיצים בטור

$$(3*)\quad N = \frac{L}{a}$$

$M = \rho_0 \cdot a$ !

ונתונה גם כאן הגודל (שימושי מפורש בריבוע) הזה: $\frac{k a^2}{M}$

עכשיו נוכל לשחק עם המקדם הזה של קליין קלדרון למעלה:

$$\frac{\kappa a^2}{M} \underset{(**)}{=} \frac{N k_L \cdot a^2}{\rho_0 a} \underset{(3*)}{=} \frac{L k_L a^2}{\rho_0 a^2} = \frac{L k_L}{\rho_0}$$

תמיד את האורך וקבוע הקפיץ של כל האורך, מספר חלקי האורך ונקבל את הביטוי הזה. לכן נוכל לרשום את המשוואה הבאה בצורה הבאה:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -\omega_0^2 \psi + \left(\frac{k_L L}{\rho_0}\right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \quad \text{הגבול הרציף}$$

נזכור כי בעבור $W_0=0$ נקבל

$C_T$ - כבר - זה אינו תלוי בכח חיצוני מסה.

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = \left(\frac{k_L L}{\rho_0}\right)\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}$$

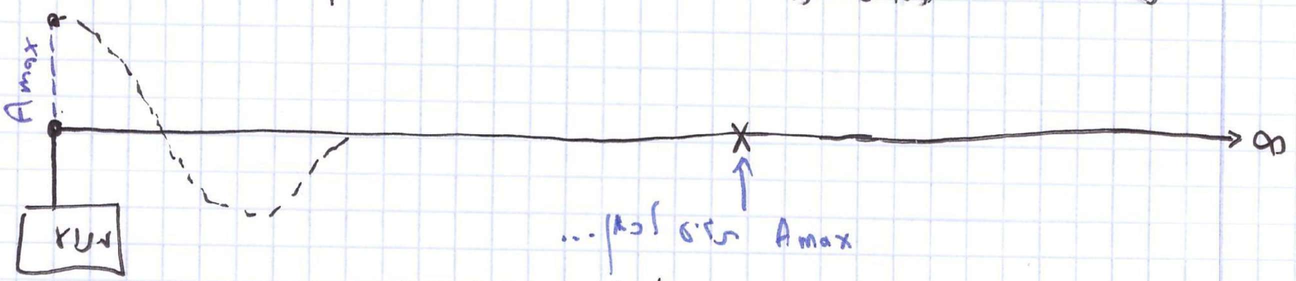
ונסמן ב-$c^2$:

$$c^2 = \frac{k_L L}{\rho_0}$$

וזאת המשוואה אליה שאפנו מסדרה של אטומים.

## גלים נעים:

החבל מתוח וקשור באינסוף ואנחנו מנענעים.
נשים לב כי האמפליטודה תגיע עד אינסוף (המקסימום)




תגיע לכאן $A_{max}$...

$$\psi(0,t) = A\cos(\omega t)$$

בשביל למצוא את האמפליטודה ב-x נוכל לרשום כך:

$$\psi(z,t) = A\cos\left(\omega\left(t-\frac{z}{v_\varphi}\right)\right)$$

הזמן שלקח לשיא להגיע אליו

כאשר $v_\varphi$ היא המהירות של ההפצה.

$$\psi(z,t) = A\cos\left(\omega t - \frac{\omega z}{v_\varphi}\right) = A\cos(\omega t - kz)$$

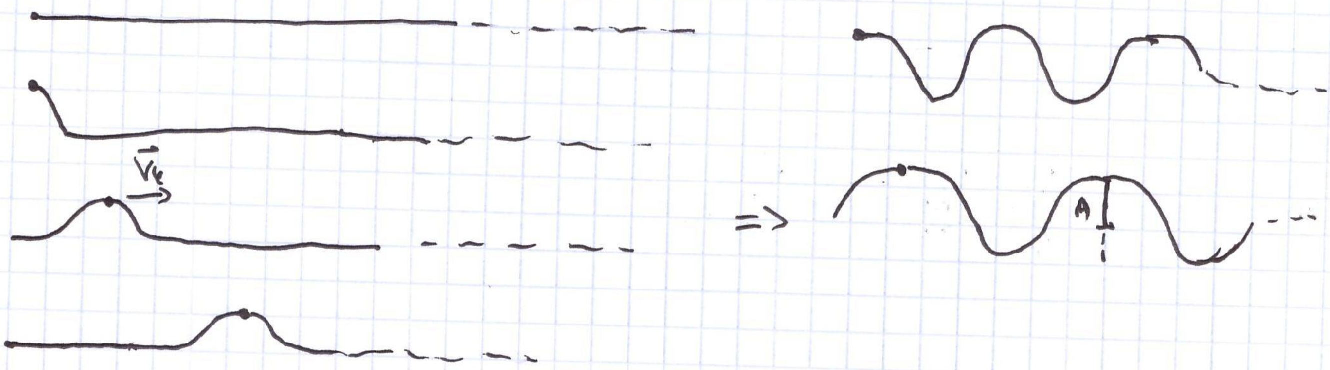
וזה פתרון למשוואת הגלים בתנאי ש- $(*)\ \omega = ck$

ומכיוון $(*_2)\ \frac{\omega}{v_\varphi} = k \Rightarrow$ נוכל להסיק כי $v_\varphi = c$
מ-$(*),(*_2)$
המהירות שכבר נתונה בה.

אז כמה גודלים - של מהירות הפאזה - המהירות שהשגנו עד כה.

# גלים נעים-הרצאה:

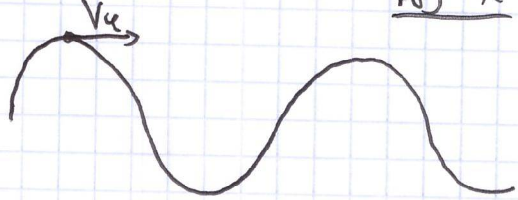
תיל חצי אינסופי - יש איזושהי הפרעה שנוצרה בזמן כאשר מנענעים אותו מהקצה השמאלי: דוגמאות:



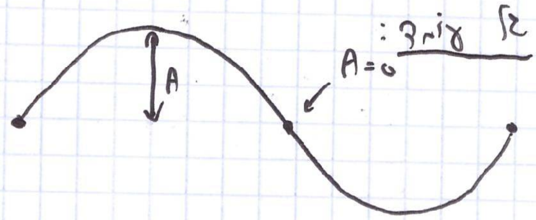

באופן ההבדל המהותי בין גל נע לגל עומד הוא שבגל נע לכל הנק' אותה אמפליטודה - רק בזמנים שונים, בגל עומד יש נק' עם אמפליטודה אפס.

$\bar V_\varphi$ - מהירות הפאזה.

גל נע:




גל עומד:




II. $\Psi = A\cos(kz-\omega t)$

I. $\Psi = A\cos(kz)\cos(\omega t)$

באופן כללי גל נע הוא סכום של גלים עומדים מכיוון ש:

$$\cos(kz-\omega t) = \cos(kz)\cos(\omega t) + \sin(kz)\sin(\omega t)$$

[illegible]

וגם גל עומד אפשר לבטא כ סכום גלים נעים כי:

$$\cos(kz)\cos(\omega t) = \frac{1}{2}\cos(kz-\omega t) + \frac{1}{2}\cos(kz+\omega t)$$

גל שנע ימינה

גל שנע שמאלה

ונזכיר כי קיבלנו בשם למהירות שהבאנו ע״י

(*1) $C = \sqrt{\dfrac{T_0}{\rho_0}} \underset{it}{=} \sqrt{\dfrac{k_L \cdot L}{\rho_0}} = V_\varphi$

וניסיון האוון הבין איכשהו שמשהו מתקדם כמו במקרה של קפיץ המוזר קבורה שלו והוא הבין שאם הוא ימדוד את $k_L$ ו $L$:

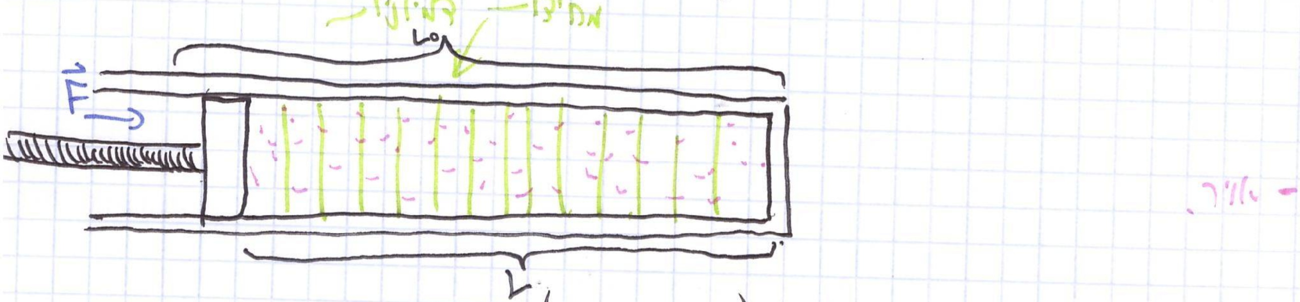
של החוט הזה שאנחנו קוראים לו טווח הוא יוכל לכתוב את גלי הקול

(2)

האלה בצורה משוואתית - ונראה איך אנחנו מגיעים לגלי קול (קוונה ורגישה
אפשר לדבר 8 הבקיעים): (עוד אין נוסחה את מה שהוא גמר ארוע):

## מצב קונטי:

אז ניוטון לקח צינור עם בוכנה כאשר בתוכה יש אויר, בבוכנה
הוא תיאר אחידות דמיוניות וקפיצים קטנים כמוראה בתרשים:




וניוטון תיפס את $k_L$ ו-$\rho_0$ (של L כה קו)

אם אני דוחף A - נשכח מתנגד לכח שלי - וזה הלחץ:

$$\vec{F} = A\cdot\vec{P} \underset{(\text{גזירה})}{\Rightarrow} dF = A\,dP \quad , \quad F = k_L(L_0 - L) \text{ כוחות}$$

($\vec{P}$ - לחץ
A - שטח חתך של הצ)

$$\Downarrow (\text{גזירה})$$

$$dF = -k_L\,dL$$

ואם נחבר את 2 הדברים האלה ביחד נק

$$k = -A\frac{dP}{dL}$$

נסמן ב- V - נפח
וב- M - מסת האויר.

$$\Downarrow$$

$$k_L = -\frac{A^2}{A}\frac{dP}{dL}$$

$$\Downarrow$$

והרי $V = A\cdot L$, אז $dV = A\,dL$ לכן

$$k_L = -A^2\frac{dP}{dV}$$

נציב ב-(*) מהפרק הקודם

$$c^2 = \frac{k_L\cdot L}{\rho_0} = \frac{-A^2\frac{dP}{dV}\cdot L}{M/L} = \frac{-A^2\frac{dP}{dV}\cdot L}{\frac{M}{V}\cdot\frac{V}{L}} \overset{L\text{ עולה למעלה}}{=} -\frac{\frac{dP}{dV}\cdot V^2}{\rho_0\cdot V} = -\frac{1}{\rho_0}V\frac{dP}{dV}\Bigg|_{V_0}$$

אז בזמנו של ניוטון היה תוך כדה ידוע חוק בוילס (Boyle's)

ואותם (המאזניים שנכון כימיה) מכירים את זה כעיר

חוק לגזים אידיאליים מצוין באחרון השאלה

$\boxed{P\cdot V_{\text{נפח}} = nRT}$ , $\boxed{P - \text{לחץ}}$ , $\boxed{T - \text{טמפ' מקלווין}}$ , $\boxed{R - \text{קבוע הגזים}}$ , $\boxed{V - \text{נפח}}$

כיף

וזה חוק מה זה חשוב - אחד החוקים הכי חשובים בפיזיקה...

הוא רציני?!

וניוטון לצערי ידע רק את הנוסחה הזאת (ב-$T_{\text{גז}}$ קבועה):

$$P\cdot V_{\text{נפח}} = P_0 V_0 \quad \text{לגז}$$

n - אלה שלא עשו כימיה כללית → n זה מס' המולים. מול זה כמות אטומים - את (נראה לי אם אני זוכר במדויק) $6.0221\times10^{23}$ (מס' אבוגדרו) אטומים

זה כמו תבנית עם כמות (המספר - כמות עוגה) של עוגיות וכו'

כימאים סופרים (כמות $V$ מולים) בשביל להתגבר על הבעיה שאטומים זה הרבה וקטן. (כמו שיש תריסר ביצים - יש מול אטומים ואז זה קצת כמו התבניות של הביצים - התבניות של האטומים, קלטתם? לא? ויקיפדיה...)

אז:

$$P=\frac{P_0V_0}{V} \qquad \left(C^2 = -\frac{1}{\rho_{(\text{נפח})}}\cdot V\frac{dP}{dV}\right) \quad (*_2)$$

(תזכורת מעמ' קודם)

ההתחלה

↓ נגזור לפי V

$$\frac{dP}{dV} = -\frac{P_0V_0}{V^2}\Big|_{V_0} = -\frac{P_0}{V_0}$$

"מינוס"

$$C^2 = +\frac{1}{\rho_0}V_0\cdot\frac{P_0}{V_0} = \frac{P_0}{\rho_0} \quad \begin{matrix}(\text{לחץ})\\ (\text{מסה לנפח})\end{matrix}$$

אז בתנאים סטנדרטיים שנקראים "תנאי STP"

$$P_0 = 1\,[atm] = 1.01\cdot10^5\left[\frac{N}{m^2}\right]$$

אטמוספירה - (זה סוג של יחידה)

אגב - פסקל (השם של היחידה)

ואז נשאר לניוטון רק להציב מספרים בסביבה שלו:

$$\rho_0 = \frac{29\left[\frac{g}{mol}\right]}{22.4\left[\frac{liter}{mol}\right]} = 1.29\cdot10^{-3}\left[\frac{g}{cm^3}\right] \qquad \left(\frac{N}{m^2} = \left[\frac{1\,kg\cdot m}{sec^2\cdot m^2}\right] \overset{\text{אז}}{=} \frac{10^3}{100}\left[\frac{g}{s^2\cdot cm}\right] = 10\left[\frac{g}{s^2\cdot cm}\right]\right)$$

$$\Rightarrow P_0 = 1.01\times10^6\left[\frac{g}{s^2\cdot cm}\right] \Rightarrow \quad C = \sqrt{\frac{1.01\cdot10^6}{1.29\cdot10^{-3}}} = 2.8\times10^4\left[\frac{cm}{s}\right] = 280\left[\frac{m}{s}\right]$$

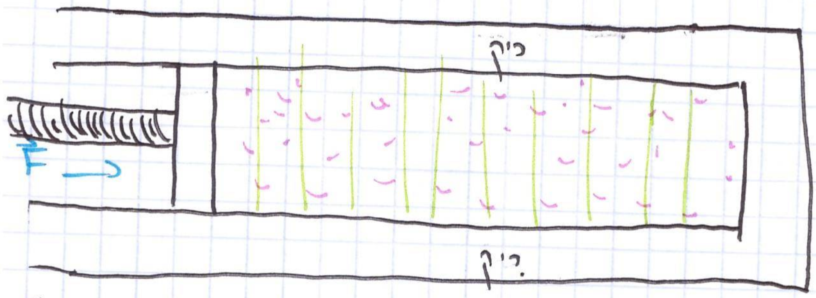
(תנאי "STP")

אז ניוטון נפל בבסיס רבה אחרי שגילה כך את מהירות הקול...

מה שניוטון פספס בחישוב שלו זה שבדחיסה משאבה אגם מחממים והוא היה צריך לעשות חישוב בטמפ' משתנה...

אז מה היה קורה אם היינו לוקחים משאבה עם קירור תפוזים

אז מה קבוע הקפיץ בבוכנה מהצורה הבאה: (צריך לעשות ניסוי ולבדוק)




(טיפ: לא קבוע...)

אז $PV^{\gamma}$ כזה קונסטנט בתנאים אדיאבטיים אין חלופה Q. שאוב צריך לזה
(הריק מתפקד כמו בקבוק תרמוס - שומר Q הטמפ')

$$PV^{\gamma} = P_0 V_0^{\gamma}$$

כי T לא קבוע כמו החום (בכימיה מסמנים אותה כ-Q) קבועה.

(חום זה אנרגיה).

אז:

$$P = P_0 V_0^{\gamma} \cdot V^{-\gamma}$$

$$\frac{dP}{dV} = P_0 \cdot V_0^{\gamma}(-\gamma)V^{(-\gamma-1)} = \left.\frac{dP}{dV}\right|_{V_0} = \frac{P_0 \cancel{V_0^{\gamma}}(-\gamma)}{\cancel{V_0^{\gamma}} \cdot V_0} = -\gamma \cdot \frac{P_0}{V_0}$$

שלאק!

$$\Downarrow$$

נציב ב(*2) מהסעיף הקודם ונקבל:

$$\underset{\text{מהירות הקול אדיאבטי}}{C^2} = \gamma \frac{P_0}{\rho_0} \underset{\text{כאשר}}{\Longrightarrow} C_{\text{אדיא'}} = \sqrt{\gamma} \cdot C_{\text{ניוטון}} = 332 \left[\frac{m}{sec}\right]$$

עבור $\gamma = 1.4$ למשל באוויר

$$\boxed{\text{תודה לאלה שהביאו עוגה לשיעור - במקום לחלוטין!!!...}}$$

שוב תשובה... נמשיך: אז What Next:

הספר לא מדויק שום מקרה ביחס הנסיבה לא לינארי והולך מאוד

תשוב בימין...

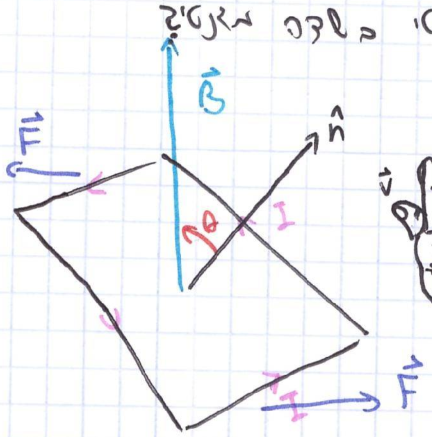
בס"ד

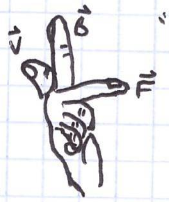
# קצים מחצבתיים - הכי מיהנדסת:

אז יש כמה מושגים שאני צריך לצד אותם בשביל שתבינו מה אני מדבר:

מומנט מגנטי - מהי האנרגיה של מומנט מגנטי בשדה מגנטי?

תארו בנפשכם לולאה מרובעת




"כלל יד ימין"

q - מטען

l - אורך הצלע (ריבוע)

כאשר השדה ניצב לריבוע והמשטח מוטה

I - זרם

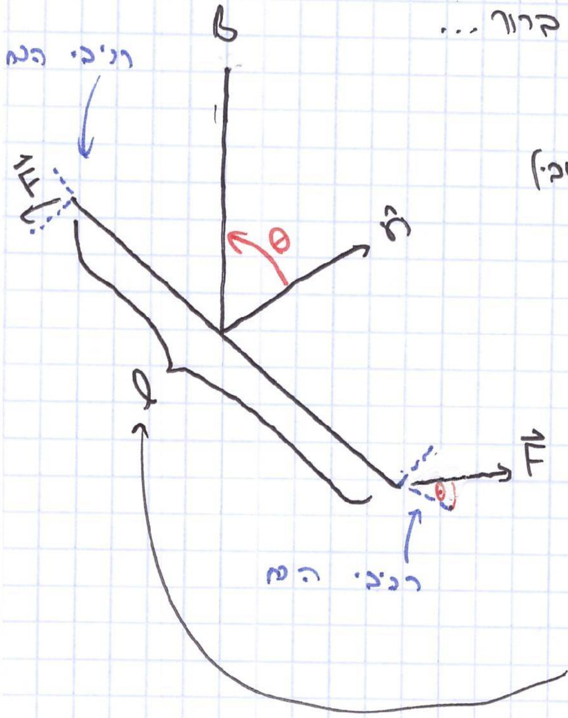
v - מהירות

$\vec{B}$ - שדה מגנטי, m - מסת החלקיק/ים.

אז צפיפות המטען תהיה $\frac{q}{4l}=\lambda$ וכוחו ($\vec{V}\times\vec{B}$ - לפי הכיוון) ימיני

בכחול

נעשה גם איור במבט צד שיהיה ברור...




אז אם אני רוצה לסובב את הלולאה

בזווית $\theta$ אני צריך לעשות עבודה בשביל

להתגבר על הכוחות...

רק 2 מתנדנדים (הצלעות שסובבו)

$$\vec{F}\cdot\hat{n}=\underbrace{\left(\frac{q}{4l}\right)}_{\text{צפיפות המטען}}\cdot V\cdot B\cdot 2l\sin\theta$$

כיוון מהירות = זרם

מהירות החלקיק הבודד

נעלה דיפרנציאלים:

$$dx=\frac{l}{2}d\theta$$

$$\Downarrow$$

$$-dV=dW=\vec{F}\cdot\hat{n}\,dx=\frac{q}{4\cancel{l}}VB(\cancel{2}\cancel{l})\sin\theta\frac{l}{\cancel{2}}d\theta$$

פוטנציאל

$$\Downarrow$$

$$-V=\frac{1}{4}qVBl\cos\theta\quad(3*)$$

אז יש לנו את הפוטנציאל של לולאת זרם בשדה מגנטי...

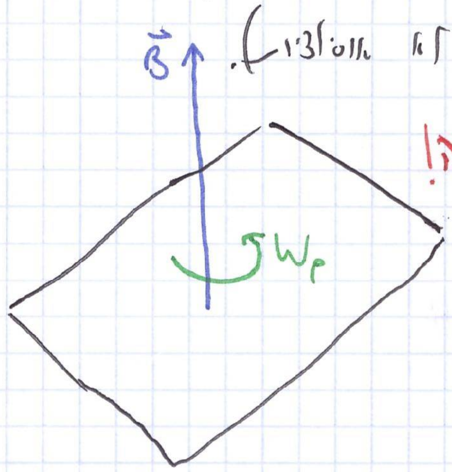
אז מגדירים וקטורים $\vec{S}=l^2\cdot\hat{n}$ , $\vec{M}\equiv I\cdot\vec{S}$ , $\vec{L}=m\frac{l}{2}v\hat{n}$

כלומר $\vec{L}$ - וקטור התנע הזוויתי, ותנע זוויתי זה המכפלה בין מסה
למהירות, למרחק הקצר ביותר שהחלקיק עובר למרכז "$\vec{r}\times\vec{v}$"
שזה בעצם $r\cdot v\cdot\sin\alpha$ בשפה סקלרית... ($\vec{L}=m\vec{r}\times\vec{v}$)

ובו נשכח את הזרם $\Leftarrow$ $I=\frac{q}{\underbrace{4l}_{\text{ה}}}\cdot v$

אזי ע"פ (3*) - $U=-\vec{M}\cdot\vec{B}$, וזאת אני ע"ל...
אז אפשר לכתוב את הפוטנציאל כמכפלה סקלרית של 2 גדלים פשוטים
(ולזה קוראים מומנט מגנטי - $\vec{M}\equiv I\cdot\vec{S}$)

טוב עכשיו אני יודע כמה עבודה אני צריך להשקיע בשביל להעביר את
המסגרת מזווית $\theta_0$ לזווית $\theta$.
עכשיו נרצה לשאול את עצמנו את השאלה - מה יקרה כשנשחרר את המסגרת
לאחר ביצוע העבודה. (למשל - זה לא אינטואיטיבי).

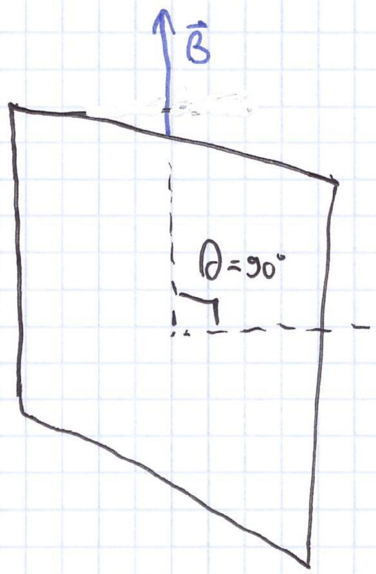



מה שקורה זה "פרסציה": אמאמא!
סביב $\vec{B}$

$$U=-\vec{M}\cdot\vec{B}=-\frac{q}{2m}\vec{L}\cdot\vec{B}$$

$$\vec{F}\cdot\hat{n}=\frac{q}{4l}vB(2l)\sin\theta$$

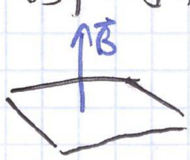
משוואות תנועה:




במקרה ספציפי כזה:
(כי זה הכי סבבה)

$$\vec{\tau}=\vec{r}\times\vec{F}$$
$$\Downarrow$$
$$\tau=\frac{l}{\cancel{2}}\frac{q}{4\cancel{l}}\cdot vB(\cancel{2}\cancel{l})=MB$$

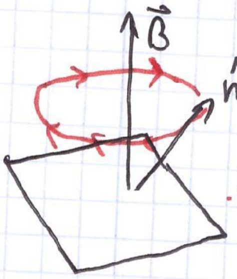
ו $\vec{\tau}$ יהיה מקסימלי (זה בזווית $\theta=90^\circ$)

ב $\theta=0^\circ$ $\Leftarrow$  $\Leftarrow$ $\vec{\tau}=\vec{0}$

ה-$\theta$ נתון: $N = MB\sin\theta$ , כאשר $M = \frac{q}{4\ell} v\cdot\ell^2 = \frac{qv\ell}{4}$

אז עם אלה התוצאות ב $\theta=0$ וב-$\theta=90°$ אנחנו איכשהו

אומרים לכם שמדובר ב $\vec{N} = \vec{M}\times\vec{B}$




אז

זה מה ש-$\hat{n}$ עושה.

$\vec{N} = \frac{d\vec{L}}{dt}$ !

לא להתרגש!!!

ניקח אלמנט זמן קטן:

$$\vec{L}(t+dt) - \vec{L}(t) = \vec{N}\cdot dt$$

⇓ אחרי הרבה אלגברה

$$L(t+dt) = \vec{L}(t) + \vec{N}dt$$

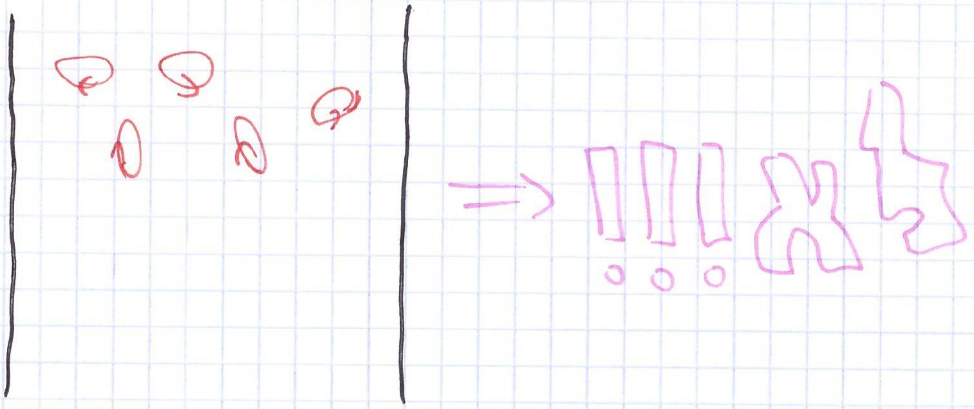
$$N = \vec{M}\times\vec{B} = \frac{q}{2m}\vec{L}\times\vec{B}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{q}{2m}\left(\vec{L}\times\vec{B}\right)$$

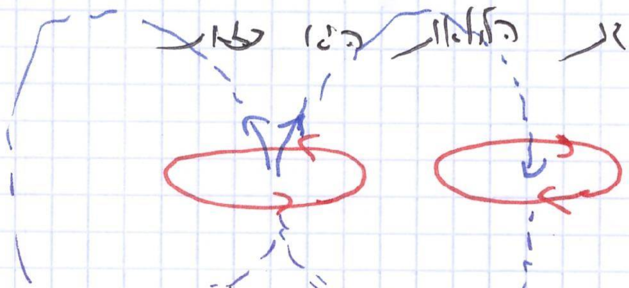
וזו משוואה דיפרנציאלית של 3 נעלמים אחרים

# הרצאה גלים:

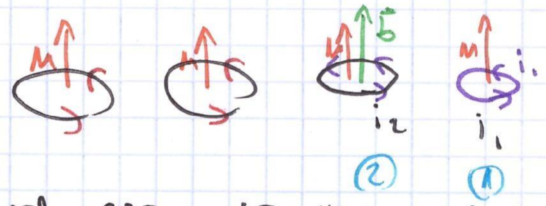
אמרו חכמינו - יש לולאות זרם בתוך החומר שהן יוצרות את השדה המגנטי (בעיקרון זה האלקטרונים שמסביב לפרוטונים אבל הם לא ידעו אטומים מה הוא) אבל ברור היה להם שהן (הלולאות) לא יכולות להסתדר בכיוונים שונים. כמתואר בתרשים




בפרו-מגנט המומנט רוצה ללכת בכיוון השדה ומכיוון שאנו צורמים לגודל מיינבר, בהתחלה חשבו עבור כל המגנטים כי צורת הסידור הלולאות היא כזאת



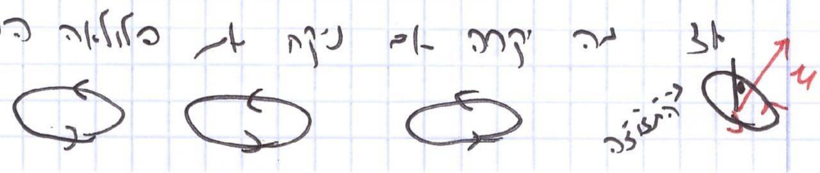
אבל ב"י נבר הזה שדיברו גאוני לא ניתן להבין את השדה המגנטי ע"פ הצורה הזאת והנחת היא כי:




את ה-זרם בכיוון כלפי השדה שהוא יוצר B, והוא גורם לזרם ב-2 להסתדר בצורה הזאת, כך שכיוון המומנט יהיה באותו כיוון.
וכך כל לולאות הזרם צריכות להסתדר באותו כיוון.

ולכן הנחנו $\vec{B}_i = \lambda(M_{i+1}+M_{i-1})$ - השדה בלולאה ה-i כתוצאה מה לולאות הקרובות אליו...

אז מה יקרה אם ניקח את הלולאה הראשונה ונטה אותה ב-θ כמתואר: (תזוזה בזוית θ קטנה) ב-t=0



השדה ב-z-$\vec{b}_4$ ישנה את כיוונו וגודלו ולאחר ז׳ זמן יתחיל לשנות

את נקודה וכיוונה בשביל להסתדר עם השדה המגנטי החדש

ואז השינוי והתגובה וכן הלאה - ואז מה נקבל ???

נסיון מגניב! נקבל גלים!!!

ואיך המשוואה תיראה?

$$\frac{d\vec{M}_i}{dt} = \frac{gq}{2m}\left(\vec{M}_i \times \left(\vec{M}_{i+1} + \vec{M}_{i-1}\right)\right)$$

נקרא לזה הקבוע ונקרא J, והוא תלוי בחומר והוא נקרא הקבוע של הייזנברג...

$\Longrightarrow$ J - הקבוע של הייזנברג.

אז קודם כל יש לנו ג׳ערי כי, וזה לגבי את מקדם הפרופורציה

בין

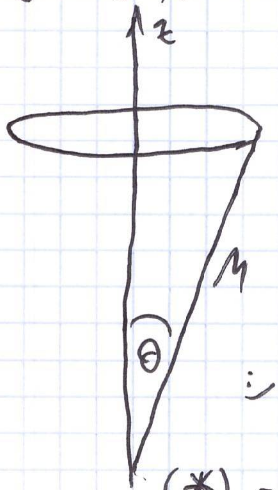
$$\vec{L} \propto \vec{M}$$

אז זאת המשוואה שאני רוצה לרשום ואז אני מוצא את הערך הבא:

$$\frac{dM_i^x}{dt} = 2J\left(M_i^y\left(M_{i-1}^z + M_{i+1}^z\right) - M_i^z\left(M_{i-1}^y + M_{i+1}^y\right)\right) = (*)$$

יענו $\frac{dM}{dt}$ ברכיב ה-x בלבד.

הרעיון הכללי הוא שרוצים לראות את עושים תנודות קטנות שמסוגלות להזיז את הבעיה.




הדבר הבא ינוע סביב איזשהו ממוצע:

M מוכרח: $M_z = M\cos\theta \approx M$

$M_x = M\sin\theta \approx M\theta$

בקירוב ראשון

אז בשימוש בקירוב הזה זה הופך להיות:

$$(*) = \boxed{2JM\left(2M_i^y - M_{i-1}^y - M_{i+1}^y\right) = \frac{dM^x}{dt}} \quad \mathrm{I}$$

נרשום את השאר

$$\boxed{\frac{dM_i^y}{dt} = -2JM\left(2M_i^x - M_{i-1}^x - M_{i+1}^x\right)} \quad \mathrm{II}$$

ואת אלה לא צריך בפתרון המשוואה...

אז רשמנו 2 משוואות. עבור $y$ ועבור $x$.
אז בואו ניקח פתרון מהצורה הבאה:

מיקום

$\sqrt{-1}$

$$M_i^x = u e^{j(ika - wt)} \quad , \quad M_i^y = V e^{j(ika - wt)}$$

כאשר השתמשנו ב-$i$ עבור המיקום (נזהר בעצם) המספר ה-$\sqrt{-1} = j$
ואז לא נכתוב את הפרמטרים, נציב פתרון ונעיף לעזאזל אקספוננטים:

משוואה 1:
$$\boxed{-jwu = 2JM\left(2 - e^{-jka} - e^{+jka}\right)V}$$

וזה אחרי גזירה והצבה ב I. ! II. בדיוק כקודם

משוואה 2:
$$\boxed{-jwV = -(2JM)\left(2 - e^{-ika} - e^{ika}\right)u}$$

נשתמש אוילר ונקבל

$$-jwu = 4JM(1 - \cos(ka))V$$
$$-jwV = (-4JM)(1 - \cos(ka))u$$

וזה נותן - ואפשר לדרוש דברים את הדטרמיננטה שלה, אז נדרוש:

$$\begin{vmatrix} jw & 4JM(1-\cos(ka)) \\ -4JM(1-\cos(ka)) & jw \end{vmatrix} = 0$$

אם הדטרמיננטה הזאת מתאפסת אז יש פתרון בו $w$ היא לא אפסים.

והפתרון של הדבר הזה יהיה:

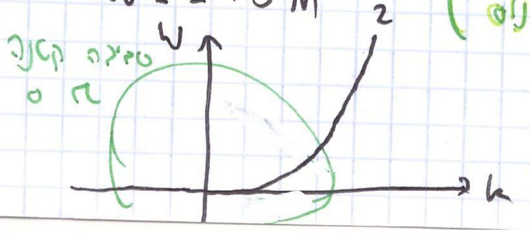
$$W = \pm 4JM(1 - \cos(ka))$$

וזה יחס נפיצה חדש יחסית, והתכונה המעניינת בו היא
שאין כאן שום שבירת סימטריה כי לכל לולאה איכות - רק מה קורה
מימינה
ועבור $k \to 0$ ; $\alpha \to 0$ נקבל

$$W = \pm 4JM \frac{k^2 a^2}{2}$$

(טור טיילור של קוסינוס)

ומקבלים סגנון של פרבולה כזאת -



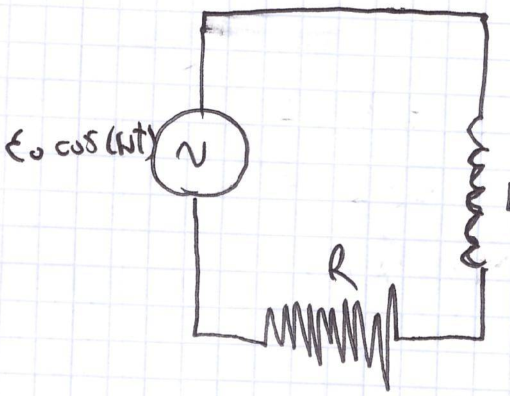
# (1)

## אימפדנס ואדמיטנס: (הרצאה הבאה-מעגלי תהודה)

כאן נעבור לחומר של מעגלים חילופיים שהיינו אמורים ללמוד ב-בג' ונאמר
לנו ע"י ג' 4 הדבר אחר שלא למדנו את זה:

$I = ?$

אז נתון מעגל מהצורה:




והמשוואה שנקבל לכתוב תהיה מהצורה:

$$\mathcal{E}_0 \cos(wt) = L\frac{dI}{dt} + IR$$

כאשר $I(t) = I_0 \cos(wt+\varphi)$ יהיה פתרון

אז נציב את $I(t)$ ונקבל:

$$\mathcal{E}_0 \cos(wt) = -LI_0 w \sin(wt+\varphi) + RI_0 \cos(wt+\varphi)$$

$$\mathcal{E}_0 \cos(wt) = -LI_0 w(\sin(wt)\cos\varphi + \cos(wt)\sin\varphi) +$$
$$+ RI_0(\cos(wt)\cos\varphi - \sin(wt)\sin\varphi)$$

אז נעביר צד, נקבל שוויון ונאפס את המקדמים של $\cos(wt)$ ושל $\sin(wt)$ בצד של "האותיות"...

מקדמי $\sin(wt)$;

$$① \; -I_0 L w \cos\varphi - RI_0 \sin\varphi = 0$$

מקדמי $\cos(wt)$;

$$② \; -LI_0 w \sin\varphi + RI_0 \cos\varphi - \mathcal{E}_0 = 0$$

ונשים לב כי לאחר חלוקה של ① ב $\cos\varphi$ נקבל:

$$① \; tg\varphi = -\frac{wL}{R}$$

ומ ②:

$$③ . \; I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{R\cos\varphi - wL\sin\varphi} = (*_1)$$

$(*_1)$ נרצה לשחק עם ② כי היא מכוערת רצח: מצטער! מה הסלנג?!

$$(*_1) = \frac{\mathcal{E}_0}{R(\cos\varphi - \frac{wL}{R}\sin\varphi)} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{שבה} \\ \text{שוויון ②}}}{=} \frac{\mathcal{E}_0}{R(\cos\varphi - tg\varphi\sin\varphi)} = \frac{\mathcal{E}_0\cos\varphi}{R(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)} = \boxed{\frac{\mathcal{E}_0\cos\varphi}{R}}$$

שבה הצבה... בום!

והרי יש זהות שאומרת ש:

$$\cos^2\varphi = \frac{1}{1+tg^2\varphi}$$

אז:

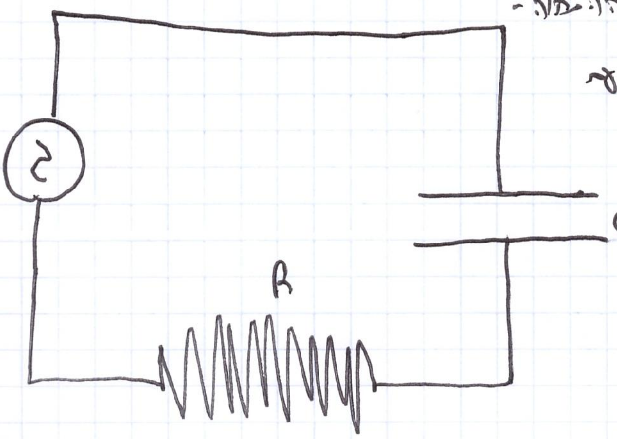
$$\cos^2\varphi = \frac{1}{1+\frac{\omega^2L^2}{R^2}} = \frac{R^2}{R^2+\omega^2L^2}$$

אז נציב:

$$(2) \Longrightarrow \boxed{I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{R}\frac{R}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}} = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}}$$

אז בואו ניקח בעיה אחרת:

נגד מהצורה:




אז אני לא עושה את החישוב מההתחלה -

עשינו את זה איזה 1,000 פעם

בקורס אז רק שיוצא

עבור

$$I = I_0\cos(\omega t+\varphi)$$

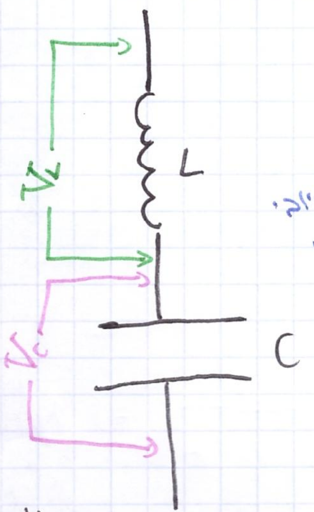
$$\Downarrow$$

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2+\left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

והזווית שמתקבלת: $tg\varphi = \frac{1}{R\omega C}$

עבור קומבינציה R L ו-C כזאת:

אז נקרא למתחים על כל אחד כשמו:




$$V_L = -L\frac{dI}{dt} = I_0\omega L\sin(\omega t+\varphi)$$

כי נכנס מטען חיובי המטען קטן

$$V_C = \frac{Q}{C} = -\frac{1}{C}\int^t I\,dt = -\frac{I_0}{\omega C}\sin(\omega t+\varphi)$$

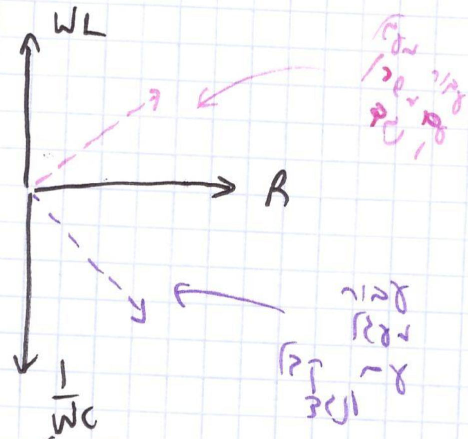
והפוטנציאל הכולל יהיה:

$$V_L+V_C = I_0\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)\sin(\omega t+\varphi)$$

אם היו רק L ו-C במעגל כל מה שהיה משנה זה $\omega L$

כמה הופך להיות $\omega L = \frac{1}{\omega C}$ כאשר נגיע לכך שנקבל תנועה ממשית

ניתן לחשוב על Z גם בצורה וקטורית בהצגה:




ההתנהגות הזאת דומה לאיך שניסו לפתוח את המישור הקומפלקס
לא שואלים...
אז עכשיו נלמד מה זה פאזור:

## פאזורים:

אז נציג את הזרם שנתון כך: $I_0\cos(\omega t+\varphi)$

ע"י הצורה הבאה: $I_0 e^{i\varphi}$ - וזה המספר המרוכב של הזרם.

כאשר הזרם בפועל מוצג ע"י: $Re\{I_0 e^{i(\omega t+\varphi)}\}$ // יעני מכפילים את המספר המרוכב ב-$e^{i\omega t}$.

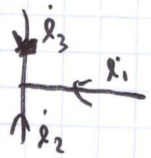
ההצגה של סכום זרמים היא סכום ההצגות:

$$I_1+I_2=I_{01}\cos(\omega t+\varphi_1)+I_{02}\cos(\omega t+\varphi_2)\Rightarrow I_{01}e^{i\varphi_1}+I_{02}e^{i\varphi_2}$$

ואם נכפול ב $e^{i\omega t}$ וניקח את ה Real נקבל את הזרמים עצמם.

$$Re\{I_{01}e^{i(\omega t+\varphi_1)}+I_{02}e^{i(\omega t+\varphi_2)}\}=I_{01}\cos(\omega t+\varphi_1)+I_{02}\cos(\omega t+\varphi_2)$$

נניח למשל כניסת זרמים לצומת במעגל




$\xRightarrow{\text{מחוקי קירכהוף}}$ $i_1+i_2+i_3=0$

אז:

$$I_{01}\cos(\omega t+\varphi_1)+I_{02}\cos(\omega t+\varphi_2)+I_{03}\cos(\omega t+\varphi_3)=0$$

אבל תשאלו איפה קל בזה במרוכבים:

$$I_{01}e^{i\varphi_1}+I_{02}e^{i\varphi_2}+I_{03}e^{i\varphi_3}=0$$

כי יותר קל לכתוב מרוכבים!

בשפת הפאזורים המתח $\mathcal{E}_0\cos(\omega t)\Longrightarrow\mathcal{E}_0$

(4)

במעגל RL היחס בין הזרם למתח (נסמן את המקדם ב Y)
ונקרא לו אדמיטנס:

$$I = YV$$

(מעגל RL)

$$\boxed{Y = \frac{e^{i\varphi}}{\sqrt{R^2+W^2L^2}}} \quad , \quad tg\,\varphi = -\frac{WL}{R}$$

יהיה נוח להגדיר גם את ההפך.
לגודל הזה האימפדנס שנסמנו ב- $Z$, כאשר $Z_1=\frac{1}{Y}$ יהיה
עבור אינדוקטנס של סליל לבד (בלי הנגד במעגל RL)

$$Z = iWL$$

ו $Y=\frac{-i}{WL}$ , ו $\varphi=-\frac{\pi}{2}$.

אדמיטנס ואימפדנס של נגד בודד:

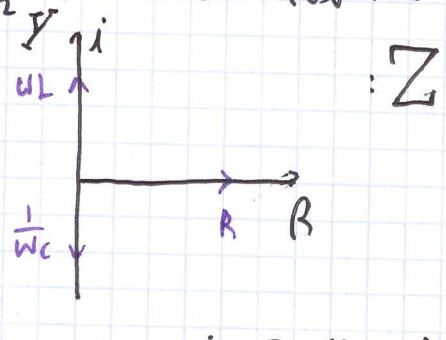
$$\varphi=0 \qquad Y=\frac{1}{R} \Leftarrow Z=R$$

" " " קבל בודד:

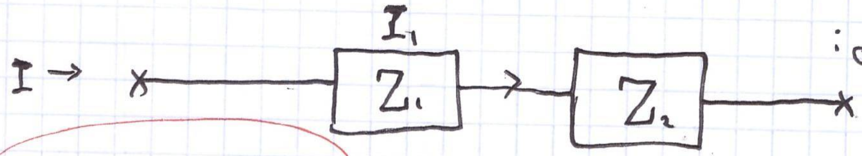
$$Y=iWC \qquad Z=-\frac{i}{WC}$$

החלק המרוכב ב $Y$ אומר כמה מפגר הזרם מהמתח - אם $\varphi=\frac{\pi}{2}$
אז הוא מפגר בפאזה של $\frac{\pi}{2}$.

:Z




שימוש באימפדנס:




נגדים בטור:

$$V = V_1 + V_2$$
$$I = I_1 = I_2$$

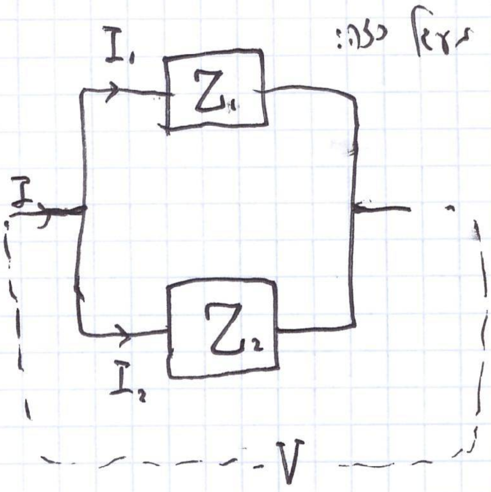
מתוך אוהם: $V_1 = Z_1 I_1$ , $V_2 = Z_2 I_2$

$$ZI = Z_1 I_1 + Z_2 I_2 \Rightarrow Z = Z_1 + Z_2$$

אז לאימפדנסים מתייחסים כמו אל נגדים בחיבור בטור ובמקביל.

(ט)

עבור מעגל כזה:




$$I = I_1 + I_2$$

$$V = V_1 = V_2$$

$$I = \frac{V_1}{Z_1} + \frac{V_2}{Z_2}$$

$$\frac{V}{Z} = \frac{V_1}{Z_1} + \frac{V_2}{Z_2}$$

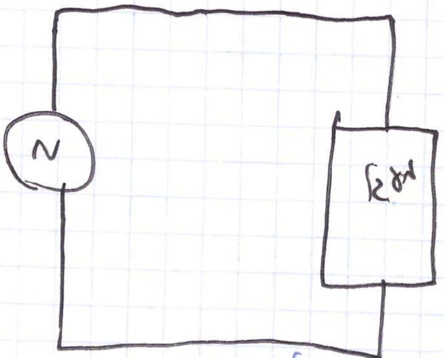
$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}$$

וקיבלנו שהאימפדנסים מתנהגים כמו נגדים.

(6)

## הספק:




$$V = \mathcal{E}_0 \cos(\omega t)$$

$$I = I_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

$$P_{\text{הספק}} = VI = \mathcal{E}_0 I_0 \cos(\omega t)\cos(\omega t+\varphi) =$$

$$= \mathcal{E}_0 I_0 \left(\cos^2(\omega t)\cos\varphi - \cos(\omega t)\sin(\omega t)\sin\varphi\right)$$

סינוס נופל בממוצע

נראה לי מהחלק הממשי

$$\Rightarrow \bar{P} = \mathcal{E}_0 I_0 \overline{\cos^2 \omega t}\cos\varphi = \frac{1}{2}\mathcal{E}_0 I_0 \cos\varphi$$

מהחלק הממשי

$$\overline{\cos^2(\omega t)} = \frac{1}{T}\int_0^T \cos^2(\omega t) = \frac{1}{2}$$

טאגר

$$\mathcal{E}_{RMS} = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{2}}$$

מה-$\frac{1}{2}$

מכאן ש- $Z I_0 = \mathcal{E}_0$

והממוצע:

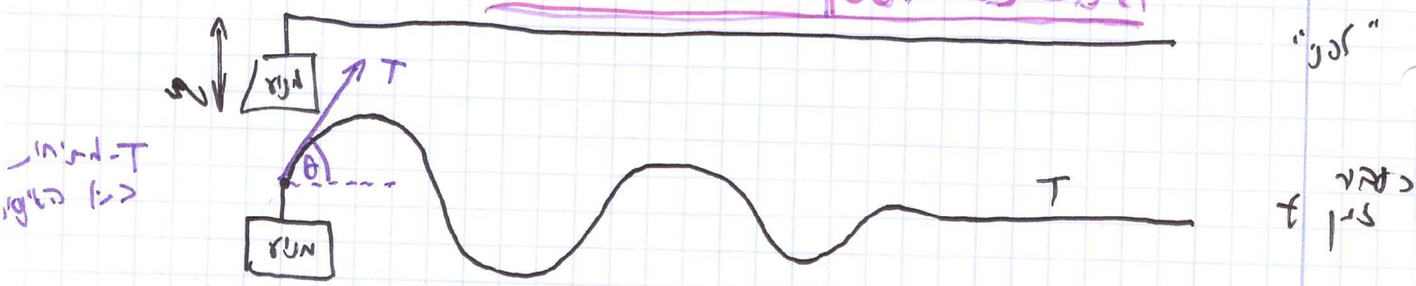
$$Z I_{RMS} = \mathcal{E}_{RMS}$$

$$I_{RMS} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$$

$$\bar{P} = V_{RMS} I_{RMS} \cos\varphi$$

$$\bar{P} = Re\{Z I_{RMS}^2\} = I_{RMS}^2 \, Re\, Z = \frac{I_0^2}{2} Re\{Z\}$$

## אימפדנס ושטף אנרגיה של הגל:




הגל מתחיל בצד שמאל עם תנועת המנוע ולאט לאט יותר ויותר
גוף מתחיל לנוע ולצבור את האנרגיה שהמנוע מכניס.
המנוע שולח אנרגיה ולא מעניין אותו לאיפה היא הולכת. אם היה לי
כבכבל אנרגיה ("נעד") הוא היה אוסף את האנרגיה של המנוע
והמנוע כלל לא היה מודע לזה.

$$F_{\text{על המנוע}} = T\sin\theta \underset{\text{נקירב}}{\approx} T_0 \tan\theta = T_0 \frac{\partial\psi}{\partial z}$$

נבחר פיתרון לגל הרמוני - גל עם: $\psi(z,t) = A\cos(\omega t - kz)$

⟸ אז אם נציב נקבל

$$\frac{\partial\psi}{\partial z} = kA\sin(wt-kz)$$

כאשר

$$(2*)\quad \frac{\partial\psi}{\partial t} = -wA\sin(wt-kz)$$

והרי מהירות הפאזה היא:

$$V_p = \frac{w}{k}$$

אז נציב אותו ונקבל:

$$\frac{\partial\psi}{\partial z} = -\frac{1}{V_p}\frac{\partial\psi}{\partial t}$$

ואז (מהעמוד הקודם)

מקבילה של מתח $\left\{ F_{\text{החוט מצד שמאל על המיתר}} \right. = -\frac{T_0}{V_p}\frac{\partial\psi}{\partial t} \left. \right\}$ מקבילה של זרם (שכן נגזרת לפי הזמן)

ולגודל $\frac{T_0}{V_p}$ נקרא אימפדנס:

$$Z = \frac{T_0}{V_p}$$

אבל אנחנו יודעים ש- $V_p$, $V_p$ הוא:

$$V_p = \sqrt{\frac{T_0}{\rho_0}}$$

לכן האימפדנס יהיה:

$$Z = \sqrt{T_0\rho_0}$$

כמו הקשר בין אימפדנס - הספק אנרגיה כמו:

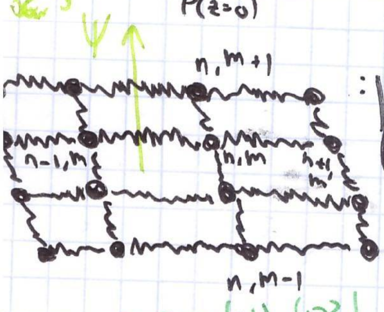
נחזור להספק:

$$P = F_{\text{חוט על המיתר}} \cdot V_p = F\cdot\frac{\partial\psi}{\partial t} = \left(Z\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right) = Z\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2$$

נעשה מיצוע על הזמן ל-(2*) בריבוע ונציב $z=0$:

$$\bar{P}\Big|_{P(z=0)} = \frac{(A^2W^2)}{2}Z$$

## גלים דו ממדיים:




אז יש לנו אוסף של קפיצים ומסות כמו כאן:
(נרצה להקטין את הקפיצים והמסות כדי לקבל תווך)
נתבונן בכל הקפיצים שמסביב ל-$\psi_{n,m}$:

$$M\frac{\partial^2\psi_{n,m}}{\partial t^2} = -ka^2\frac{(\psi_{n,m}-\psi_{n+1,m})}{a^2} - ka^2\frac{(\psi_{n,m}-\psi_{n-1,m})}{a^2}$$

$$-ka^2\frac{(\psi_{n,m}-\psi_{n,m+1})}{a^2} - ka^2\frac{(\psi_{n,m}-\psi_{n,m-1})}{a^2} =$$

נכפול ונחלק ב-$a^2$ כדי לקבל קירוב לנגזרת שניה.

באופן רציף

סוף

$$= a^2k\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right)$$

לכן:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = \frac{a^2k}{M}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right)$$

נגדיר $c^2 = \frac{a^2k}{M}$ ונקבל:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right)$$

# גלים במימד גבוה (2D ו 3D):

משוואת הגלים תיראה כך: $\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = c^2\nabla^2\psi$

(במשוואת הגלים יחס הנפיצה "יצא לינארי").

והפתרון שנציע יהיה:

$$\psi = Ae^{i((k_x x + k_y y + k_z z) - \omega t)}$$

כאשר $\omega$, $k_x, k_y, k_z$ מספרים $\psi=\psi(x,y,z,t)$!

ורכיבות נסתכל על:

(רכיבות עולק-גזר מילה מגובה.)

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = -k_x^2\psi$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = -k_y^2\psi$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = -k_z^2\psi$$

נציב את הפתרון שהצענו בשביל לגלות את הקשר בין $\omega$ ל-$k$ (יחס נפיצה)

(וכמובן נחלק באקספוננטה)

$$-\omega^2\psi = (-k_x^2\psi - k_y^2\psi - k_z^2\psi)c^2 \underset{\text{החלוקה הנדרשת}}{\Rightarrow} \omega^2 = c^2(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)$$

נגדיר $k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$

ונקבל יחס נפיצה מהצורה: $\omega^2 = c^2k^2$

נסתכל על גלים אלקטרומגנטיים - גח שיוצא מהפלאפון, מהמנורה, והם נעים ב-3 מימדים

## גלים אלקטרו-מגנטיים:

בגלל שאנחנו למדנו דברים ב c.g.s ובתאוריה (גם במעבדה) משתמשים ב m.k.s אז כאן נעיין קצת ה סדרים על המעבר יחידות בכבדה אלו:

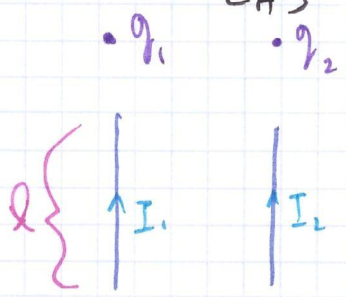
| c.g.s | m.k.s |
|---|---|
| $F = \frac{q_1 q_2}{r^2}$ | $F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q_1 q_2}{r^2}$ |
| $F = \frac{2I_1 I_2 l}{c^2 r}$ | $F = \frac{2I_1 I_2 l}{4\pi N_0 r}$ |

$\varepsilon_0 = 9\cdot10^{-12}\left[\frac{C^2}{N m^2}\right]$

$\mu_0 = 4\pi\cdot10^{-7}\left[\frac{N}{A^2}\right]$

תזכורת: ל-ניוטון

$\left(N_0 = \frac{1}{\mu_0}\right)$



המשך יחידות:

| M.K.S | c.g.s |
|---|---|
| $\vec{F}=q(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B})$ | $F=q\left(\vec{E}+\frac{v}{c}\times\vec{B}\right)$ |

$\vec{B}\odot$ $\quad e\;\vec{v}\quad \downarrow\vec{F}$

## שדות בחומר:

כאשר $\vec{J}$ - צפיפות זרם

$\rho$ - מטען לנפח

$$\underbrace{\vec{D}}_{\text{המקור של המטען החיצוני}}=\underbrace{\vec{E}}_{\text{השדה המורגש}}+\underbrace{4\pi\vec{P}}_{\text{הפולריזציה של החומר}}$$

השדה המורגש יהיה המקור של המטען החיצוני פחות הפולריזציה של החומר

$$\vec{H}=\vec{B}-4\pi\vec{M}$$

(אותו עיקרון).

ב- c.g.s:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{D}=4\pi\rho$$

רוטור $\quad \vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$

דיברגנץ $\quad \vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0 \quad$ (אין מונופול מגנטי)

$$\vec{\nabla}\times\vec{H}=\frac{4\pi}{c}\vec{J}+\underbrace{\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}}_{\text{התיקון של מקסוול}}$$

ב- M.K.S.A:

A - אמפר (כבר) - כי אין מזג מה קולוני

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{D}=\rho$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{H}=\vec{J}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$

ויחס ב M.K.S:

$$\vec{D}=\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P}$$

$$\vec{B}=\mu_0(\vec{H}+\vec{M})$$

### הגדרות נוספות: מגנטיות:

כל דבר חדש שהוא מגדיר מסומן ב- 2 קווים אדומים מעל.

$$\vec{M}=\underbrace{\overline{\overline{\chi}}_m}_{\text{דלאי מגנטי}}\vec{H} \qquad \text{זה קירוב}$$

דלאי מגנטי והוא מספר שלא תלוי בשדה כרגע.

$$\vec{B}=\mu_0(1+\chi_m)\vec{H}$$

$$\vec{B}=\overline{\overline{\mu}}\vec{H}\implies\mu=\mu_0(1+\chi_m)$$

$$\mu=\overline{\overline{\mu}}_r\mu_0\implies\mu_r=1+\chi_m$$

זה לא כוח - זה הספרים תורו...

תשובה:

בקירוב לחומר מבודד: $\vec{P} = \varepsilon_0 \chi_e \vec{E}$

קבוע (לא תלוי במקום) ומבחינתנו כרגע הוא לא תלוי בכלום.

תזכורת מעמוד קודם: (כל מה שמסומן ב $=$ מציין הוא מגדיר טנזור)

$$\vec{D} = \bar{\bar{\varepsilon}}\,\vec{E}$$

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_0 (1+\chi_e)\vec{E}$$

לכן

$$\varepsilon = \varepsilon_0 (1+\chi_e)$$

$$\varepsilon = \bar{\bar{\varepsilon}}_r \varepsilon_0$$

אזי

$$\varepsilon_r = 1+\chi_e$$

כך שחשוב לציין גם: $\vec{B} = \mu \vec{H}, \ \mu_r = 1+\chi_m$

נניח חומר שאין בו מטענים חופשיים והוא לא מוליך:

$$\rho = 0, \quad \vec{J} = 0$$

במקרה כזה משוואות מקסוול הולכות להיראות בצורה הבאה:

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{\nabla}\times\vec{E} + \mu\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = 0 \qquad (5) \leftarrow (2)$$

כאשר החלפנו את B ב H כי הוצאנו את $\mu$.

$$\vec{\nabla}\times\vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{\nabla}\times\vec{H} - \varepsilon\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0 \qquad (6) \leftarrow (4)$$

גם פה הוצאנו $\varepsilon$ והחלפנו את E ו D...

$$\vec{\nabla}\times(5) = \vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{E}) + \mu\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\times\vec{H} = 0 = \vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{E}) + \mu\varepsilon\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{E} = 0$$

ורוטור של רוטור ניתן לכתוב:

$$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{F}) = \underbrace{\nabla}_{grad}(\underbrace{\vec{\nabla}\cdot\vec{F}}_{div}) - \underbrace{\nabla^2}_{\text{לפלסיאן}} F$$

אזי:

$$\underbrace{\vec{\nabla}}_{grad}\cancel{(\underbrace{\vec{\nabla}\cdot\vec{E}}_{div})} - \nabla^2\vec{E} + \mu\varepsilon\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{E} = 0$$

0 לפי הנחה בהתחלה הצפיפות $\rho = 0$

ובעצם נקבל כלומר:

$$\nabla^2 E = \mu\varepsilon\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$$

לכל מרכיב:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)E_x(x,y,z,t) = \mu\varepsilon\frac{\partial^2}{\partial t^2}E_x$$

אם נוכל לאמר לעצמנו ש:

$$\nabla^2 H = \mu\varepsilon\frac{\partial^2 H}{\partial t^2} \qquad ; \ c^2 = \frac{1}{\mu\varepsilon}$$

יד

אז בריק (אין נשאים q אין χ וכו' וכו'):

$$c^2 = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0}$$

ובחומר:

$$c^2 = \frac{1}{\varepsilon \mu}$$

ההבדל הזה בין ריק לחומר במהירות הגל יביא לנו תופעות מה זה מעניינות בעתיד. (בשיעור הבא).

(ח)

## הרצאה חציים-:

אז עמית קרן בחו״ל - ומחליפה אותו מתראת רבקה.

והיא אומרת שיהיה ״מגניב״...

והנושאים להיום:

(1). משוואות הלמהולץ

(2). איך מתקדם גל מישורי בריק.

(3). איך מתקדמות אלומות כללי

(4). אלומות שאמרו בורה

(5). אלומות מאיזות

והמסך של הבקר פיתח את הלוח אז יהיה סבבה.

אם נעשה טרנספורם פוריה A משוואות הגלים: (האלקטרו-מגנט).

$$\nabla^2 \vec{E} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \xrightarrow[\text{forier}]{} E(\underbrace{t}_{(x,y,z,t)}) = \int \vec{E}(w) e^{iwt} dw$$

לכן בזמן

אז הטרנספורם פוריה שיתקבל יהיה מהצורה: (אין תלויות בזמן)

$$\nabla^2 \vec{E} = -\frac{w^2}{c^2}\vec{E} = -k^2 \vec{E}$$

$\frac{1}{c} = \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$ , (בריק) $w = kc$

אז:

וזוהי משוואת הלמהולץ. $\Leftarrow$ $\boxed{\nabla^2 \vec{E} = -k^2 \vec{E}}$

במציאות - כל עוד לא משתמשים בפולסים קטנים וקצרים בזמן נשתמש

בד״כ במשוואה הזאת.

נסתכל על גל מישורי:

$$\vec{E} = E_x \cdot e^{ik_x x + ik_y y + ik_z z}$$

כי היא כמעט נפלה מהבמה...

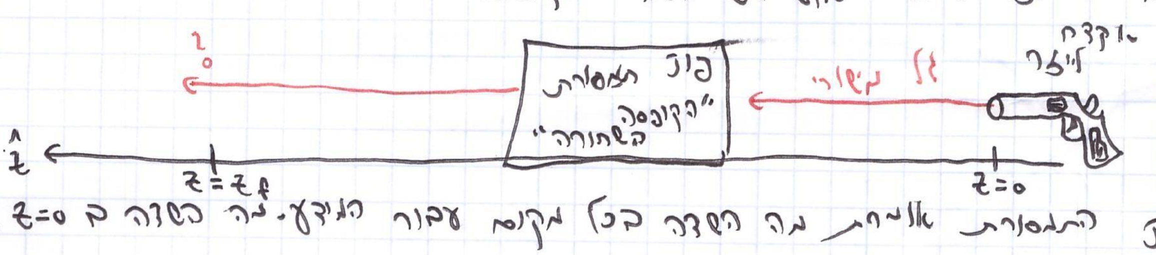
נציב במשוואה ונקבל את הקשר הבא:

$$\boxed{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k^2}$$

אחרי גזירות של מינוס (בלה בלה בלה) $E_x \cdot e^{\cdots}$ !

אז היא הוצגה לנו מושג בשם ״פונ׳ תמסורת״ שהיא תשוב לנו שאלות השאלה.

נניח יש לנו לייזר שיוצר גל מישורי וקופסה שחורה




פונ׳ התמסורת אומרת מה השדה בכל מקום עבור המידע מה השדה ב $z=0$.

H - הטרנספר פנקציין שאנחנו רוצים להגדיר שתעביר את השדה ב $z=0$ לכל מקום.

השדה ב-$z$ (אין לנו כלום על $k_z$ - הוא לא נתון)

יהיה הרי נראה כמו הקודם: $\vec{E} = E_x e^{ik_x x + ik_y y + ik_z z}$ (*)

ונניח שיש לנו את $E$ ב $z=0$:

$$\vec{E}(x,y,z=0) = E_x e^{ik_x X + ik_y y}$$

נשתמש בקשר שמצאנו עבור $k^2$ בשיעור הקודם ונציב ב(*):

$$k_z = \pm\sqrt{k^2 - (k_x^2 + k_y^2)}$$

אז:

$$\vec{E} = E_x e^{ik_x x + ik_y y \pm i\sqrt{k^2-(k_x^2+k_y^2)}\, z}$$

אז פונ' התמסורת (מה שאני יכפול ב $\vec{E}(z=0)$) תהיה:

$$\Longrightarrow H(k_x,k_y,z) = e^{\pm i\sqrt{k^2-(k_x^2+k_y^2)}\, z}$$

התחלנו במשוואות גלים - עברנו למשוואת הלמהולץ ומשם "יצרנו" לעצמנו פונ' תמסורת דרך משוואת הקשר של k.

והרעיון הכללי הוא שמכפילים

$$\vec{E} = \vec{E}(z=0)\cdot H(k_x,k_y,z)$$

וחשוב - היא מקבלת תלות ב-K ו-$\lambda$ הוא:

$$\left(k = \frac{2\pi}{\lambda}\right)$$

דרך טרנספורם פוריה נפרק את כל "הרבה" גלים מישוריים ועליהם נפעיל את פונ' תמסורת וכך נראה איך הוא נראה ב $z$ כלשהו.

נניח שדה חשמלי כללי שמתחיל ב $z=0$: (לאו דוקא גל שנראה כמו גאוסיאן).

$$\tilde{E}(k_x,k_y,z=0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} dx\,dy\, E(x,y)\, e^{-ik_x x - ik_y y}$$

אל תשכחו לנרמל במימד

וטרנספורם פוריה - הטרנספורם ההפוך יהיה:

$$E(x,y,z=0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} dk_x\,dk_y\, \tilde{E}(k_x,k_y)\, e^{ik_x X + ik_y y}$$

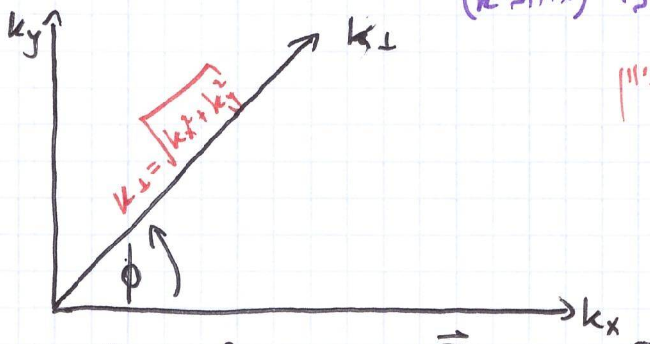
אז נכתוב את הטרנספורם ההפוך בכוון התמסורת

$$(2*)\quad E(x,y,z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}dk_x\,dk_y\,\tilde{E}(k_x,k_y)\,e^{ik_xx+ik_yy}\cdot\underbrace{e^{\pm i\sqrt{k^2-(k_x^2+k_y^2)}\,z}}_{H(k_x,k_y,z)}$$

(3*)

כשאני מתעסקת בלייזר
אפשר לזרוק את המינוס
שזה גלים חוזרים ובלייזר מדויק אין החזרות - בגלל זה
עושים איתו לעיל ניסויים מעניינים - כי אין גלים חוזרים (המינוס).

נצייר את מרחב התדר המרחבי (מרחב k)

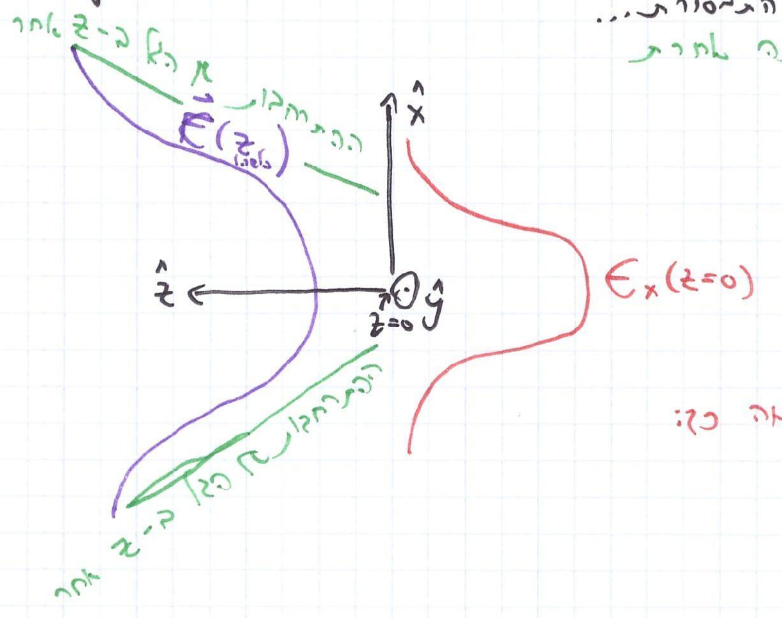



כאשר $k_\perp$ זה ה-k שניצב לכיוון ההתקדמות שהוא ב-z...

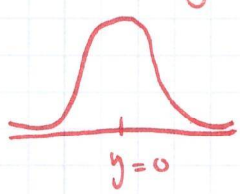
ואם $\sqrt{k_x^2+k_y^2}$ יהיה גדול יותר $\vec{E}$ ב-(2*) למעשה יקבל פאזה אחרת ב-(3*) - זאת שפונק' התמסורת כתובה בסוגר.

והפאזה הנצברת - נראה מהצורה:
שהיא הפאזה של פונק' התמסורת...
וכל גל מקבל פאזה אחרת

$$\phi(z)=\sqrt{k^2-(k_x^2+k_y^2)}\,z$$



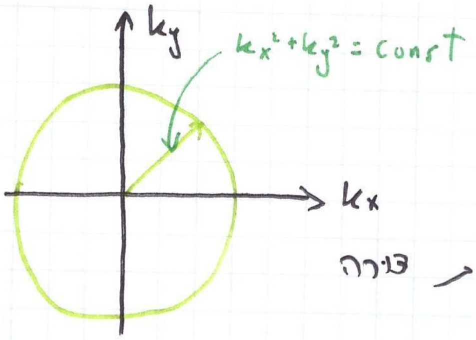

גם $E_y$ ב-z=0 נראה כך:




רק שאין לה מקום לצייר בתלת מימד את זה יוצא נהדר!
ב-z שונים הגאוסיאן הזה מתפשט וזה בעצם הפאזה הנצברת.

הערה על פונק' התמסורת:

עבור $k_x^2+k_y^2>k^2$ - נקבל דעיכה (פשוט תציבו בפאזה)
(כי נזרוק את המינוס ולא נקבל i בשורש! $i\cdot i=-1$ (קסם) אז נקבל דעיכה...
מציורית זה יראה כך:




אם ניקח במישור $k_y$ ו-$k_x$ מעגל
(מרחב התדר)

דרך טרנספורם פוריה נגלה איזו אלומה שומרת צורה

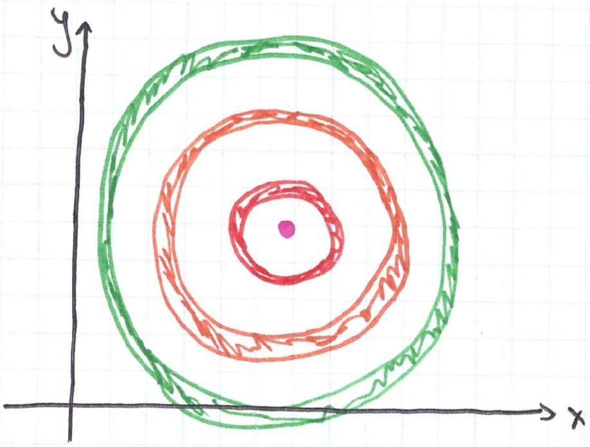
## אלומות שומרות צורה:

אלומת בסל היא טבעת במרחב:

$$E(x,y,z=0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\phi\, e^{ik_\perp(x\cos\phi+y\sin\phi)}=\underbrace{J_0}_{\text{פונ' בסל}}\left(k_\perp\sqrt{x^2+y^2}\right)$$

שהיא מכפלה של קוסינוס או סינוס (או $i$!).

וזה אמור להיראות כך




טבעות שהולכות ודועכות.

נציב את בסל בהלמהולץ ונקבל:

$$\nabla^2\vec{E}=-k^2E \Rightarrow -k_\perp^2\cos\phi-k_\perp^2\sin\phi-k_z^2=-k^2$$

$$E(x,y,z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi\, e^{ik_\perp(x\cos\phi+y\sin\phi)}e^{ik_z z}$$

כאשר $k_\perp^2+k_z^2=k^2$

$k_\perp^2=k_x^2+k_y^2$ !

יש לנו פה סופרפוזיציה של גלים מישוריים שכולן פותרות את משוואת הלמהולץ.
ועכשיו היא עוברת לקללה האחרונה להיום...
ואז היא תראה לנו את הגרף שמראה את כל הדברים המעניינים שעושים עם בסל.

## תשורה: אלומות מאיצות:

משוואה פאראקסיאלית או באנגלית Paraxial equation.

משוואה זו מתאימה לגלים או קרניים בכיוונים יחסיים (בעלי זווית קטנה מציר z)

כיוון התקדמות עיקרי יהיה z.

אז נתחיל מ הלמהולץ:

$$\nabla^2 E = -k^2 E$$

נציב פתרון פאראקסיאלי:

$$E(x,y,z) = A(x,y,z)\cdot e^{ikz}$$

(A משתנה לאט ב-z)

כאשר הזנחת התנועה בכיוון z תהיה:

מזניחים בדרך: $\left|\frac{\partial^2 A}{\partial z^2}\right|^2 \ll |k^2 A|$ , $\left|\frac{\partial A}{\partial z}\right| \ll |kA|$

ומשמעות הקירוב היא:

$$\left|\frac{\partial A}{\partial z}\right| \ll \left|2\pi\frac{A}{\lambda}\right|$$

ונקבל משוואה פאראקסיאלית שהיא משהו שפותר את משוואה ומצאו לה פתרון שומר צורה:

$$\boxed{i\frac{\partial A}{\partial z} = -\frac{1}{2k}\left(\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2}\right)}$$

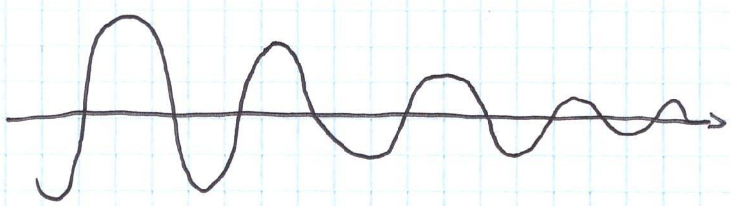
המשוואה הזאת בעצם מניחה ש $k_z \gg k_x, k_y$ (זוויות קטנות)

יאללה סרטון!!!

והפתרון השומר צורה של המשוואה הפאראקסיאלית היא פונקציה שנקראת

Airy(x)

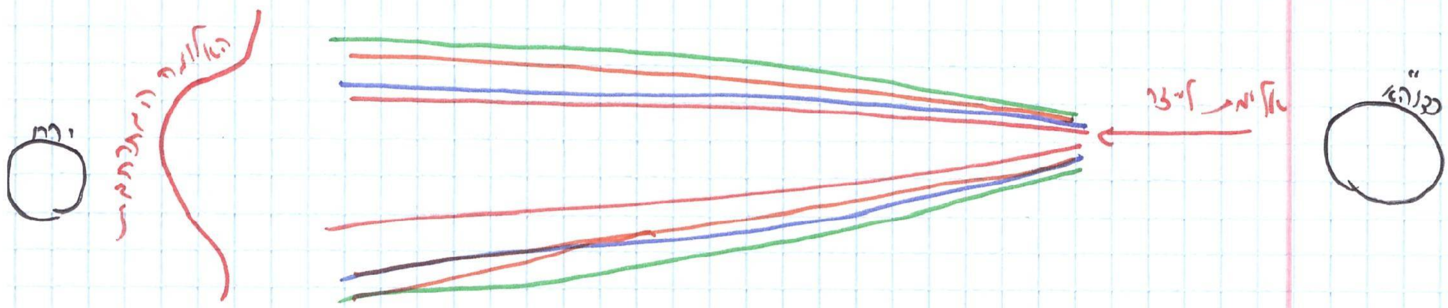
והיא נראית כך



והשינוי היחיד מגיע מה $e^{ikz}$ בפתרון מהצורה: $e^{ikz}\cdot A(x,y,z)$.

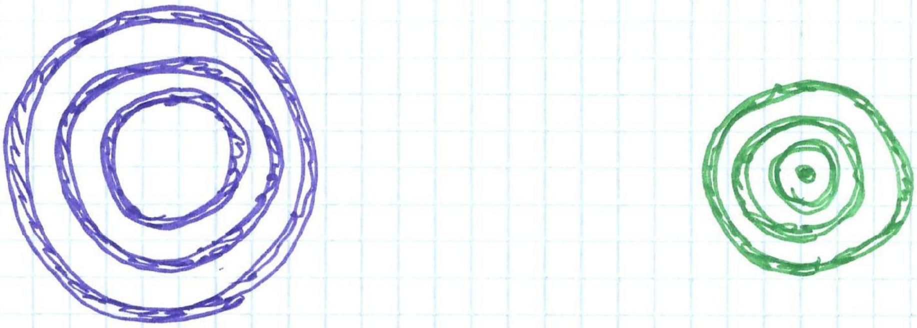
(ט). ד.

עימות מהמצגת...




כשנירה קרן לייזר לירח הגודל של אלומת האור שתגיע לירח יהיה כגודל מדינת טקסס..

בסל מסדר 0: בסל מסדר גבוה



- באלומות מוגבלות הפיתרון לא שומר צורה. (עד כה)

יש פיתרונות מוגבלים שומרי צורה שנראה בשיעור הבא...

(א)

# הרצאה גלים - עם רענן - הרצאה 2:

אז היא הוציאה את עיקרי הדברים משיעור קודם כי היא קיבלה מיילים מאנשים שלא הבינו מה היא עשתה: (נושאים להיום):

(1). חזרה כללית.

(2). חזרה על פתרון שומר צורה - בסל

(3). פתרון [illegible] 4 [illegible]

(4). גאוס

עוברים מהפעם קודמת על מה שעשינו!

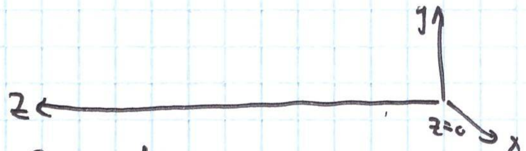
(א). מפה לשם בפעם הקודמת קיבלנו את משוואת הלמהולץ עבור גל מונוכרומטי: ע"י הפרדה בורחה את משוואות הגלים לרק חלקים מרחביים אך היא (גל עם תדירות נתונה) עשתה אותו:

$$\nabla^2\vec{E} = -k^2\vec{E}$$

(ב). הצבנו פתרון כזה:

$$(*) \quad \vec{E} = E_x e^{ik_x\cdot x + ik_y y + ik_z z}$$

ורצינו לראות מה קורה לגל כשהוא מתקדם ב-z:



(ג). וראינו שכשהצבנו בהלמהולץ נקבל

$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k^2$ שזה בן זוגה כי אז נקבע את $k_z$ ע"י $k_x, k_y$.

ואם נבודד את $k_z$ שנחלץ מהמשוואה כזאת (המשוואה של האים) בשילוב ב(*) נקבל:

$$\vec{E} = E_x e^{ik_x x + ik_y y + i\overbrace{\underbrace{\sqrt{k^2-(k_x^2+k_y^2)}}_{k_z}\, z}}$$

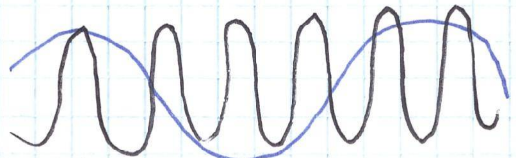
וזה פאזה התמסורת $A\cdot e^{i\phi(z)}$ שהיא מדברת איך כל היום...

(ד). והגענו למסקנה כי

$$\text{Phaze}(z) = \sqrt{k^2-(k_x^2+k_y^2)}\, z$$

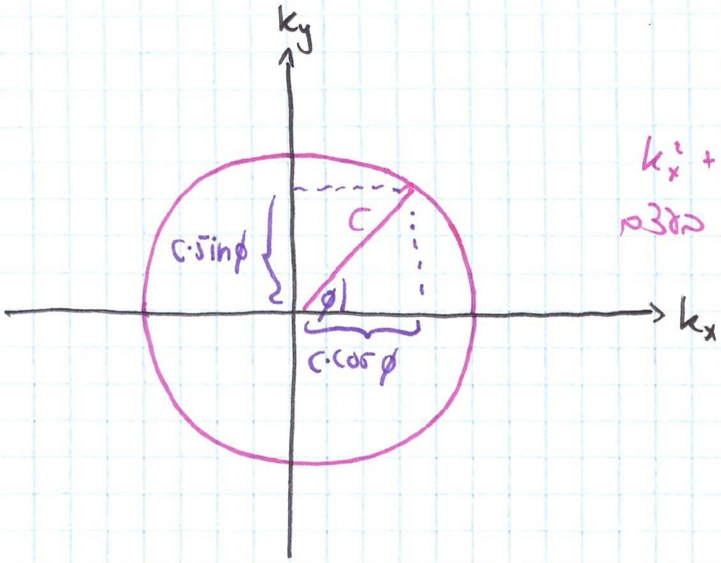
צובר הפאזה

(*) כל גל מישורי (ב-ב') צובר פאזה אחרת ב-z (האופן בפאזה האחרת מ-הבא בגלל שעבור כל $k_x^2+k_y^2$ יהיה לנו אחר)



וכל פתרון שומר צורה - יענו $\boxed{k_x^2+k_y^2 = C^2}$ על מישור המסדר המאונך

בעמוד הבא:




$k_x^2+k_y^2=c^2$

כל פיתרון בצורה הזאת בעצם
ישמר צורה כי $c=const.$
אם התחלנו עם עיגול
נמשיך לנצח עם עיגול.

## אלומה שומרת צורה - בסל:

בפעם הקודמת סדר הדברים היו כדלהלן:

(א). הביטוי שכתבנו בפעם שעברה הוא מעגל

(ב). שומר צורה. (האינטגרל הזה שרשמנו שלו הוא בסל)

$$E(x,y,z=0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}d\phi\, e^{ic(x\cos\phi+y\sin\phi)}=J_0(c\rho)$$

כאשר $c\cdot\cos\phi=k_x$
$c\cdot\sin\phi=k_y$

זה טרנספורם פוריה של מעגל
ושבגלל להיות זאת בציור המשולש שציירתי
למעלה.

אני צריך הפאזה של כל האלו שמרכיבים את פונ' בסל
זהה בהתקדמות ב-$z$.

$$\text{Phase}(z)=\sqrt{k^2-c^2}\,z$$

(זה גם קבוע כי $c^2=k_x^2+k_y^2=c^2(\cos^2\phi+\sin^2\phi)=c\cdot 1$)

נתבונן בסדר $\alpha\neq 0$ של בסל:

$$J_\alpha(c\rho)=E(x,y,z=0)=\frac{1}{2\pi}\int e^{i\alpha c+ic(x\cos\phi+y\sin\phi)}$$

ואם נכפול בטרנספר פונקציית הזאת נקבל ש:

נשים לב שבגלל זה $\frac{1}{2\pi}$ כי כבר אנחנו עושים $\phi$ צי' ולא $\phi$ א כמו כאן ואנחנו לא אומרים להבין את זה!

$$E(x,y,z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}d\phi\, e^{ic(x\cos\phi+y\sin\phi)}\cdot\underbrace{e^{i\sqrt{k^2-c^2}\,z}}=$$

שימו לב
כאן תלוי באינטגרל

פונ' הנוספת
אינה תלויה ב-$\phi$ ולכן
יכול גם להוציא אותה

$$=\frac{1}{2\pi}\cdot e^{i\sqrt{k^2-c^2}\,z}\int_0^{2\pi}d\phi\, e^{ic(x\cos\phi+y\sin\phi)}$$

ואז היה צריך שמישהו נתנה לנו את כל הכלים לראות את הדבר הבא:

## פיתרון מאיץ בזוויות חדלות:

ב 2D (מהלמהו 4):

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 E}{\partial x^2}=-k^2 E$$

$$\Downarrow$$

ובהצבת הפיתרון כפי שנקבל:

$$k_x^2+k_z^2=+k^2$$

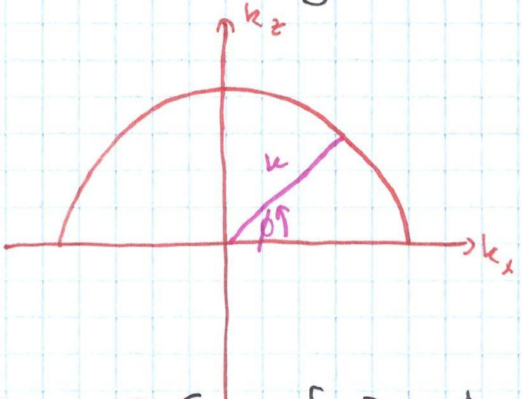
כאשר נשים לב שאנחנו בדו־מימד, נקבל!...

אז הפיתרון המאיץ יראה כך: (ב $z=0$):

ז"א אל מה לשים לב לגבי שלבים...

פה האינטגרל 8 הזה מוגבל.

$$\text{Accelerating Pitaron}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} d\phi\, e^{i\alpha k}\cdot e^{ikx\cos\phi}$$




והרי $k_z=\sqrt{k^2-k_x^2}=k\sin\phi$

(נציב בצורה כספורה)

ש $k_x=k\cos\phi$ ונקבל...

וכ x ו-z הכולל עכשיו תיראה כך אחרי הכפלה בפונק התמסורת:

תשימו לב שמה רק עד $\pi$

$$A_{cc}(x,z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} d\phi\, e^{i\alpha k}\, e^{ik(x\cos\phi+\underbrace{z\sin\phi}_{y})}$$

אם היינו עושים עד $2\pi$ היינו מקבלים בסל רגיל

טוב אם ההוא יושב מאחורי לא מבין מה היא רוצה - אני נהנה לי בסדר...

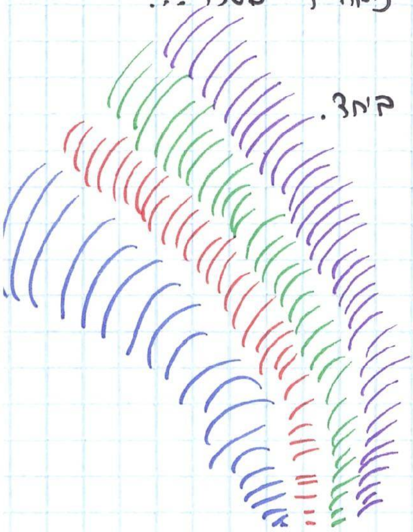
אבל בעיקרון יש פה הצלה איפשהו...

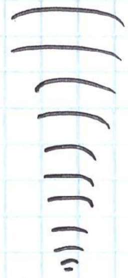
גם שמייצר את התאוצה זה סופרפוזיציה של הרבה גלים ביחד.

לפני: עבור גל אחד:

אחרי: אם נוסיף מלא גלים:

קיבלנו הכחול זה הגל הראשון;





יש לא אחד שעף בקו ישר

קלטתם איך זה מתעקם - עכשיו איכשהו צריך לחבר את זה למה שהיה כבר בשיעור...

המטרה של השיעור היא להראות לנו שהנושא של גלים עדיין פעיל לגמרי ועדכני
ולהראות לנו שגלים הופך להיות מעניין כשאנחנו נכנסים לתחום המשלי הזה
של גלים ברווח.

## הרצאה חזית:- חזית מישוריים:

ראינו בעבר את משוואת הגלים:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=c^2\nabla^2\psi$$

וראינו שניתן לפתור את המשוואה בעזרת פתרון מהצורה:

$$\psi=Ae^{i(k_xx+k_yy+k_zz-\omega t)}$$

כאשר:

$$\vec{k}=(k_x,k_y,k_z)\,,\ \omega=c|k|\,,$$

נניח בדוגמה גל מישורי (נניח גל באמבטיה) - אנו רואים פסים
כאלה (ויזואלית):


מקסימום

הצבע הזה רק
בשביל להבחין
מה זה מקסימום

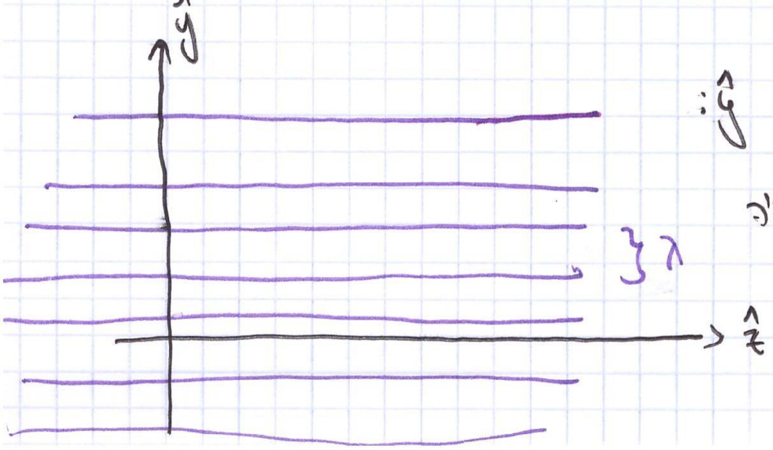
והפסים האלה הם המקסימום. הפתרון יהיה פתרון מהצורה:

$$\psi=A\cos(k_zz-\omega t)=A\cos(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)$$

$$\vec{k}=(0,k_z)$$

ונשים לב שהפתרון לא תלוי ב-y - כי לא משנה מה y יהיה, נניח
הגל לא באמת ישתנה.

נסתכל על גל מישורי בכיוון $\hat{y}$:




$$\xRightarrow{\text{הצורה הפתרון יהיה מהצורה}}\ \psi=A\cos(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)$$

כאשר הצורה:

$$\vec{k}(k_y,0)$$

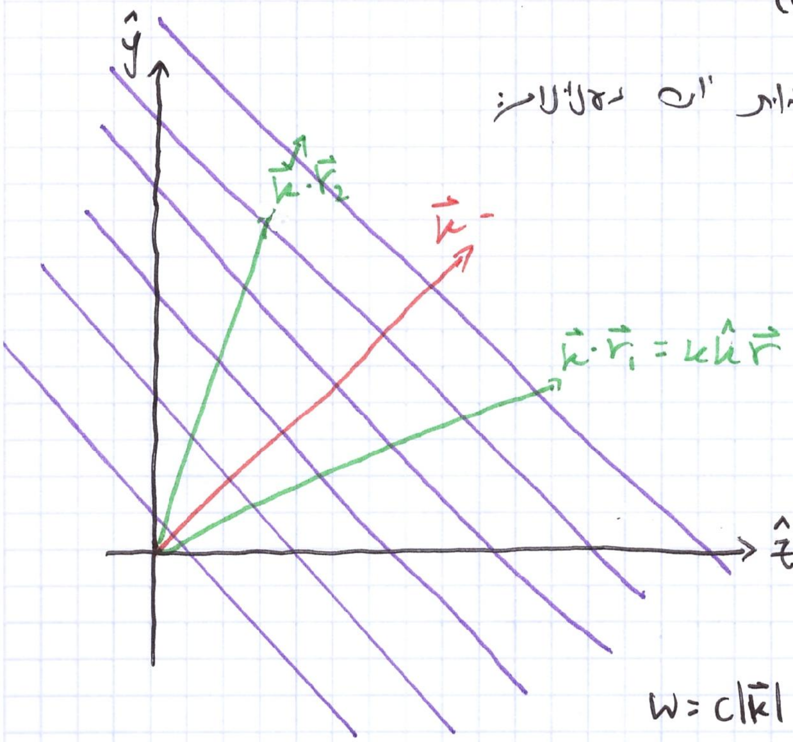
$$\omega=ck_y\,,\ k_y=\frac{2\pi}{\lambda}\quad !$$

לכך

11. עבור לדורות הקבועות יש מעניינות:

יקחו מפה: מקסימום בקבע הגל:

כיוון התקדמות הגל




והביטוי יהיה בצורה:

$$\psi = A\cos(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)$$

גל מישורי

כשהפעם $k$ בכיוון זה יהיה:

$$\vec{k} = (k_y, k_z)$$

וברור מכיוון התקדמות הגל כי:

$$(*_1)\ k_y = k_z$$

כשעדיין: $(*_2)$ $|\vec{k}| = \frac{2\pi}{\lambda}$ לפי הגדרה! $\omega = c|\vec{k}|$

**נקודה חשובה:**

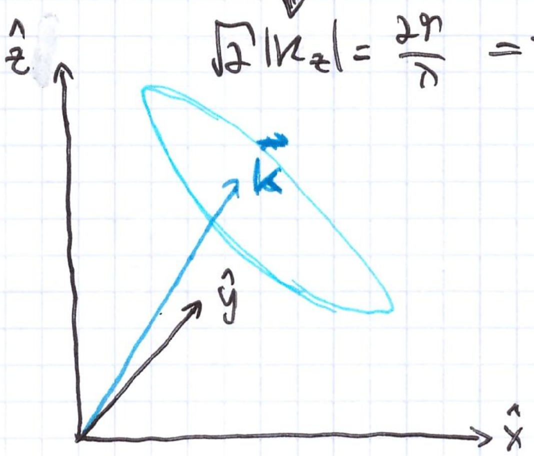
לכל $A$ $\vec{r}$ הדבר הזה $\vec{k}\cdot\vec{r}$ הוא איש מספר - כי זה המ"ט)!!!...

אז נציב את $(*_1)$ ב-$(*_2)$ (נעזה ו) ונאמר ש:

$$\sqrt{2k_z^2} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\Downarrow$$

$$\sqrt{2}|k_z| = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow k_y = k_z = \frac{\sqrt{2}\pi}{\lambda}$$

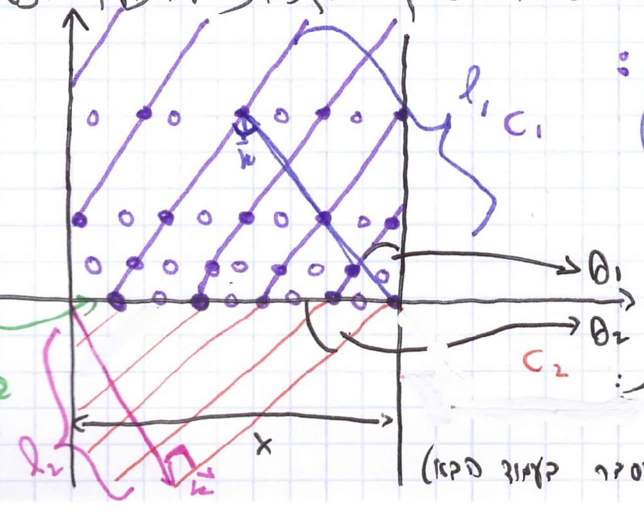



**כאשר ב 3D:**

$$\psi = A\cos(\vec{k}\vec{r} - \omega t)$$

הנחה:

אני מבחין לתפוס כ-ד ידיים סדין התקדמות ומתחיל לעשר, נצייר:




המקסימום תמיד נפגש בצ... של קווי מקסימום שונים!!!

**אגב = חוק סנל:**

(כאשר מעבר לצייר זה חומר אחר)

• - מקסימום

o - מינימום

$l_i$ - דרך

חומר אחד

חומר שני

יחס הדרכים הוא יחס המהירויות:

כאשר $t = \frac{l_2}{c_2} = \frac{l_1}{c_1} \Leftarrow \frac{c_2}{c_1} = \frac{l_2}{l_1}$ (הסדר בעמוד הבא)

(3)

כאשר $X$ זה מרחק מכמות קטעים של מקסימום ונשים לב שהזווית בין א' זקן המקסימה הוא $90^\circ$ ולכן אפשר לרשום בצורה כך...

הסבר

ונסמן

$$\sin\theta_1 = \frac{l_1}{X}$$

$$\sin\theta_2 = \frac{l_2}{X}$$

אזי

$$\frac{\sin\theta_2}{\sin\theta_1} = \frac{l_2}{l_1} \underset{\text{אבל כאן}}{=} \frac{c_2}{c_1} \underset{\text{אזי}}{=} \frac{\sin\theta_2}{\sin\theta_1}$$

$$\Downarrow$$

$$c_2 \sin\theta_1 = c_1 \sin\theta_2$$

או בצורה יותר יפה:

$$(3*) \quad \frac{1}{c_1}\sin\theta_1 = \frac{1}{c_2}\sin\theta_2$$

כאשר התדר הוא אותו תדר כי אני מנרמל את השבירה ולכן אני קורא את התדר. (שנקרא לו $w$).

נכפול את המשוואה האחרונה שקיבלנו ב-(3*) ב-$c$ ונקבל

$$\frac{c}{c_1}\sin\theta_1 = \frac{c}{c_2}\sin\theta_2$$

כאשר מקדם השבירה $n$ הוא בעצם $n = \frac{c_{\text{ריק}}}{c_{\text{תווך}}} \sim 1$

וחוק סנל הוא בעצם

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2$$

ותשוב לציין כי

$$\frac{|k_1|}{|k_2|} = \frac{c_1 \cancel{w}}{c_2 \cancel{w}}$$

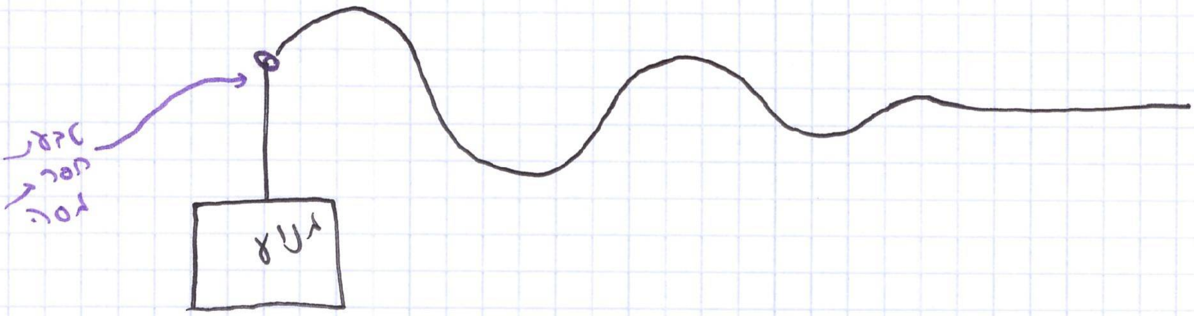
ה-$w$ קבוע אני מנרמל

וזה הוא קובץ לפרק 5 בספר ומתחיל נושא חדש (בעמוד הבא).

(4)

# העברה / החזרה:

נחזור לסיפור שכבר עשינו עם מניע שמחובר לחוט




אם נסתכל על מסה ופועל עליה כח אז תהיה לנקודה תאוצה אינסופית
והכוח לא יוצר תאוצה אינסופית אז הוא מאוזן ע"י כח אחר שלא
יהיה על הנקודה כח. (*1)

אז נזכיר כמה מושגים: $\quad V_p=\sqrt{\frac{T_0}{\rho_0}}\ ,\quad (*2)\ Z=\sqrt{T_0\rho_0}$

$\rho_0$ – צפיפות אורכית

$$F(L\ on\ R)+F(R\ on\ L)=0 \quad (*1)$$

וכן (קיחוקן בצבע כחול) חסר יחידי

$$F(R\ on\ L)=T_0\frac{\partial\psi}{\partial z} = ma =$$

ניוטון

אבל ברור כי $\psi=A\cos(kz-\omega t)$ כי מדובר בגל מתקדם...

$$= -\frac{T_0}{V_p}\frac{\partial\psi}{\partial t} \overset{(*2)}{=} -Z\frac{\partial\psi}{\partial t} \quad \left(\underset{\text{כח גרר}}{b\dot{x}}\right)$$

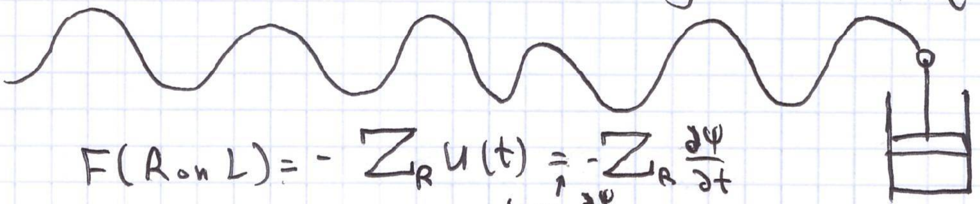
$Z_R$ – Z של המניע , $Z$ – Z של החוט

כאשר ההספק הוא הפי: (בתיאור אימפדנס)

$$P_{in} = +Z\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2 \left(= F\underset{\text{הספק}}{\dot{x}}\right)$$

נניח המניע הזה עובד במהירות $u(t)=\frac{dx}{dt}$

נניח למשל שמדובר בבוכנה כמו למשל:



$u(t)=\frac{dx}{dt}$

$$F(R\ on\ L) = -Z_R\,u(t) \underset{u(t)=\frac{\partial\psi}{\partial t}}{=} -Z_R\frac{\partial\psi}{\partial t}$$

ואם לפי ניוטון השלישי: $F(L\ on\ R)=-F(R\ on\ L)$

כאשר ההספק בבוכנה הוא ההספק היוצא

$$\Rightarrow P_{\text{הספק}} = F\cdot\frac{\partial\psi}{\partial t} = -Z_R\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2$$

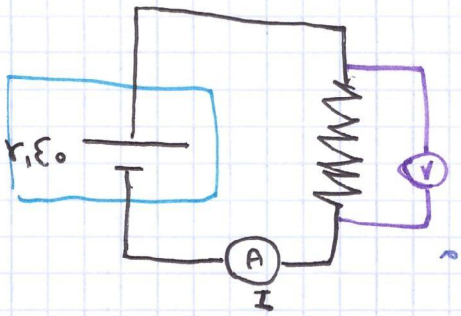
כאשר נגיע לך

$$P_{in} = Z\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2 \quad , \quad P_{out} = Z_R\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2 .$$

של הגנוע

וכאשר $Z = Z_R$

וברור כי $\bar{P}_{in} = \bar{P}_{out}$




נסתכל R מעגל בהצורה הבאה: עם וולטמטר

נמדוד

כאשר הנגד זה מי שלוקח את האנרגיה:

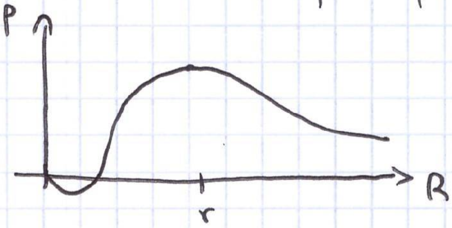
זרם

$$I = \frac{\varepsilon_0}{r+R} \quad , \quad V = IR \quad , \quad P_R = VI = RI^2 = R\frac{\varepsilon_0^2}{(r+R)^2}$$

פוטנציאל על הנגדים...

כאשר r - ההתנגדות הפנימית של הסוללה שמוקפת בכחול.

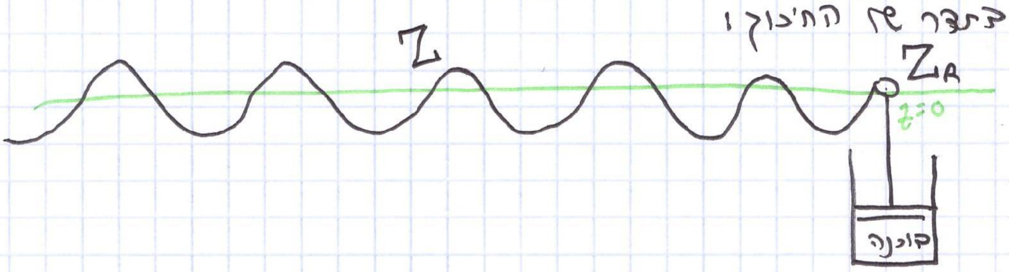
ונשאל את עצמנו מתי אני מספק את ההספק המקסימלי?




כאשר $r=R$ (אפשר לגזור את $P_R(R)$ ולראות).

והמצב הזה מעניין
הוא כאילו התאמת אימפדנסים

נניח ויש חיכוך בין הטבע לחוט כי לגבי שלאחר זמן המצב יתנדנד בתדר של החיכוך!




אז נציע פיתרון עם "תיקון" קטנטן:

$$\psi = A\cos(kz - wt) \xrightarrow[\text{הפסד}]{\text{יהיה}} \psi = A\cos(kz-wt) + \underbrace{RA\cos(kz+wt)}_{\text{התיקון.}}$$

(הפלוס זה כי הגל ינוע חזרה / כלומר כיוון הגל המקורי של החיכוך)

כאשר הנעלם בעיקרה הזה הוא האמפליטודה של התיקון...

אז נחזור אל ניוטון:

$$F(L \text{ on } R) = T_0\frac{\partial\psi}{\partial z} = T_0A\left(-k\sin(kz-wt) - Rk\sin(kz+wt)\right)$$

$$F(R \text{ on } L) = -Z_R\frac{\partial\psi}{\partial t} = -Z_RA\left(w\sin(kz-wt) - Rw\sin(kz+wt)\right)$$

ונעשה שיוויון כוחות ב $z=0$ ולכן:

$$T_0\cancel{A}k\left(\sin(wt) - R\sin(wt)\right) = -Z_R\cancel{A}w\left(-\sin(wt) - R\sin(wt)\right)$$

ונצמצם את A... ונקבל:

רק שאלנו שווה לכל
זמן בכל זמן

$$T_0\frac{k}{w}(1-R)\cancel{\sin(wt)} = +Z_R(1+R)\cancel{\sin(wt)}$$

וקיבלנו

$$\frac{T_0}{\sqrt{\frac{T_0}{\rho_0}}}(1-R) = Z_R(1+R)$$

ההחזרה

האימפדנס של הבוכנה

בהסבר הבא הוא שינה את השם של R בשביל לא לבלבל בין ה-R-ים.

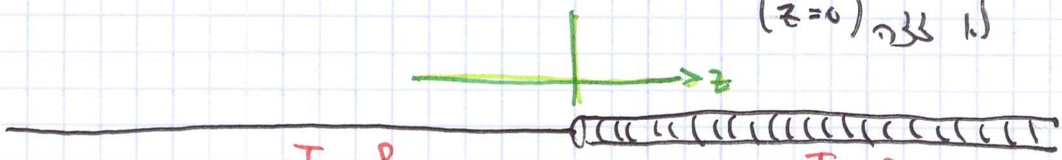
$$\Downarrow$$

$$Z - ZR = Z_R + Z_R R$$

ולכן

$$(1*)\quad \boxed{\frac{Z - Z_R}{Z + Z_R} = R}$$

במקרה הבא הוא מציע מיתר עם מתיחות $T_0$ שאליו מחובר מיתר יותר רחב (מיתר אחר), כך שיש בשניהם אותה מתיחות, נקודת החיבור לא זזה $(z=0)$



$T_0, \rho_1$ $\quad\quad$ $T_0, \rho_2$

$Z_1 = \sqrt{T_0\rho_1}$ $\quad\quad$ $Z_2 = \sqrt{T_0\rho_2}$

מתמטית התוצ' לא משנה אם מדובר בבוכנה עם חיכוך או במערכת

לכן:

$$(2*)\; R_{12} = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \quad \text{כאשר} \quad R_{12} = -R_{21}$$

-מקדם ההחזרה.

נניח משהו מגיע בצד שמאל, ובאופן כללי:

$$(3*)\quad \Psi(z,t) = A\cos(kz - Wt) + RA\cos(kz + Wt) \quad ; z \le 0$$

$$\Psi(0,t) = A\cos(Wt) + RA\cos(Wt) = \quad ; z > 0$$

יש רציפות בחיבור

נסתכל מה קורה ב-z=0 ממגע וזה עובד לכל z עבור חוק הגל.

$$= A(1+R)\cos(Wt)$$

(והאמפליטודה ב-0 צריכה להיות אותו דבר ב-0)

$$\Psi(z,t) = A(1+R)\cos\left(W\left(t - \frac{z}{V_p}\right)\right) =$$

$$= A\underbrace{(1+R)}_{T}\cos(Wt - kz) = AT\cos(kz - Wt)$$

אז נגדיר T בתור מקדם ההעברה

כאשר R מקדם ההחזרה ו-T מקדם ההעברה.

$$T \in [0,2]$$

ב-(2*) לעומת - נשים לב כי אם $\rho_1 = \rho_2$ מקדם ההחזרה יהיה שווה ל-0 שזה קטלני בקצב אחד...(כי לא תהיה החזרה). ואז יעמוד במקום

במקרה קיצון - חיבור אינסופי (יעני למשל בוכנה שלא זזה) $R = 1$ וכי (3*)!(*)

(ח).

# גלים - הרצאה

בהמשך לשיעור הקודם קיבלנו כי

$$R = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

$$\psi = A\cos(kx-wt) - A\cos(kx+wt) = \; !$$

$$= 2A\sin(kx)\sin(wt)$$

לני צהו

ונשים לב כי:

עבור $Z_2 \longrightarrow \infty$ נקבל $R=-1$ :

(הי נעדו מאורפ)

עבור $Z_2 = 0$ נקבל כי $R = 1$ :

(ללא המנעד)

וראינו שבחומרים דיאלקטריים:

$$Z \propto \frac{1}{c}$$

כאשר

$$Z = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\,\frac{g}{w}$$

כאשר

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \quad , \varepsilon \neq \varepsilon_0 \quad , \mu = \mu_0 \quad \mu_0 = \frac{1}{\varepsilon_0}$$

אז נקבל (עשינו כזה קצת בשיעור הקודם):

$$R = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \overset{!}{=} \frac{\left(\frac{1}{c_2} - \frac{1}{c_1}\right)}{\left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2}\right)} = \frac{n_2 - n_1}{n_1 + n_2}$$

קבועים גם כבה מגנטי

והבנו כי $n$ הוא אינדקס השבירה כאשר

$$1 < n = \frac{c}{c_{\text{בחומר}}}$$

# חבילות גלים: (פרק ט):

עד כה תפסנו את הגל באחד עם המון ונדנדנו והערכנו כי מה שקורה בצד ימין (בצד אחד אני תופס) יקרה בזמן $t$ כלשהו מאוחר ב-$X$ אחר

$$\psi = A\cos(\omega t)$$

$$\Rightarrow \psi = A\cos\left(\omega\left(t - \frac{x}{v_p}\right)\right) \Rightarrow \psi = A\cos(\omega t - kz)$$

הפרש זמנים.

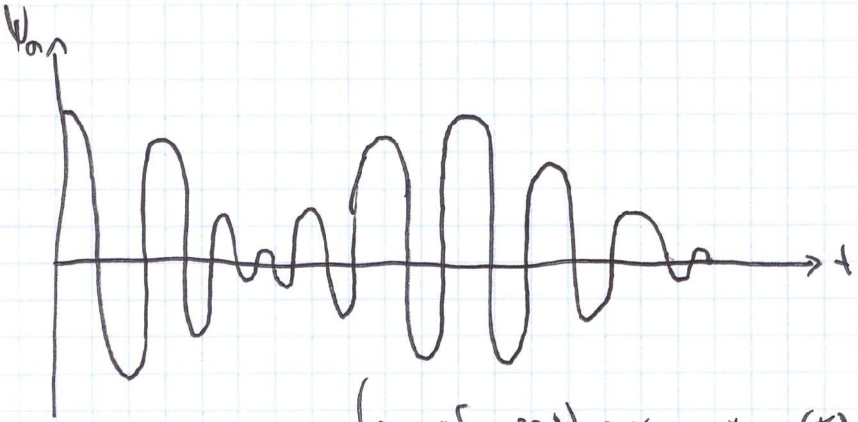
כאשר $v_p = c$ , $\omega = ck$

(ריק) כאשר כ) כיוון צד ש $z=0$ נקט את מה שקורה בתחילת החוט.

הפעם במקום לנדנד רק ב $\omega$ שונה ולכן נקבל ביטוי מהצורה:

$$(*)\quad \psi = A\cos(\omega_1 t) + A\cos(\omega_2 t)$$

כאשר אנחנו יודעים איך נראות פעימות רק-ב תדרים ב $x=0$:



אז נשחק עם $(*)$ עבור $x$: (נרצה לאחר ש)

$$\psi(x,t) = A\cos\left(\omega_1\left(t - \frac{x}{c}\right)\right) + A\cos\left(\omega_2\left(t - \frac{x}{c}\right)\right) =$$

הזמן שיקח לניצוץ להגיע למקום בו אני מודד

$$= A\cos(\omega_1 t - k_1 x) + A\cos(\omega_2 t - k_2 x)$$

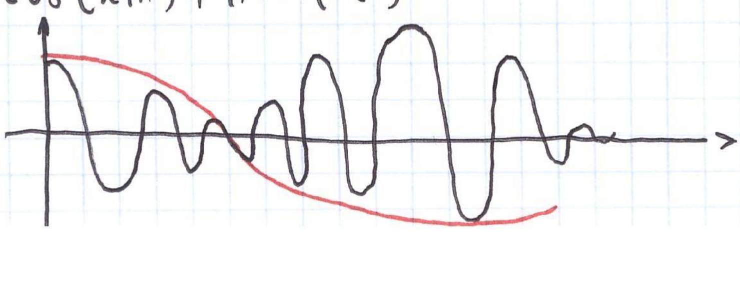
ונקבל צורה כך

$$\omega_1 = ck_1 \ , \ \omega_2 = ck_2$$

כאשר ב $t=0$ יש אינטואיציה מעניינת כך: $(t=0)$

(במרחב).

$$\psi = A\cos(k_1 x) + A\cos(k_2 x)$$



בס"ד

ועבור סכ t: (כפל חיבור קוסינוסים)

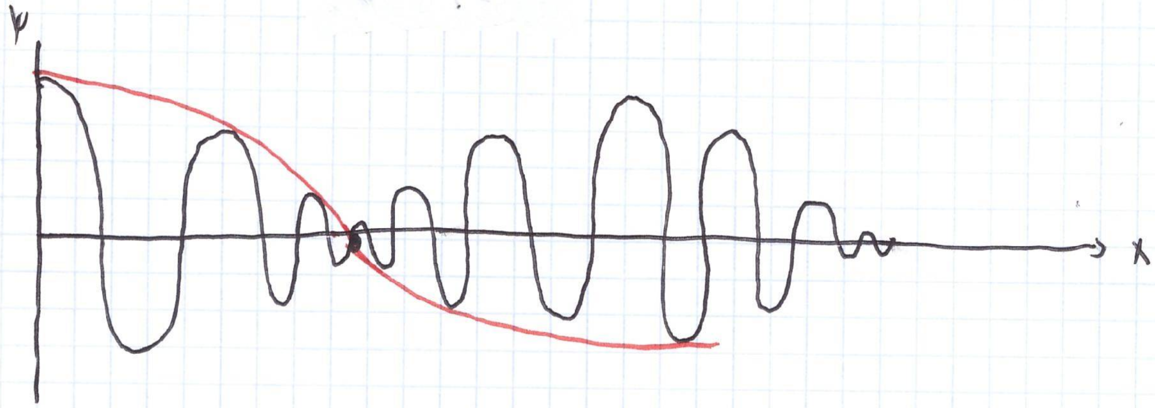
$$\psi(x,t) = 2A\cos\left(\tfrac{1}{2}(k_1-k_2)x - \tfrac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)t\right)\cos\left(\tfrac{1}{2}(k_1+k_2)x - \tfrac{1}{2}(\omega_1+\omega_2)t\right)$$

ומה שמסומן באדום זה השינוי הכללי וזה השינוי של המעטפת בעצם.

והמעטפת קורסת כאשר

$$(*)\ \tfrac{1}{2}(k_1-k_2)x - \tfrac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)t = \frac{\pi}{2}$$

הביטוי מתאפס:




אז נבחן עם (*):

$$(k_1-k_2)x - (\omega_1-\omega_2)t = \pi$$

ונסתכל A המצב ב $x+dx$ ; $t+dt$ בנק' ההתאפסות הבא:

$$(k_1-k_2)(x+dx) - (\omega_1-\omega_2)(t+dt) = \pi$$

ואנחנו מסתכלים על נק' בה $\psi=0$ לכן

הארגומנטים בהתאם $=0$:

$$(k_1-k_2)dx - (\omega_1-\omega_2)dt = 0$$

נצא במילים אחרות:

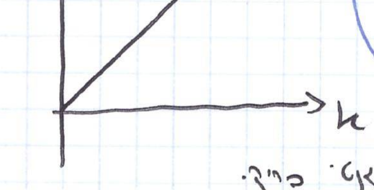
$$\frac{dx}{dt} = \frac{\omega_2-\omega_1}{k_2-k_1} \quad (*_2)$$

מהירות שבה נעה נק' ההתאפסות

כאשר $\frac{dx}{dt} = C$

$$\frac{dx}{dt} \approx \frac{d\omega}{dk} = V_g = \frac{\omega_2-\omega_1}{k_2-k_1}$$

מהירות החבורה




כאשר ש- $\omega$ לא פונק' ליניארית של $k$

(מהירות החבורה - מהירות המעטפת
מהירות הפאזה - נקודה בגל הנעה עם המעטפת.
הספר טוען לגבי זה שהכרח נכון)

אז: $C \neq \frac{\omega_2-\omega_1}{k_2-k_1}$

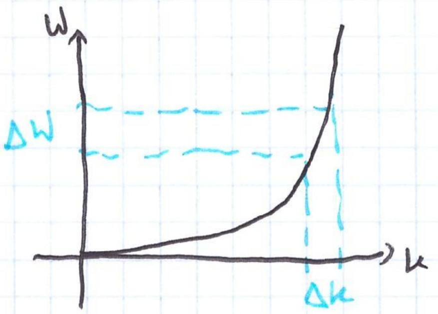
תווך עם גל אלקטרומגנטי בריק.

אז הגדרנו פה את מהירות החבורה $V_g = \frac{\omega_2-\omega_1}{k_2-k_1}$

ובריק יש יחס נפיצה לא ליניארי מהירות הפאזה תלויה באורך הגל

הופה

כי שירטוט זה יראה כך:




מספרי הגל

נקבע חיבור של 3 פונקציות שונות קבוע $k_0$ ו-$\omega_0$ במרכז שונה (קבוע יותר וקבוע כחות):

$$\Psi = A \cdot Real\left\{ \frac{1}{2} e^{i\left[\left(k_0 - \frac{\Delta k}{2}\right)x - \left(\omega_0 - \frac{\Delta \omega}{2}\right)t\right]} + e^{i(k_0 x - \omega_0 t)} + \frac{1}{2} e^{i\left[\left(k_0 + \frac{\Delta k}{2}\right)x - \left(\omega_0 + \frac{\Delta \omega}{2}\right)t\right]} \right\}$$

ובשביל הצחוקים והצחקוקים לא ניתן אמפליטודות שוות (מצחיק!!!...).

נראה קודם עבור $t=0$, נקבל ביטוי כזה:

$$\Psi = A Real\left\{ e^{ik_0 x}\left[1 + \frac{1}{2}\left(e^{-i\frac{\Delta k x}{2}} + e^{i\frac{\Delta k x}{2}}\right)\right] = \right.$$

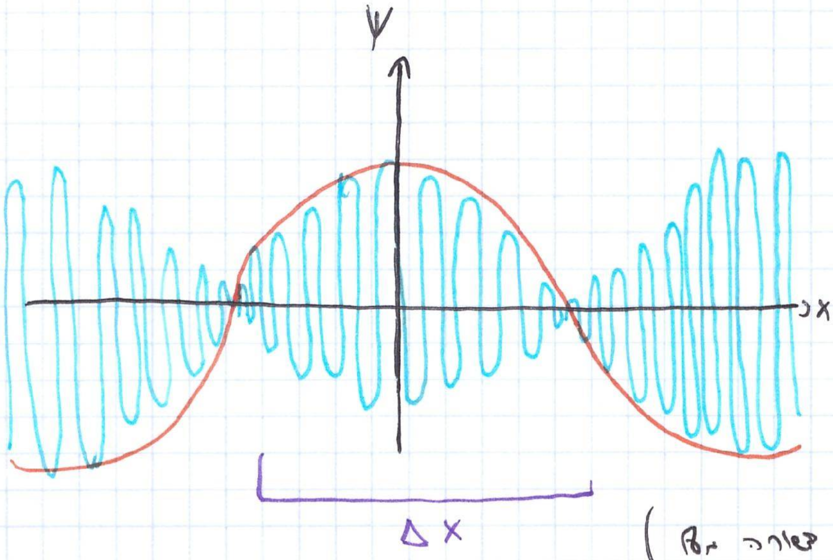
זאת המעטפת כפולה שלה והיא מעניינת אותנו בקטע אחר...

$$= A Real\left\{ e^{ik_0 x}\left[1 + \cos\left(\frac{\Delta k x}{2}\right)\right] = \underbrace{A\cos(k_0 x)}_{\text{לא מעניין}} \left[1 + \cos\left(\frac{\Delta k x}{2}\right)\right]\right.$$

נעבור ל-cos

נקח Real

ובוא נצייר את $\Psi$:




המעטפת מתאפסת כאשר:
(בצבע הזה נצייר אותה)

$$\cos\left(\frac{\Delta k x}{2}\right) = -1$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta k x}{2} = \pm \pi$$

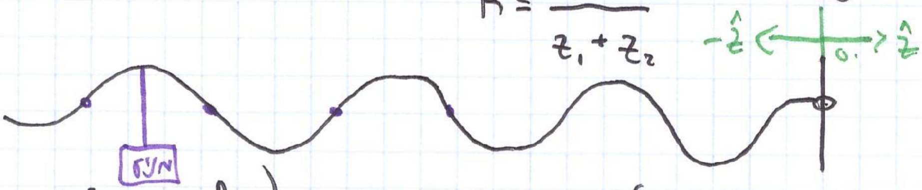
$$\Delta x \Delta k = 4\pi$$ (כי בשורה יש ±)

!

(1)

עבור $R=\pm1$ (שזה אומר לפי הנושא הזה שמועבר במלואו שבעצם נחזר)

כאשר נזכור $R=\frac{Z_1-Z_2}{Z_1+Z_2}$




ואמרנו שבמקרה הגל יהיה פונ' מחזורית (בA אמפליטודה מחזורית):

$$\psi = A\cos(\omega t-kz)+RA\cos(\omega t-kz)=A\left(\cos(\underline{\omega t-kz})+\cos(\omega t+kz)\right)=$$

$$=2A\cos(kz)\cos(\omega t)$$

ונשאלה השאלה איפה המנוע צריך לעמוד?

המנוע עושה אמפליטודה שזימה ולכן המנוע חייב לעמוד בנק' בטן!

המנוע חייב לעמוד ב"L" כך ש $\cos(kz)$ יהיה 0 או $\pi$ או $-\pi$

יוצא: (חצי כפולה של אורך הגל)

הגל הוא נע ימינה והמנוע צריך לעמוד כך ש- $kL=\pi m$ כאשר $m\in\mathbb{Z}$

נציב $k$ ונקבל ש: $\frac{2\pi}{\lambda}L=\pi m$

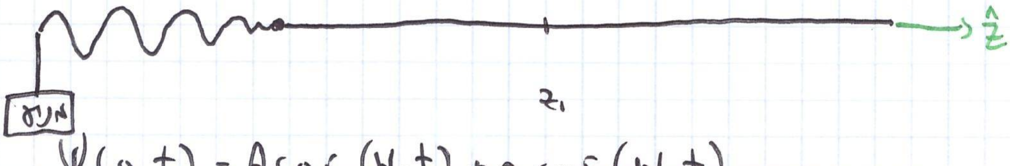
יוצא לנו הגיוני - חצי כפולה של אורך הגל: $\Rightarrow L=\lambda\frac{m}{2}$

אנו - אז נחזור )

## הרצאה - גלים:

ונחזור לדבר על **חבילות גלים:**

אז נחזור לדבר על מנוע שמנענע את הגל ב2 תדרים ונשים לב לשני הצירים:




$$\psi(0,t)=A\cos(\omega_1 t)+A\cos(\omega_2 t)$$

כאשר משהו הגל יגיע לנק' $z_1$ כמובן...

$$\psi(z,t)=A\cos\left(\omega_1\left(t-\frac{z}{v_p}\right)\right)+A\cos\left(\omega_2\left(t-\frac{z}{v_p}\right)\right)=$$

ואחרי עיבודים, באלגברה נקבל:

$$=A\cos(\omega_1 t-k_1 z)+A\cos(\omega_2 t-k_2 z)$$

אחר נשים לב (בעמוד הבא) שהמעטפת עבור $t>0$ נעה

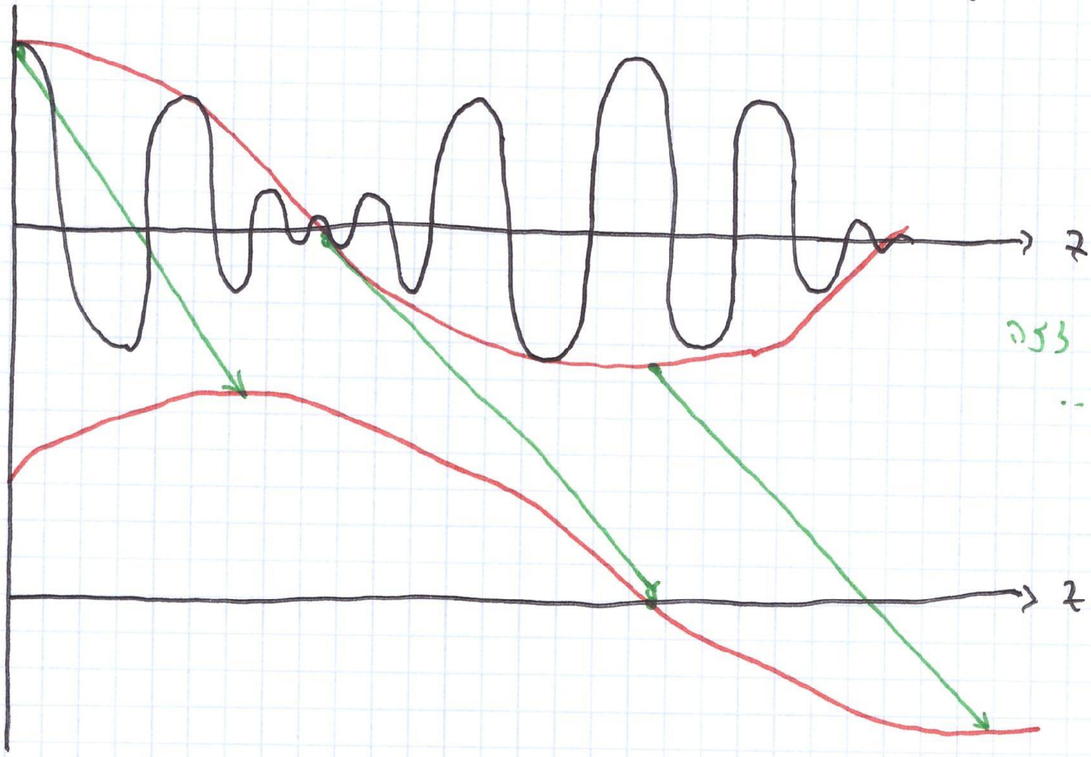
וירוק יסמן איפה נק' לצה לאן...

$$\psi(z,t)=2A\cos\left(\tfrac{1}{2}(k_1-k_2)z+\tfrac{1}{2}(w_1-w_2)t\right)\cos\left(\tfrac{1}{2}(k_1+k_2)z-\tfrac{1}{2}(w_1+w_2)t\right)$$

ובשביל לדעת איזו מהירות יש למע' נבדוק ($t=0$ נרצה לראות מקסימום של המעטפת)

$$(k_1-k_2)z+(w_1-w_2)t=\frac{\pi}{2}\quad(*)$$

$t=0$ המעטפת:




ניקח נק' נצפה לאן...

אז המעטפת נעה...

ואחרי גזירה קיבלנו $(k_1-k_2)dz-(w_1-w_2)dt=0$

ועכשיו נוכל למצוא את המהירות:

$$\frac{dz}{dt}=\left(\frac{w_2-w_1}{k_2-k_1}\right)=v_g=v$$

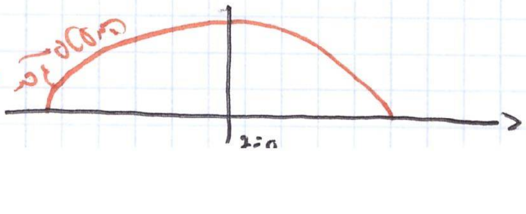
כאשר $c=v_{\text{מעטפת}}$ ! $\frac{dw}{dk}\approx$ מעטפת (חבורה)

והמעטפת אפסה בראשונה של המע' כא' ב $\frac{1}{2}(k_1-k_2)z=\pm\frac{\pi}{2}$

(וזה מתאים להגדיר שהיא מחר את z בגודל ציר ראשי)

! $(k_1-k_2)z=\pm\pi$ ונוכל לצייר את הגל לפי קצב השני של הציר למרות שהוא לא קיים שום פיזיקאלי אבל זה יביא לנו קשר חשוב

אז נצייר:



דוד

נרשום: $\Delta k = k_2 - k_1$

ונאמר ש: $\Delta k \cdot \Delta z = 2\pi$

ועכשיו בגלל שהוא עשה לעצמו טעות, בזה שהוא בחר את z כציר התקדמות, בגלל הוא עובר ל-X:

$$z \to x \Rightarrow \Delta k \cdot \Delta x = 2\pi$$

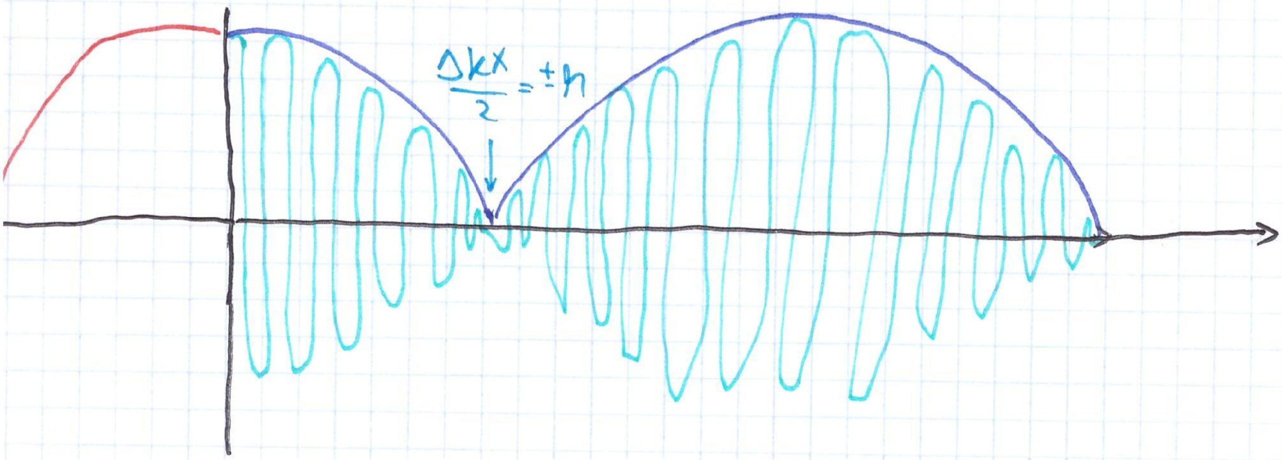
ונציב (שוב כבר את זה) פירוק מהצורה:

$$\Psi = Re\left\{ \frac{1}{2} A e^{i\{(k_0 - \frac{\Delta k}{2})x - (w_0 - \frac{\Delta w}{2})t\}} + A e^{i(k_0 x - wt)} + \frac{1}{2} A e^{i(k_0 + \frac{\Delta k}{2})x - (w_0 + \frac{\Delta w}{2})t} \right\} = (*_1)$$

וב $t=0$ הפירוק הזה יהיה שווה ל-

$$= \cos(k_0 x)\left[1 + \cos\left(\frac{\Delta k x}{2}\right)\right] \underset{\text{התאפסות}}{\Longrightarrow} \frac{\Delta k x}{2} = \pm\pi$$

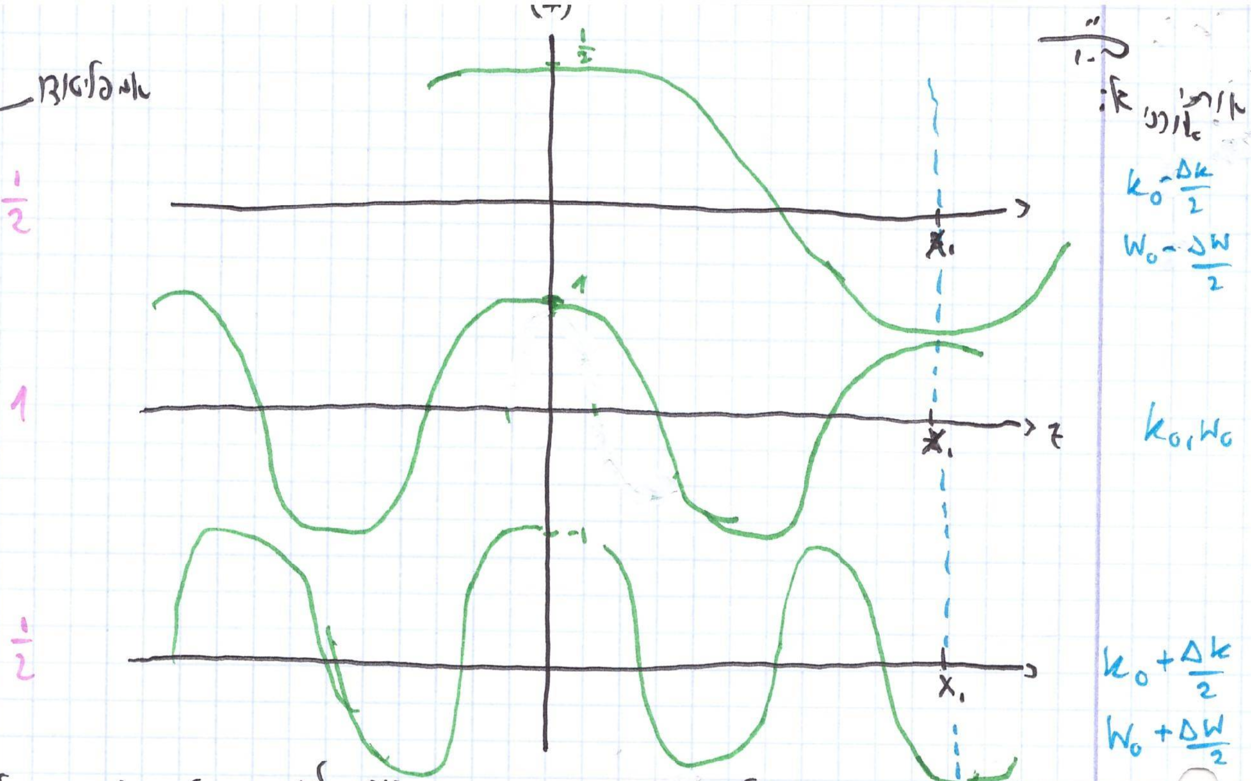
והדבר הזה יראה מה זה יפה מבחינה גרפית:




ועכשיו כשהוא רצה לבדוק מה המרחק בין איפוס ראשון לשני יותר קל לו להעתיק את הפונ' 0 הציר השמאלי כמוראה בגרף -

ונקבל ש: $\Delta k \Delta x = 4\pi \Leftarrow \frac{\Delta k \Delta x}{2} = 2\pi$

אמפליטודה בוורוד נשי




וההתאפסות בקו, ואז הגל עקב יש לנו קבוע של אמפליטודות

של 1, $-\frac{1}{2}$ ו-$-\frac{1}{2}$ (ביחד לא שווה ל-0)

אז צריכים צד דבר נתון - כמו ונעשה את הדבר הזה מתמטית:

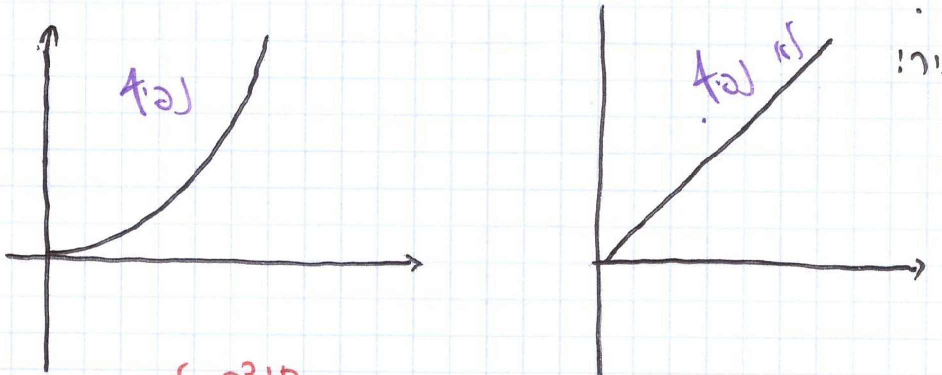
אם זה לא נכון (הקשר בין ω ו-k) אז כל אחד מהגלים הולך

יתקדם במהירות זהה ואז המעטפת תזוז כיחידה

אם זה נכון - נקבל מעטפת מכוערת רצח שאולי אפילו לא

ניתן להגדיר.

כאשר נזכיר!




תודה לארז ולרועי סנדוק על ההסבר...

נחזור ל"לעשות את כל זה מתמטית":

עבור סוף t נוכל לרשום את (*) כך:

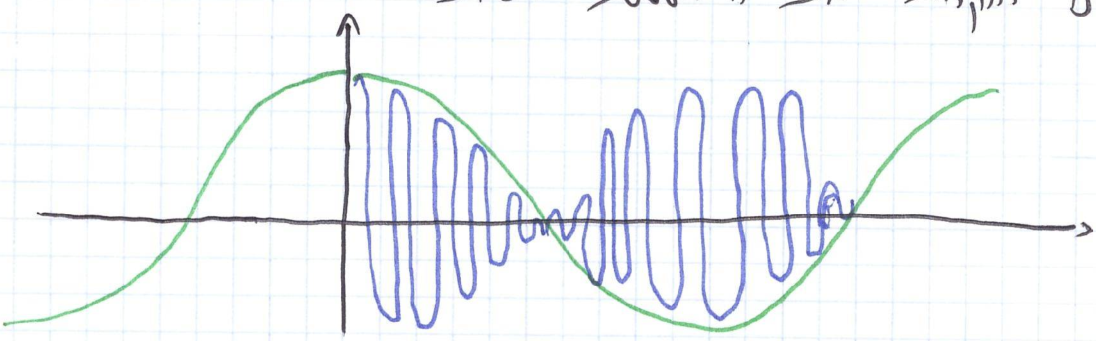
$$(*) = Re\left\{ e^{i(k_0x-wt)} A\left[1+\frac{1}{2}e^{-i\left(\frac{\Delta k}{2}x-\frac{\Delta w}{2}t\right)}+\frac{1}{2}e^{i\left(\frac{\Delta k}{2}x-\frac{\Delta w}{2}t\right)}\right]\right\} =$$

ונשים לב שהארגומנטים מתאימים לדרישה של הk והw בתחילת העמוד.

= בעמוד הבא...

$$= A\cos(k_0 x - w_0 t)\left[1+\cos\left(\frac{\Delta k x}{2} - \frac{\Delta w}{2}t\right)\right]$$

והרי את תוקרית את המעטפת הצגתי:

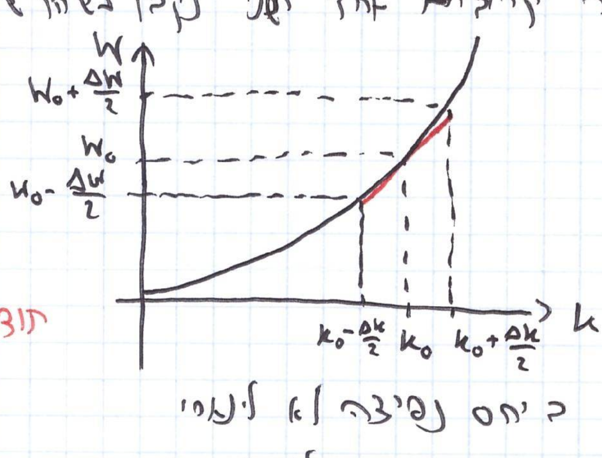


נסתכל רק על מה שבתוך הסוגריים:

$$1+\cos\left(\frac{\Delta w}{2}\left(t-\frac{\Delta k x}{\Delta w}\right)\right) = 1+\cos\left(\frac{\Delta w}{2}\left(t-\frac{x}{\frac{\Delta w}{\Delta k}}\right)\right)$$

הי, רגע - תסתכלו שניה על הפונ' הזאת - זאת פונ' שראינו עוד בגלים וזאת פונ' שדומה לפונ' הקודמת - בזמן יותר גדול הארגומנט יתאפס בx יותר גדול וזאת אומרת שמהירות המעטפת עכשיו היא $\frac{\Delta w}{\Delta k} = V_{g\,\text{מעטפת}}$

ואם נבחר את ה-k יותר קרובים אחד לשני נקבל משהו יותר קרוב לנגזרת




תודה ארז!!!

אם אני צועד $\Delta k$ ימינה ביחס נפיצה לא לינארי או שמאלה ביחס נפיצה לא לינארי ה-$w$ שנקבל עבורה יהיה בפרופורציה שונה. ולכן ה-$\Delta w$ שמאלה תהיה שונה מה-$\Delta w$ ימינה ולכן המעטפת מכילה 2 מהירויות $\frac{\Delta w}{\Delta k}$ שונות ובגלים אחרים המעטפת תתפרק עקב כך. הדבר הזה קורה בגלל יחס נפיצה לינארי - מגניב...

# סיכום תדרים רבים:

$$\psi(t) = A\cos(W_1 t) + \dots + A\cos(W_N t) =$$

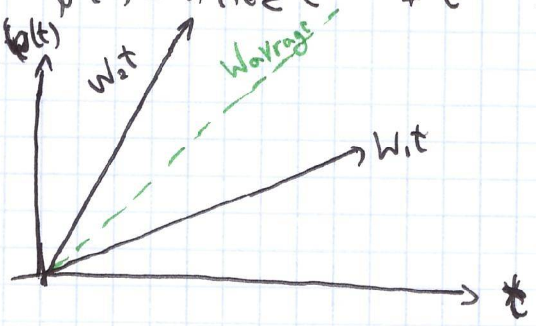
וקומפלקסי - זה יראה כך

$$= A\,Re\{e^{iW_1 t} + \dots + e^{iW_N t}\} = (*_2)$$

ובשביל להבין זה - נעשה הסבה ל"עבור 2 תדרים בלבד":

בוא נתחיל ב-

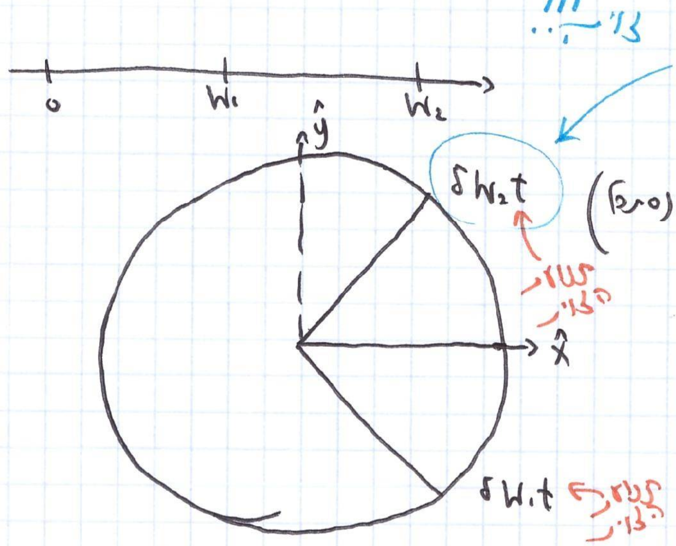
$$\tilde{\psi}(t) = A\,Re\{e^{iW_1 t} + e^{iW_2 t}\}$$




ונגדיר Wavrage:

$$W_{AV} = \frac{W_2 + W_1}{2}$$

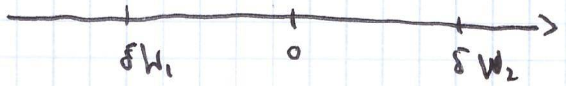
כאשר $|\delta W_2| = |\delta W_1|$ רק בערכם המוחלט



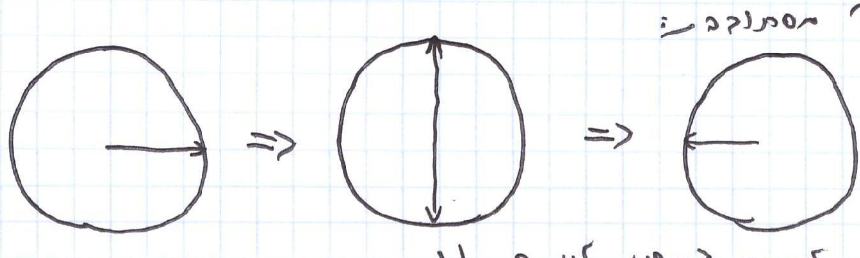

וקומפלקסי (קיים פאזור גדול (סיבוב) וקטנים)

כאשר:
$$\delta W_2 = W_2 - W_{AV} = \frac{W_2 - W_1}{2}$$

$$\delta W_1 = W_1 - W_{AV} = \frac{W_1 - W_2}{2}$$



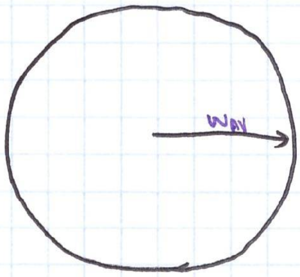

כאשר הגע' מסתובב:



נרצה לעבור לכתיב לינר W...

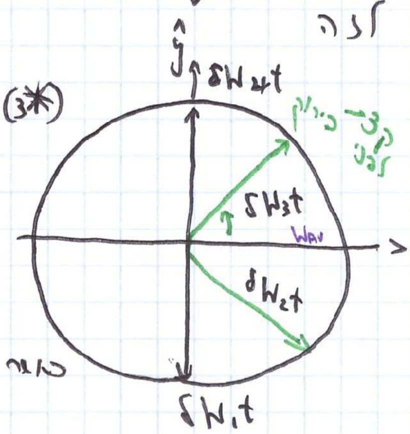
ונבצע חלוקה עדינה של ציר התדרים:

ב t=0



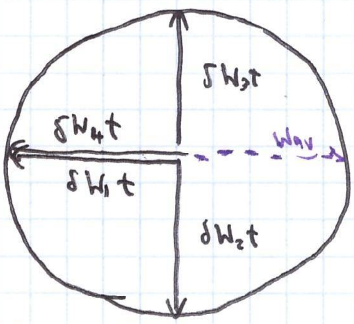

ועם הזמן אנחנו עוברים לזה

(3*)

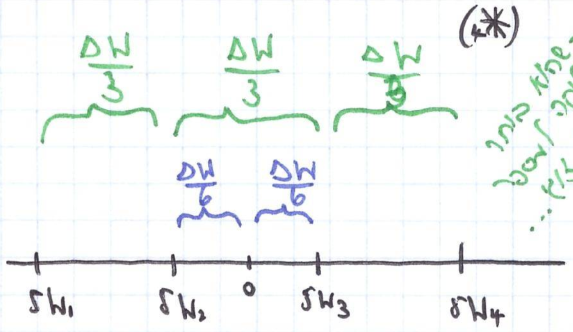



אחרי חלוקה לעוד W (יותר מ-2)

כעבור עוד זמן t כלשהו




(4*)




כשהוא בוחר חלוקה למספר זוגי...

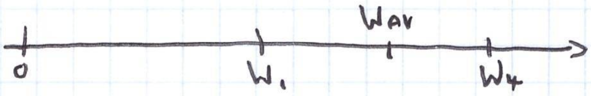
כאשר $\Delta W = W_4 - W_1$

(חילקנו ל-4 תחומים ואנחנו רוצים להם להסתובב - כשבין 2 תחומים והתדרים הקיצוניים עברו חצי סיבוב ה-Real היה 0 - כי בציר y נקבל 0 אבל ב-x לא נקבל 0...

$$A\,\mathrm{Real}\{e^{i\delta W_1 t} + \dots + e^{i\delta W_4 t}\}$$

(

כאשר הטור המקורי פה היה:




וכיוון בסוף עברנו למרחקים מ $W_{av}$ ונשים לב כי בכל חלוקה עדינה יותר קשה לנו לאפס

כפרה עליך אביטל - אם לא היית עוזרת אני לא הייתי מבינה פה כלום...

ואנחנו רוצים לחבר הרבה כאלה וכל "ל" כזה תעזור לנו לעבור בהסכמה למשהו איזה שקל להבין...

כאשר:

$$(*_2) = A\,\mathrm{Real}\{e^{i(W_1 - W_{av})t} + \dots + e^{i(W_n - W_{av})t}\}$$

מהפרק הקודם

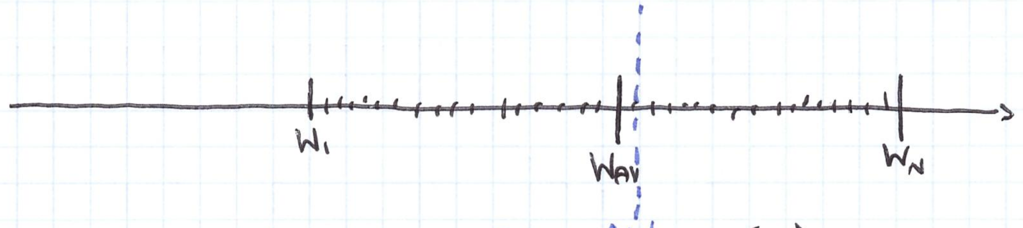
ב-(3*) ותהיה האופציה ש $\delta W_3$ ו $\delta W_2$ יצאו ל"x-"

ו $\delta W_4$ ו $\delta W_1$ יצאו ל"x+" - כי נשים לב לחלוקה של $\Delta W$ ב-(4*) למעלה.. אז הבנו את הפרנציפ...

המשך...

(ט)

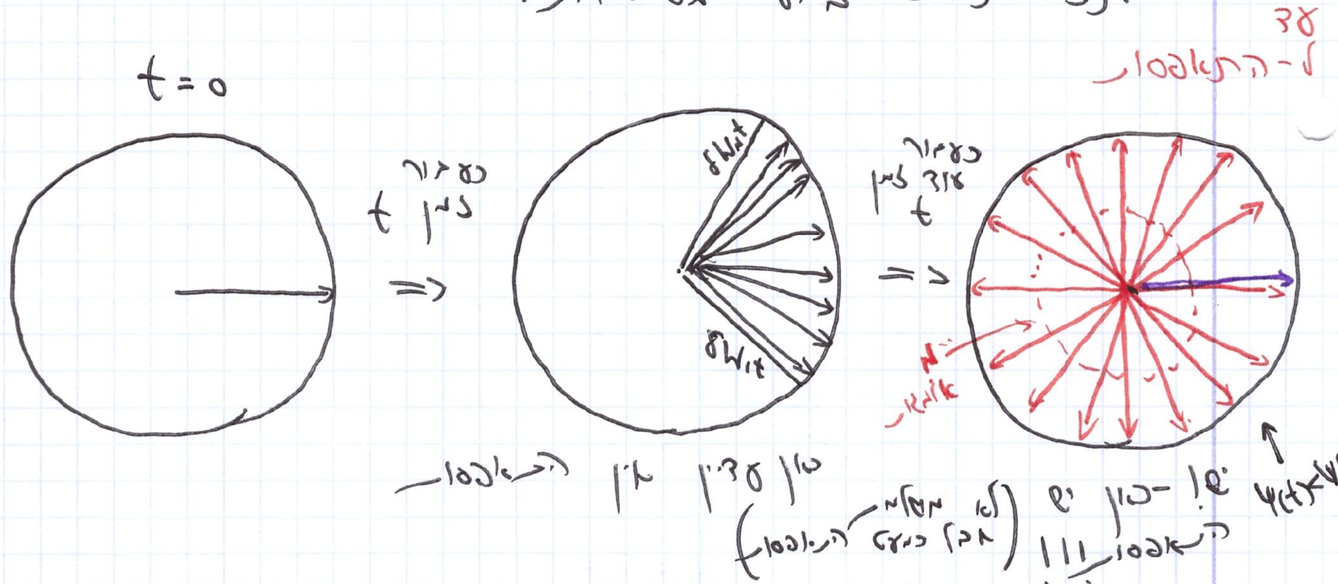
אז נחלק את הקטעים שכל קטע יהיה $\frac{\Delta W}{N-1}$ (באורך):




(5*) $\frac{\Delta W}{2(N-1)}$ - הפרש התדר הכי קטן הוא חשוב ובכלל נחזור אליו.

וכמובן ברור ש $\Delta W = W_N - W_1$

ונצייר זאת במעגל מסתובב:




ואני רוצה לשאול את עצמי מתי ההתאפסות הראשונה קורית?

$$\psi(t) \overset{?}{=} 0$$

והדבר הזה קורה כאשר

$$\delta W_N t = \pi$$

(כשיהיה לי N מאוד גדול ההתאפסות הראשונה תהיה הרי פיזור של N ווקטורים הוקטורים תהיה שונה בהשך כל העיגול)

אז כל התדרים האלה יחזרו חזרה שוב לאותו כיוון (הוקטורים) וזה יקרה כשכולם ישלימו סבב לפחות, ונזכר שהפרש בתדר הכי קטן שדיברנו עליו ב (5*): ולכן המקסימום יהיה ב:

$$\frac{\Delta W}{2(N-1)} t = 2\pi \Rightarrow t = \frac{4\pi}{\Delta W}(N-1)$$

(כשהתדר הכי קטן יהיו כולם תואמים את כל התדרים יחזרו לכיוון שממנו התחילו כי כל אחד הוא כפולה שלמה שלו)

ו"רוחב הפס" - ההפרש בין התדר הכי גבוה לתדר הכי נמוך

רוחב הפס $\rightarrow$ $\Delta W t = 4\pi(N-1)$

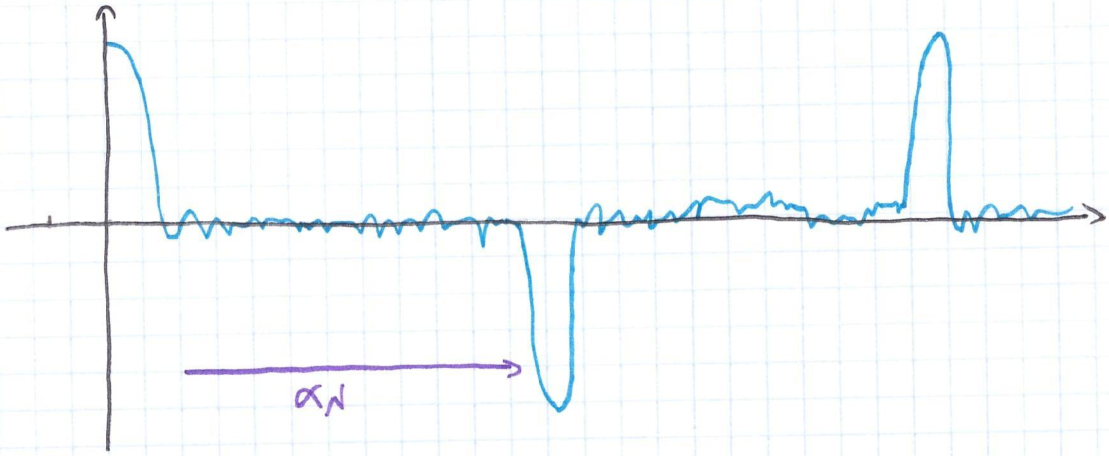
אז ההתאפסות הראשונה תלויה רק ברוחב הפס.

לכן נוכל לרשום:

$\frac{W_2 - W_1}{2} t = \pi$ (*) רוחב הפס

(*) כי התופעות השונות

ולכן נקבל גל מהצורה הבאה:



ומקסימום פרופורציוני ל-מ

וזה פולס מעטפת ולדבר הזה (באנגל׳ [illegible]) קוראים הד גלים.

מ.ש.ל. ■

והנ׳ אומר שזה השיעור הכי חשוב... (בקורס).

או כמו שאומר פיינמן:

"Physics is like sex: sure, it may give some practical results, but that's not why we do it" (Richard Feynman)

סליחה על החנוניות...

(ח)

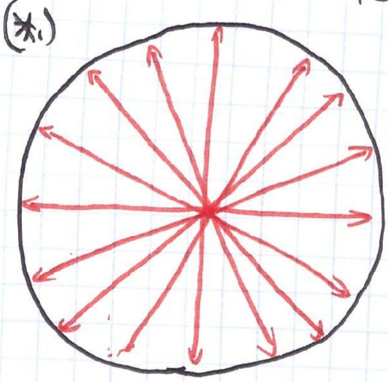
# הרצאה גלים:

אז הוא סיים למסקנה שאין התאבכות מוחלטת במצב הזה:

(כאשר $t \cdot \frac{\Delta w}{2} = \pi$)

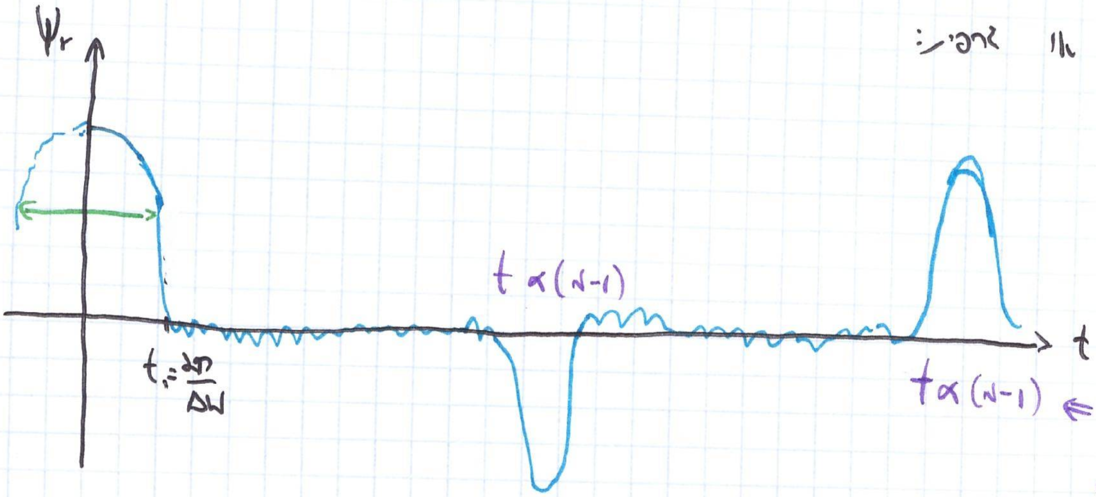
כפול

(*1)



← $\psi(t) = \psi(0)$ כאשר

או גרפית:




והירידה המשמעותית הינה בזמן הזה $t = \frac{2\pi}{\Delta w}$

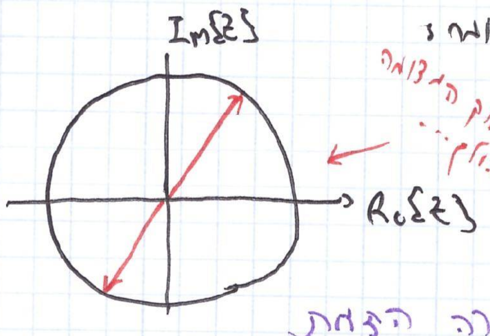
או כאשר יורדים מעקבים לשמאל $\Delta t = \frac{4\pi}{\Delta w}$

כאשר הרוחב (שמוגדר ע"י חצי הגובה) הוא $\Delta t \cdot \Delta w \geq 2\pi$

והוא לא יודע להוכיח את החסם הזה לכל הגלים, ולא קיים מישהו שיכול לשנות את החסם הזה (גרסה מתמ' 2 חד').

$\psi_r$ - ממשי (כל תדר הוא גם תדר שלילי) ולכן הסכום שלהם

ממשי - יענו בבודד הוא אומר:




והנקודה העיקרית של כל החזרה הזאת

היא שיש את התאפסות כאשר $t \cdot \frac{\Delta w}{2} = \pi$ (כפול) או (*1) ...

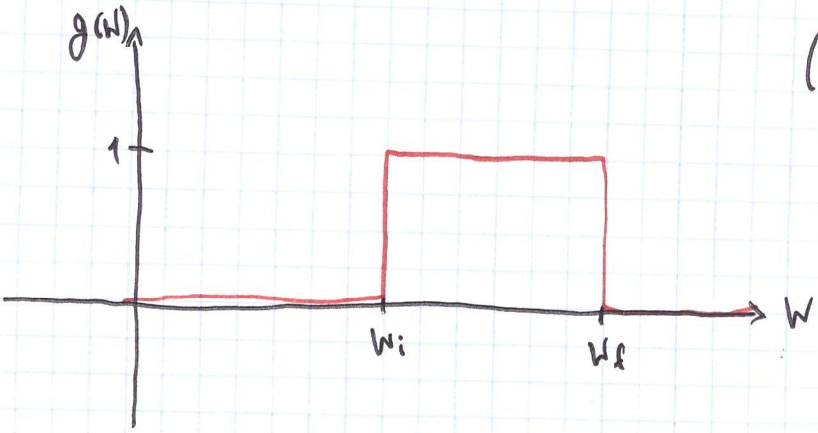
בסיכום לגבי התוצאה בעצם מסתכלים על R או נגזרת עם פונקציית משקל

$w_i \leq w \leq w_f$ , $g(w) = 1$ - פונקציית משקל

$$\psi = \int^{\infty} g(w)\cos(wt)\,dw$$

בשיעור הבא נצייר...

(*1)




וסיכום התדרים הוא:

$$\psi(0,t) = \cos(w_1 t) + \cos(w_2 t) + \dots + \cos(w_N t) =$$

$$= Re\left\{ e^{i w_{av} t} \underbrace{\left( e^{i \delta w_1 t} + \dots + e^{i \delta w_N t} \right)}_{\psi_r(0,t)} \right.$$

אז

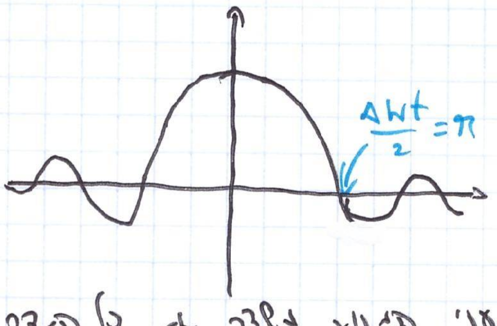
$$\psi = \int_0^{\infty} g(w) \cos(wt)\, dw$$

במקרה ספציפי בו g(w) הוא קו ישר:

(המעטפת) $$\psi_r = \frac{1}{\Delta w} \int_{-\frac{\Delta w}{2}}^{\frac{\Delta w}{2}} \cos(wt)\, dw = \frac{\sin\left(\frac{\Delta w t}{2}\right)}{\left(\Delta w t/2\right)}$$

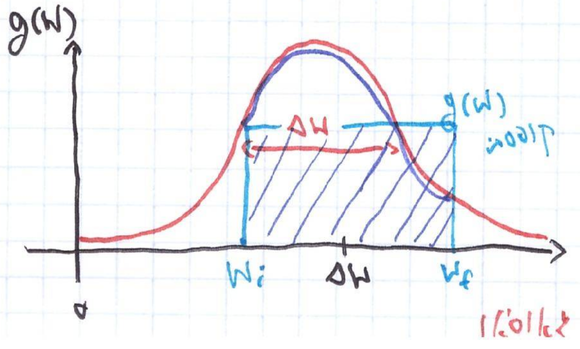
כאשר ההתאפסות הראשונה היא כש $\frac{\Delta w t}{2} = \pi$

וגרפית:




למשל אם ניקח את g(w) כגאוסיאן (יעני פונק' משדר את כל התדרים שבגבולות רק תדרים נמוכים יתקבלו עם אמפליטודה נמוכה והפוך)

והתדרים הנמוכים לא יעניינו אותנו כי הם כמעט לא ישפיעו, לעומת התדרים שבאמצע. יעניינו אותנו אלו התדרים של קירוב הגאוסיאן והם גם ככה יתקבלו כמו הקופסה שציירנו בהתחלה (המקום ב-(*1))




רק התדרים אמצעיים יעניינו

(32)

אז נשאלת השאלה איך אומרים למניע לסדר רצף של תדרים?

אז רצף לפני שהוא בורח לטרנספורם פוריה, הוא אומר שנגיד שהוא

חיבר למניע שמגדר באמפליטודה שווה בטווח תדירויות כלשהו -

ונשאל השאלה איזה פולס תשלוי לכך לו ומה יקרה ב $\psi(z,t)$?

$$\psi(x,t)=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty g(\omega)\cos\left(\omega\left(t-\frac{x}{V_p(\omega)}\right)\right)d\omega \quad (*)$$

כוון זוגי לכן כפול 2

כי בא התמרת פוריה שהוא אוהב כי היא טובה לקוסינוסים... $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$

כאשר נזכיר ש $g(\omega)$ מרוכזת סביב $\omega_0$

והפעם $g(\omega)$ בו פנן כללי והיא מרוכזת איפה שבא לה.

אז מה קורה ב $x=0$:

$$\psi(0,t)=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty g(\omega)\cos(\omega t)\,d\omega=(3*)$$

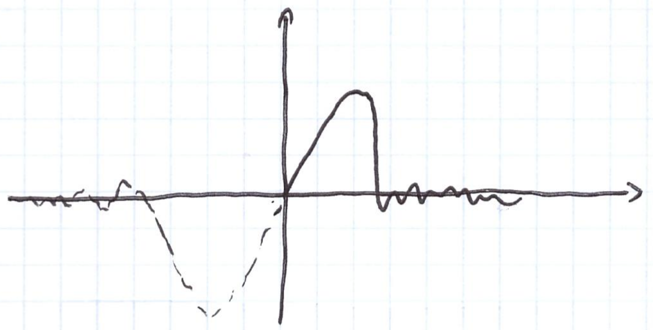
מאינטגרציה שיש לנו כבר $\psi$ ב $t=0$ וגדל

אבל מתקיים פה ש: $\psi(0,-t)=\psi(0,t)$ בגלל הקוסינוס הזוגי הזה...

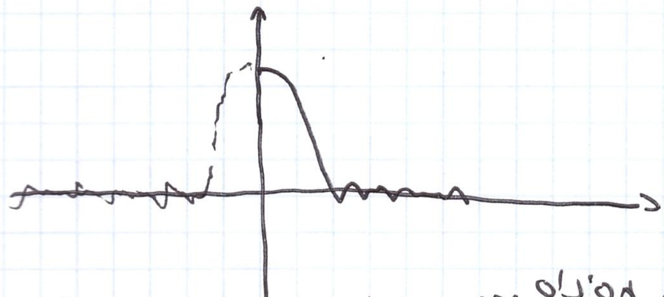
ונשים לב כי בלי לשים לב דרשנו פה המשכה סימטרית

(וזה המקרה הכי קל כי נתונים לי פנן סימטרי כי אנחנו רק רוצים להבין את הפרנציפ...)

ואז פייני מקבל:



ולא!



כמו שלנו הייני מתחילים מסינוס...

אבל הוא בוחר ככה כי nobody tells him what to do and there is no free conception of what to do... ([illegible])

$$(3*)=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty g(\omega)\frac{e^{i\omega t}}{2}d\omega+\underbrace{\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty g(\omega)\frac{e^{-i\omega t}}{2}d\omega}_{\omega'=-\omega}=$$

מגדיר

$$\frac{e^{i\omega t}+e^{-i\omega t}}{2}=\cos\omega t$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} g(w) \frac{e^{iwt}}{2} + \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \left( - \int_0^{-\infty} g(-w') \frac{e^{iw't}}{2} \, dw \right) \longrightarrow$$

כה את נעשה עוד החלפת משתנים $w' \to w$

(נזכיר: $w' = -w$)

ונניח את הפונקציה $g(w)$ כך ש $g(-w) = g(w)$
(כי ככה נוכל לבחור את $g(w)$ - כי בכוחנו).

$$\xrightarrow{\text{נקבל}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(w) e^{iwt} \underset{\text{נזכיר}}{=} \Psi(0,t)$$

ו-$g(w)$ זה בעצם פורייה טרנספורם של הפולס...

ואנחנו רואים שזה תפקידה בעצם.

נשאל השאלה - מה קורה כשהזמן חולף: $(\Psi(x,t))$.

תכלס איזה אינטגרל כל אני צריך לעשות - אני צריך לחזור ל:
(חזרנו ל-(*) בעמוד הקודם)

$$\Psi(x,t) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} g(w) \cos\left(w\left(t - \frac{x}{V_\varphi(w)}\right)\right) dw$$

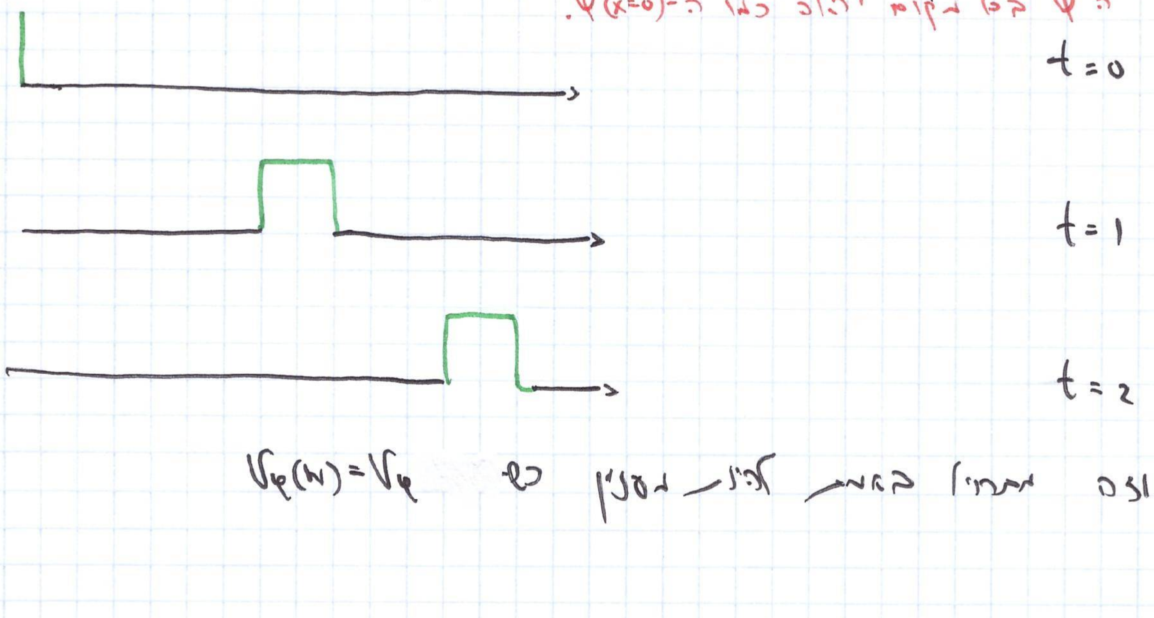
(מהעמוד הקודם)

אם זה אינטגרל מה זה טבעה רק אם $V_\varphi = c$ ש $c = \text{const.}$

כאשר $V_\varphi = c$

$$\Psi(x,t) = \Psi\left(0, t - \frac{x}{c}\right)$$

וזה יראה כך (אם הרגע של הזמן כך)
ה $\Psi$ בכל מקום יהיה כמו ה-$\Psi(x=0)$.



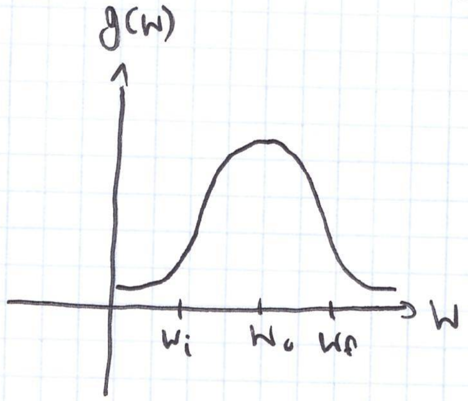

וזה מתרחש באמת לגלי מעניין כש $V_\varphi(w) = V_\varphi$

(1) י' 10

# הרצאה - תמ"ס:

המשך של חבילות אור (משיעור קודם)

נניח למשל כי יש לנו $g(w)$ מהצורה:
$g(w)$ - היא חבילה, בצורה כמו שראינו (הזו) יהיה מבצורה:




$$\Psi(x,t)=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int g(w)\cos(wt-kz)\,dw$$

כאשר $g(w)$ סימטרי סביב $w_0$:

אז נגדיר $g_{w_0}$
$$g_{w_0}(w)=g(w-w_0)$$

! $g_{w_0}$ - פונקציה ממורכזת סביב הראשית...

לכן:
$$\Psi(x,t)=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} g(w-w_0)\cos(wt-kx)\,dw$$

ונניח לצורך העניין ש- $w_0 >> \Delta w$

כאשר נרצה לקרוא ל-$w'$ כך (קודם נגדיר $w'$):

$w'=w-w_0$

$$\Psi(x,t)=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} g(w')\cos([w'+w_0]t-k(w'+w_0)x)\,dw' \cong$$

לכן

כאשר $k$ תלוי ב-$w$!!!

$$\cong \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} g(w')\cos([w'+w_0]t-\underbrace{k\,(w'+w_0)x}_{k \text{ הוא פונ' של } w'+w_0})\,dw'$$

אין פה כפל!!!

כאשר לכן אנו טיילור ל-$k$:

$$k(w_0+w)=k(w_0)+\frac{\partial k}{\partial w}(w_0)w'+O(w'^2)$$

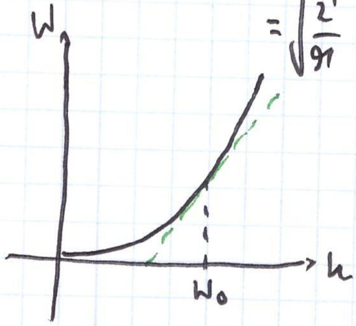
זנח (נו' יכר הנזה) משנה את התרחבות המע' - כרגע לא שם

ואחרי העברה והצבה נקבל:

$$\Psi(x,t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} g(w)\cdot e^{i\left((w+w_0)t-k(w_0)x-\frac{\partial k}{\partial w}\big|_{w_0}\cdot xw\right)}=$$

לא תלוי ב-W

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,Re\Big\{\underbrace{e^{i(w_0t-k(w_0)x)}}_{\text{לא תלוי ב-W}}\int_{-\infty}^{\infty} g(w)e^{i\left(wt-\frac{xw}{\frac{\partial w}{\partial k}\big|_{w_0}}\right)}dw\Big\}$$



כאשר כפי שהגדרנו בהתחלה:
$$V_g=\frac{\partial w}{\partial k}\Big|_{w_0}$$

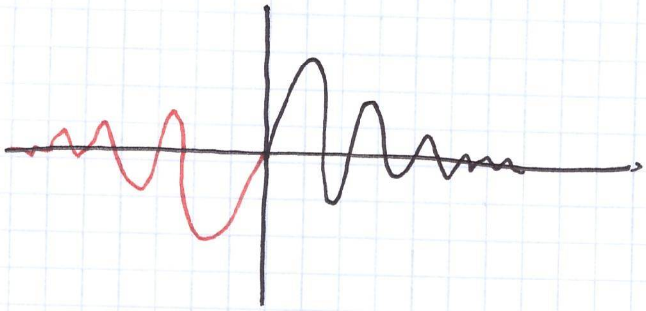
$$\Rightarrow \Psi(x,t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,Re\Big\{e^{i(w_0t-k(w_0)x)}\int_{-\infty}^{\infty}\underbrace{g(w)e^{iw\left(t-\frac{x}{V_g}\right)}}_{\text{זוגי לכן}}dw\Big\}=$$

זוגי לכן
חלק הסינוס באינטגרל הזה מתאפס כי תחום סימטרי.
ו $g(w)$ גם הוא זוגי לפי בחירתנו.

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos(w_0t-k(w_0)x)\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}g(w)e^{iw\left(t-\frac{x}{V_g}\right)}dw}_{\Psi_r(x,t)=\Psi_r\left(0,t-\frac{x}{V_g}\right)}$$

$$\Delta w\Delta t\geq 2\pi \qquad \text{כאשר}$$

ואם יהיו מקרים של פונקציה מעורבת כזו:



נצטרך לעשות המשכה אנטי סימטרית כזאת ולעשות עליה טרנספורם פוריה

נניח למשל מישהו מביא לי $g(w)$ שהיא לא דווקא עם אופציה להמשכה אנטי סימטרית, טרנספורמציית פוריה (הפוכה) שנראית מהצורה הבאה:

$$\psi(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} g(w)\, e^{iwt}\, dw$$

ונקבל:

$$g(w)=\frac{1}{2}\left(A(w)+B(w)\right)$$

כאן יש מינוס

$$A(w)=A(-w)\quad,\quad B(w)=-B(-w)$$

אזי

$$g(-w)=\frac{1}{2}\left(A(w)-B(w)\right)$$

כאשר

$$\boxed{\begin{aligned} g(w)+g(-w)&=A(w)\\ g(w)-g(-w)&=B(w)\end{aligned}}\quad (*)$$

!

וזה אומר שאם מישהו נותן לי פונק' כללית לא סימטרית ולא אנטי סימטרית, ביכולתי לגזור אותה לחלק הסימטרי ולחלק האנטיסימטרי

ואם נציב את הפיתוח ב $\psi(t)$ נקבל:

$$\psi(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\left(A(w)+B(w)\right)}{2}\, e^{iwt}\, dw \overset{\text{נציב}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Bigg[\int_{0}^{\infty}\underbrace{\frac{\left[A(w)+B(w)\right]}{2}}_{g(w)}\, e^{-iwt} +$$

$$+\int_{-\infty}^{0}\underbrace{\frac{\left[A(w)+B(w)\right]}{2}}_{g(w)}\, e^{iwt}\, dw\Bigg]=$$

סכום β צדדים שלה

ד.

(*)

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \frac{[A(w)+B(w)]}{2} e^{iwt} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \underbrace{\frac{[A(w)-B(w)]}{2}}_{g(-w)} e^{-iwt} dw =$$

עכשיו נכנס לארג ולשם

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty A(w)\cos(wt)\,dw + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty B(w)\sin(wt)\,dw$$

איך אתה יודע מה הם $A(w)$ ו $B(w)$? אם הם רק כ

$$g(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) e^{-iwt} dw$$

ועל פי התנאים שהגענו ל-(*) אני מקבל מ״מ את $A(w)$ ו-$B(w)$!:

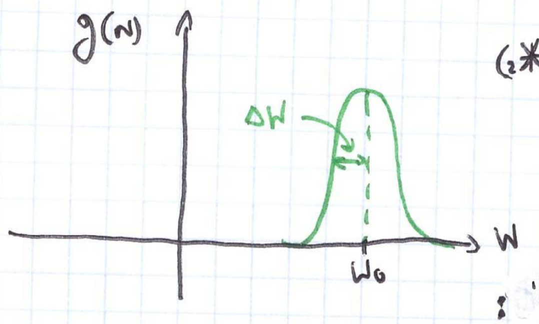
$$\mathrm{I} \quad A(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t)\cos(wt)\,dt$$

$$\mathrm{II} \quad B(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t)\sin(wt)\,dt$$

כש $\psi(t)$ זוגי סינוס II מתאפס

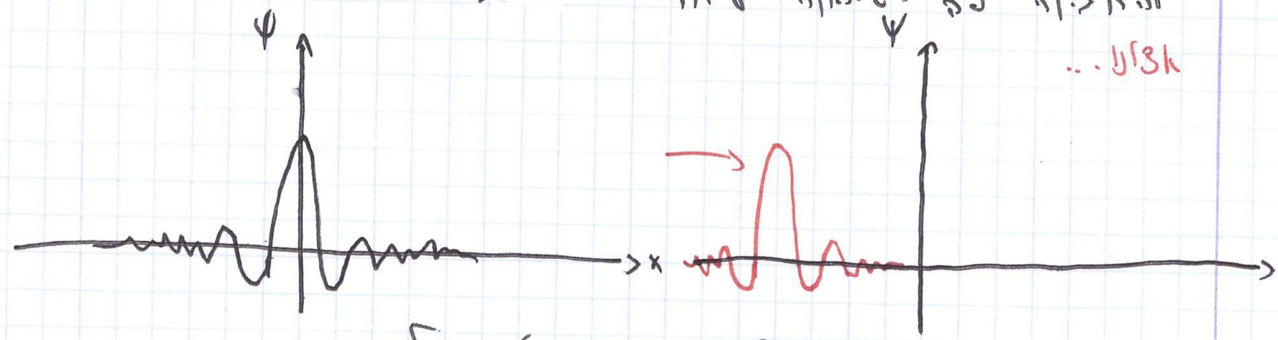
כש $\psi(t)$ אי זוגי קוסינוס I מתאפס

# העברה והחזרה של תבנית גלים
## יחס הנפיצה יהיה לינארי:

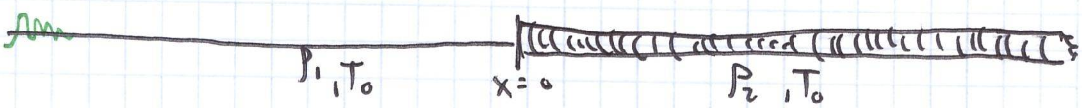



$$(*_2)\quad \Psi(x,t)=\int_0^{\infty} g(w)\cos(wt-kx)\,dw$$

והתמונה פה נעה שמאלה עבור $x$ שלילי:




נניח שעכשיו את אותו הכיוון חבל גלים והוא מתקדם לכיוון כשאנו ישנו ב- $x=0$ במיתר עם $\rho_i$ שונים




כאשר ביכולתנו להציב את $\Psi$ במשוואת הגלים כי זה אומר לעבוד (משוואת הגלים: $\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}$).

ונקבל:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(c^2 g(w)k^2\cos(wt-kx)-g(w)w^2\cos(wt-kx)\right)dw=0$$

והאינטגרל הזה הוא 0 אם $c^2k^2-w^2=0$

$$\int_{-\infty}^{\infty}(c^2k^2-w^2)\,g(w)\cos(wt-kx)\,dw=0$$

ואז קיבלנו את יחס הנפיצה ובעצם יחס הנפיצה מתקיים כאן

אם הפיתרון הזה לא יקיים את משוואת הגלים

כי תהיה נקודת אי רציפות לכן נציע פיתרון אחר

(ט)

לכן נוסיף תיקון

עבור $x<0$

$W=c_1k_1$

ועבור $x>0$

$W=c_2k_2$

$$\cos(Wt-k_1x)+B\cos(Wt+k_1x)$$

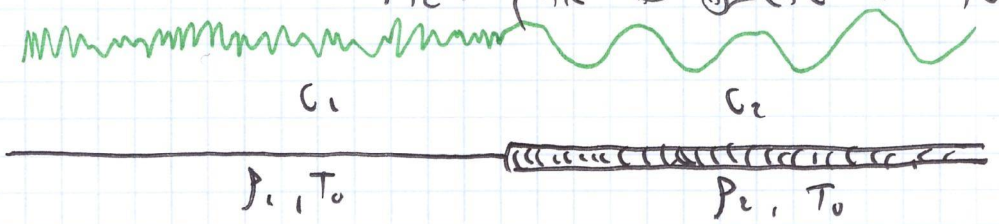
$$\Psi(x,t)=\int g(W)\left(\cos(Wt-k_1x)+B\cos(Wt+k_1x)\right)$$

$$T\cos(Wt-k_2x)$$

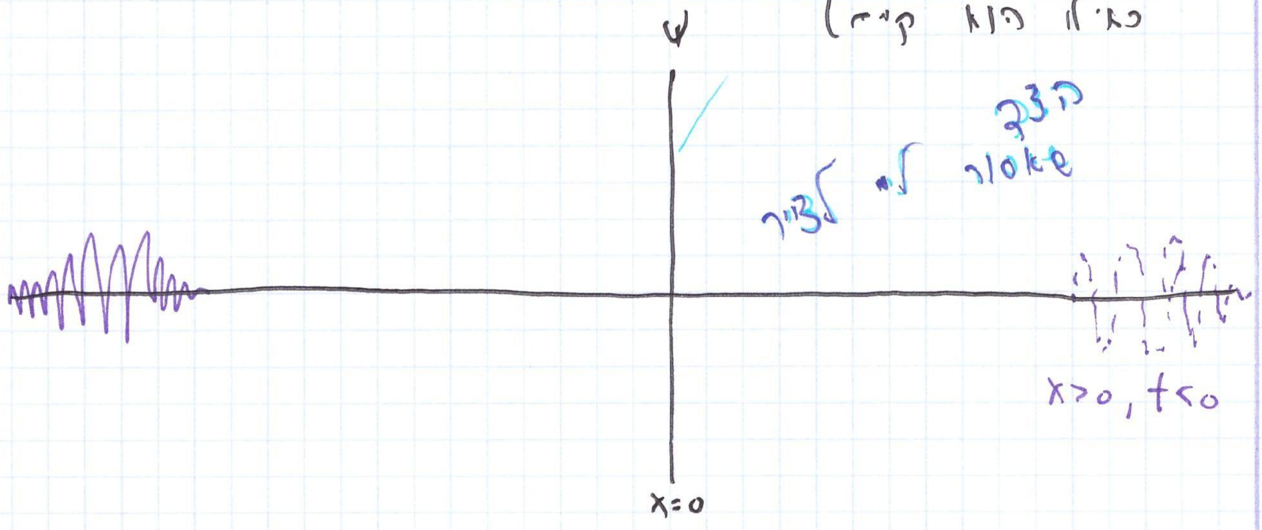
$$\Psi_R(x,t)=T\int g(W)\cos(Wt-k_2x)$$

כאשר $g(W)$ זה האמפליטודה של הפירוק לפי מספר את כל הפרמטרים

כאשר מה שהוספנו זה אורך הגל:

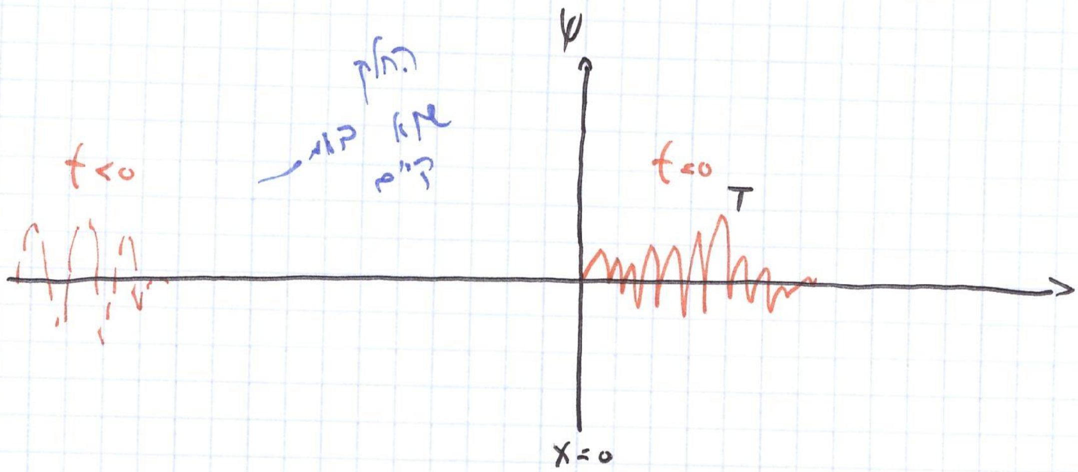



נצייר גרפים לפי צבעים שסימנו (מה שמקווקו לא קיים והוספנו כאילו הוא קיים)




ומי שיצייר רק את מה שמותר לו לצייר אז שמאל יראה רק שנעלם ב $x=0$ יראה את החבילה המקווקוות ואחרי שהוא מקווקוות פוגעות ב $x=0$

ומה קורה ל- $\Psi_R(x,t)$ (הפיתרון השני)




וסיימנו חבילות גלים

הנושא הבא שנתחיל נסעי לכיוון זה **התאבכות**
ונרצה לספר על התכונות של גלים אלקטרומגנטיים:

## גלים אלקטרו-מגנטיים:

ובפעם הקודמת ראינו שבה הגענו למערך במשוואות הבאות:

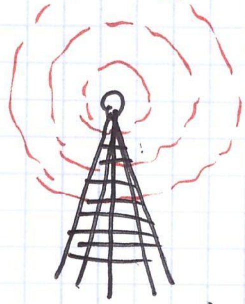
$$c^2\nabla^2\vec{E}=\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} \Longrightarrow c^2\left(\frac{\partial^2E_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2E_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2E_x}{\partial z^2}\right)=\frac{\partial^2E_x}{\partial t^2}$$

רכיבים

$$c^2\nabla^2\vec{B}=\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} \Longrightarrow$$

ונניח שיש לי מקור שמוציא גלים תלת מימדיים

$$c^2\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right)=\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}$$



ואנחנו רוצים שהאמפליטודה תהיה בצורת מעגלים שלמים (קליפות כדור שלמות)
סביבה... ואנחנו נרצה להגיע למשוואה שיש בה $t$ ו $|r|$ (ערך מוחלט)

יעני: נניח $\Psi(\vec{r},t)=\Psi(r,t)$

גו"

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}=\frac{\partial\psi}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}=\psi'\frac{\partial r}{\partial x}$$ מכלל השרשרת ידוע:

$$\psi'=\frac{\partial\psi}{\partial r}$$

ואחרי גזירה שניה:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\psi'\frac{\partial r}{\partial x}\right)=\psi''\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2+\psi'\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}$$

כאשר $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

אזי:

$$\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{r}\Rightarrow\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}=\frac{1}{r}-\frac{x}{r^2}\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{1}{r}-\frac{x^2}{r^2}$$

נציב ב (3)

נציב ונקבל גורמים מאפיינים:

$$\nabla^2\psi=\psi''\left(\frac{x^2+y^2+z^2}{r^2}\right)+\psi'\underbrace{\left(\frac{3}{r}-\frac{x^2+y^2+z^2}{r^3}\right)}_{\frac{2}{r}}$$

$$\Downarrow$$

ומקבלים ש:

$$\nabla^2\psi=\psi''+\frac{2}{r}\psi' \quad (3*)$$

בשביל לזהות שהגענו למקום הנכון נבדוק את הביטוי הבא:

$$\underbrace{\frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}(r\psi)}_{\text{דיפרנציאל בקואו' כדוריות.}}=\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(\psi+r\psi')=\frac{1}{r}(\psi'+\psi'+r\psi'')=\boxed{\frac{2}{r}\psi'+\psi''}$$

יפה יצא סבבה... ב (3*)

נגדיר $\psi=\frac{U(r,t)}{r}$ אני לא יודע מה זה $\psi$ ולכן מותר לעשות מה שבא לי...

ונציב ב $c^2\frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}(r\psi)=\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi$

ונקבל:

$$\boxed{c^2\frac{d^2}{dr^2}U=\frac{\partial^2}{\partial t^2}U}$$ שוב משוו' הגלים.

והפתרון שלנו בעצם יהיה מהצורה:

$$U=A\cos(wt-kr)+B\cos(wt+kr)$$

! - $\psi=\frac{U(r,t)}{r}$ כנראה מתאר גל כדורי מה שיוצא לנו פה...

ומה שונה בין גל כדורי וגל גלילי? בכדורי האמפליטודה ה"ב לקטון: (לפחות עבור מקרה פרטי בו $B=0$):

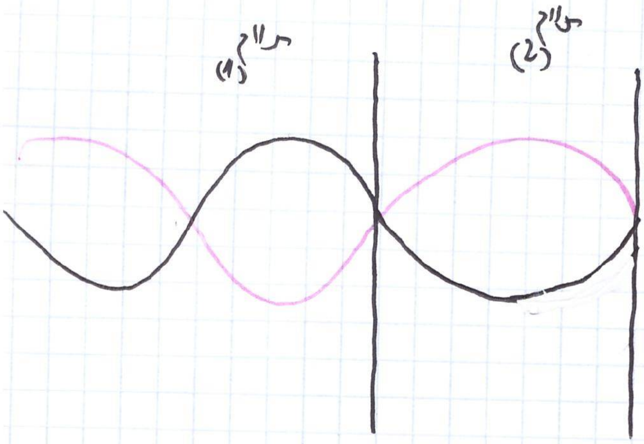
$$\psi = \frac{A\cos(\omega t - kr)}{r}$$

כמו שנראה בזריקת אבן לבריכה - נראה גל דועך במישור

וכך דומה רעיון ב 3D.

בס"ד

# גלים= הרצאה - היום:




נניח גל בא מתווך 1 לתווך 2

אם נשנה את מרחק הקיר של

תווך 2 האמפליטודה של הגל החוזר

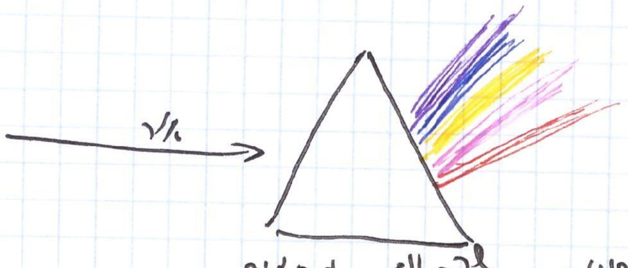
תוכל להיות הפוכה לאמפליטודה

הפוגעת ורוד זה חוזר

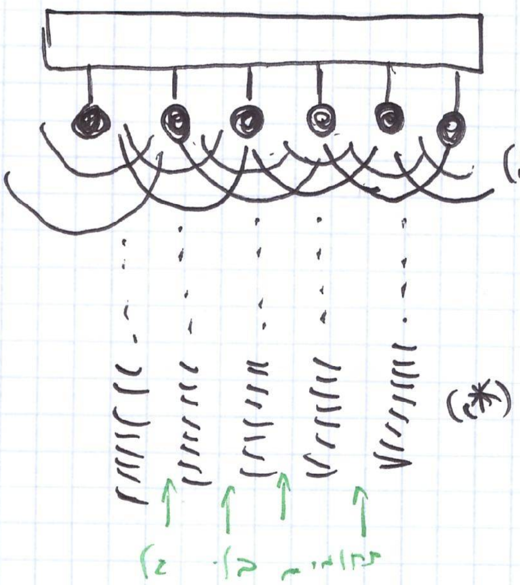
וע"י משחק עם העובי של תווך

2 נוכל לשחק עם התדר שחוזר כאשר חשוב לציין שבאור תדר זה צבע!!!

אז כך הצבעים המזהים שרואים כאשר יורים אור על תווך כלשהו למשל




הנה התדרים השונים שהגלים מחזיר.




אז הוא לקח כדורים שפוגעים בגוף

בקצב קבוע כאשר ב($*_1$) הגלים

וב($*_2$) הגלים הופכים לתחומים עם

גל ותחומים בלי גל.

והוא ינסה להסביר את זה...

אז נכון לנו ב $x=0$:

$$\psi(0,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int g(\omega)\cos(\omega t)\,d\omega \quad , \psi(0,t)=\psi(0,-t)$$

ונרצה את $\psi(x,t)$ אז כמו שאנו נוכל ע"י פונ' התמסורת למצוא

את $\psi(x,t)$ ע"י ההמרה (אני צודק?)

$$\Psi(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} g(w)\cos(wt-kx)\,dw$$

כאשר

$$g(w)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\Psi(0,t)\cos(wt)\,dt$$

אנחנו יודעים ש:
נניח שיש לנו פונ' אזי יכולים לרשום אותה כסכום של
מספרי גל:

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\tilde{f}(k)e^{ikx}\,dk$$

הפונ' הנתונה

אז עבור פונ' מרובת פרמטרים לפיהן נוכל לעשות:

$$f(x,y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\tilde{f}(k,y)e^{ik_x x}\,dk$$

הפונ' הנתונה

כאשר

$$\tilde{f}(k,y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int f(x,y)e^{-ik_x x}\,dx$$

נציב את הפונ' כאן מעבר פוריה טרנספורם ונעשה רק פוריה טרנספו
לפי $k_y$

$$\hat{\tilde{f}}(k,y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\tilde{\tilde{f}}(k_x,k_y)e^{ik_y y}\,dk_y$$

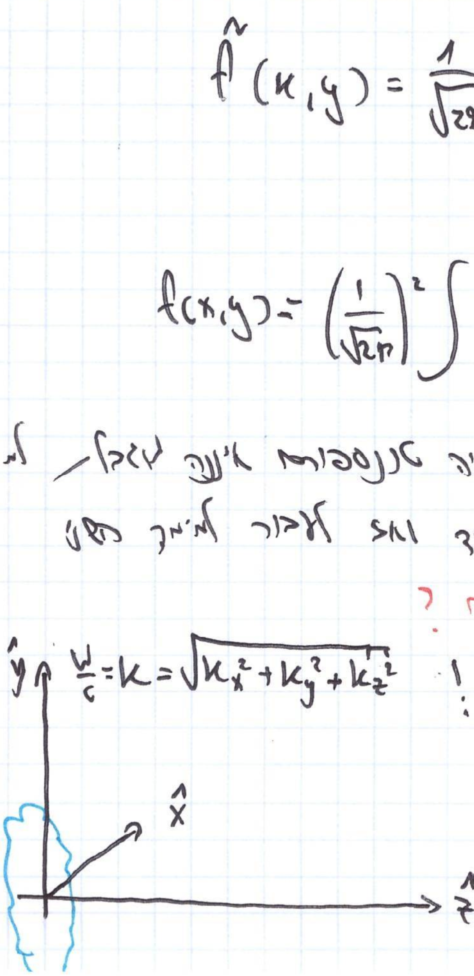
$$\Downarrow$$

$$f(x,y)=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^2\int\tilde{\tilde{f}}(k_x,k_y)e^{ik_x x+ik_y y}\,dk_x\,dk_y$$

זאת אומרת שהפעולה של עשיית פוריה טרנספורם אינה מגבלת למימד
אחד ואפשר בעצם לעשות במימד אחד ואז לעבור למימד השני

אז איך זה קשור לחבילות גלים ?

$\frac{W}{c}=k=\sqrt{k_x^2+k_y^2+k_z^2}$ ! נניח ש-$W$ נתון כאשר $W=ck$




כמו גל מישורי במישור x-y פולו כלה
שעבור חתך כלשהו ב $z$
נקבל את אותה אמפליטודה בכל
החתך

ואם נתונים לי פיזור בראשית $(z=0)$

$$E(x,y,0)=\int \tilde{\hat{E}}(k_x,k_y)\,e^{i(k_x x+k_y y)}\,dk_x\,dk_y$$

נציב $z=0$ ונחשב את פורייה טרנספורם, נחזור למשוואה כש $z\neq 0$

$$E(x,y,z)=\int \tilde{\hat{E}}(k_x,k_y)\,e^{i(k_x x+k_y y+k_z z)-i\omega t}\,dk_x\,dk_y$$

אשר נזכיר כי $k_z=\sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2-k_x^2-k_y^2}$

נחפש את גל זמין את המשוואה $\tilde{\hat{E}}(k_x,k_y)$ - מה שאני יכול לייצר עם סימטריה תנאים שלי - ונראה מה יצא בגל שאני מבחין צורת הגל. נניח ש:

$$\tilde{\hat{E}}(k_x,k_y)=\delta\left(\sqrt{k_x^2+k_y^2}-k_\perp\right)$$

מספר הגל בכיוון הרדיאלי

כאשר $k_\perp$ מספר נתון

$$E(x,y,0)=\int \delta\left(\sqrt{k_x^2+k_y^2}-k_\perp\right)e^{i(k_x x+k_y y)}=(*_1)$$

מספר הגל בכיוון הרדיאלי

ונעשה החלפת משתנים:

$$k_x=q\cos\phi$$
$$k_y=q\sin\phi$$

והרי $\int f(x)\,\delta(x-x_0)\,dx=f(x_0)$

$$=(*_1)=\iint \delta(q-k_\perp)\,e^{i(q\cos\phi\, x+q\sin\phi\, y)}\,q\,dq\,d\phi=(*_2)$$

אז מישהו שם לב - יש חסר פה אולי יעקוביאן יש והוא הוסף $q$.

מספר הגל בכיוון הרדיאלי

$$=(*_2)=k_\perp\int e^{i(k_\perp\cos\phi\, x+k_\perp\sin\phi\, y)}\,d\phi=\frac{\sin\left(k_\perp\sqrt{x^2+y^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}=J_0(k_\perp\rho)$$

משהו שגוי...

עבור $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$ וקיבלנו כאן בסוף שפונקציית בסל אכן הולכת וקטנה.

$$E(x,y,z)=\int \delta\left(\sqrt{k_x^2+k_y^2}-k_\perp\right)e^{i\left(k_x x+k_y y+\sqrt{k^2-(k_x^2+k_y^2)}\,z\right)}dk_x dk_y \quad (*_3)$$

כאשר נגדיר:

$$k_x = q\cos\phi$$
$$k_y = q\sin\phi$$

אז נציב את המשתנים במרחב הקוטבי:

$$(*_3)=\iint \delta(q-k_\perp)e^{i(q\cos\phi x+q\sin\phi y)+\sqrt{k^2-q^2}\,z}\,q\,dq\,d\phi$$

$$=\Big[\underbrace{\int d\phi\, e^{i(k_\perp\cos\phi x+k_\perp\sin\phi y)}}_{J_0\left(k_\perp\sqrt{x^2+y^2}\right)}\Big]e^{i\sqrt{k^2-k_\perp^2}\,z}$$

נקבל פונ' בסל

ו $e^{i\sqrt{k^2-k_\perp^2}z}$ היא פונ' מחזורית ולכן הפונ' תוגדר בעבור

מספר ערכים ללא מגבלה

# גלים = הרצאה 2014:

בשיעור הקודם ראינו פוריה טרנספורם באמצעות קוסינוס וסינוס, היום המחשבים משתמשים בפוריה טרנספורם קומפלקסי - אבל בעצם מחשבים לא יודעים איך לעבוד עם זה.

$$\Psi(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty A(w)\cos(wt)\,dw+\frac{i}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty B(w)\sin(wt)\,dw$$

כאשר המקדמים:

$$A(w)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\Psi(t)\cos(wt)\,dt$$

$$B(w)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,i\int_{-\infty}^{\infty}\Psi(t)\sin(wt)\,dt$$

והנה לא הצליח להמחיש לנו שחסר פה $i$.

## התאבכות - המשך:

נחזור לגלים אלקטרומגנטיים כי זה נושא חשוב - בפעם הקודמת ראינו את משוואות מקסוול וראינו שהשדות $\vec{B}$ ו-$\vec{E}$ מקיימים את משוואות הגלים בכל מחיר. אבל בגזירה אנחנו מאבדים אינפורמציה (אני מדבר על הקונסטנט שנעלם בגזירה). אז איזו אינפורמציה אנחנו מאבדים?

משוואות הגלים של $\vec{E}$ ו-$\vec{B}$:

$$\nabla^2\vec{E}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\nabla^2\vec{B}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}$$

והתנאים ה"כבדים" של $\vec{E}$ ו-$\vec{B}$:

בריק $\rho=0,\ J=0$:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=0\ ,\ \vec{\nabla}\vec{B}=0$$

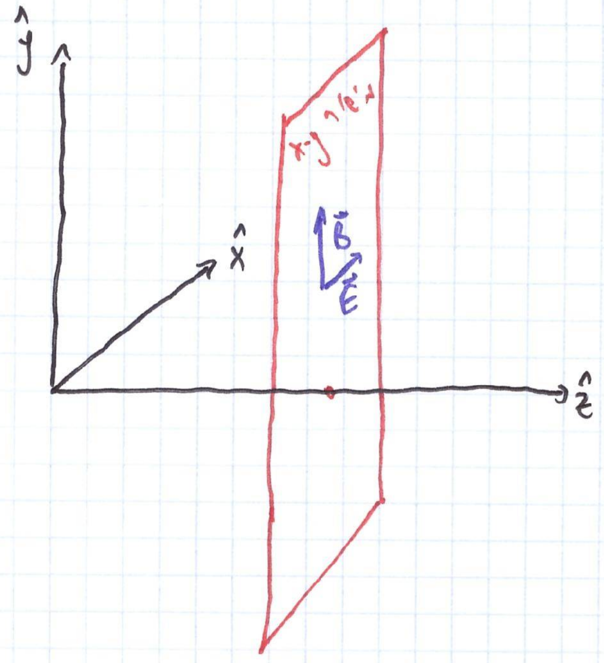
נדון בגל מישורי אלקטרומגנטי ש-$\vec{E}$ ו-$\vec{B}$ בכיוון של אחידים (לך לדוגמה שתלך על המישור שנמצא ב-z מסוים ותקבל את $\vec{E}$ ו-$\vec{B}$ (אז אין תלות ב-x ו-y כמובן):

$$\vec{E}=\hat{x}E_x(z,t)+\hat{y}E_y(z,t)+\hat{z}E_z(z,t)$$

$$\vec{B}=\hat{x}B_x(z,t)+\hat{y}B_y(z,t)+\hat{z}B_z(z,t)$$

סו

נצייר את המצב ציורית:




אנחנו יודעים ש $\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=0$ אז:

$$\cancel{\frac{\partial E_x}{\partial x}}^{0} + \cancel{\frac{\partial E_y}{\partial y}}^{0} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \implies \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$$

כי אמרנו ש E ו B לא תלויים ב x,y

$$\Downarrow$$

$$E_z = const. \text{ (קבוע במרחב)}$$

אז בשביל הספרותיות נבחר $\underline{\text{קבוע} = 0}$, קבוע שהוא לא אפס אין לו תכונה של גל. אז ראינו ש $E_z=0$ ⇐ אז אני נעצור בכך שאני חייב לדעת ש $\vec{E}$ שלנו חייב לשכב במישור כמוראה בתרשים לעיל.

והתכונה הזאת לא נכונה אם הגל לא מישורי. אנחנו בינתיים נושא רק גלים מישוריים אז לשים לב.

אז אותה תכונה עבור $\vec{B}$ (יש שם נקבל שוב):

$$\frac{\partial B_z}{\partial z}=0 \underset{\uparrow}{\implies} B_z = \text{קבוע} \implies B_z \underset{\uparrow}{=} 0 \implies \text{B שוכב במישור גם.}$$

כי $\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0$     כי בחרנו 0.

ונרשום את מקסוול:

① $\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} = c^2\, \vec{\nabla}\times\vec{B}$

② $\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\vec{\nabla}\times\vec{E}$

זה ב- M.K.S

ב M.K.S - משוואה אחת עם $c^2$ ושני לא - זה קל!!

אז נמשיך לשחק עם המשוואות:

$$\frac{\partial B_x}{\partial t} = - \begin{pmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{pmatrix} = + \frac{\partial E_y}{\partial z}$$

כי $E_z = 0$

כי שים לב מינוס

אז הראינו בעצם את 1 ו-2 השאר נפתור ישר בלי להראות איך פותרים:

(2)

$$\boxed{\frac{\partial B_y}{\partial t} = -\frac{\partial E_x}{\partial z} \quad , \quad \frac{\partial B_x}{\partial t} = \frac{\partial E_y}{\partial z}} \quad (1)$$

(1)

מעמוד קודם

$$\boxed{\frac{\partial E_y}{\partial t} = c^2 \frac{\partial B_x}{\partial z} \quad , \quad \frac{\partial E_x}{\partial t} = -c^2 \frac{\partial B_y}{\partial z}} \quad (2)$$

אם $E_x = 0$ אז גם $B_y = 0$ (גם הנגזרת בזמן וגם הנגזרת במקום) אז אם נבחר שדה E בכיוון ציר x (כיוון מקובל בקורס) אז B לא יכול להיות בכיוון y ונשאר לו רק להיות ב-x ולכן תת מקרה מוגדר בצורה:

נבחר:

$$\boxed{\vec{E} = \hat{x} E_0 \cos(wt - kz)}$$

קיטוב לינארי

ולמקרה הזה קוראים קיטוב לינארי - למה? הוא לא יכול להסביר לנו בלי להראות לנו קיטוב לא לינארי אז נדבק להשלים עם השם הזה...

אז מה זה $\vec{B}$?

$$\frac{\partial B_y}{\partial t} = -E_0 \cdot k \cdot \sin(wt - kz) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{B_y = \frac{k}{w} E_0 \cos(wt - kz) +} \cancel{קבוע}$$

אבל אמרתי לבם קבוע לא מעניין אותנו.

אנחנו בריק הרי:

$$B_y = \frac{E_0}{c} \cos(wt - kz)$$

$$\Rightarrow \vec{B} = \frac{E_0}{c} \cos(wt - kz) \hat{y}$$

וקיבלנו ש:

$$\boxed{\vec{E} \times \vec{B} \parallel \vec{k}}$$

יוצא ש $\vec{E} \times \vec{B}$ זה וקטור שמקביל לכיוון התקדמות הגל...

בנוסף מתקיים ב m.k.s העובדה

$$\boxed{|B| = \frac{|E|}{c}}$$

יעני $\vec{B}$ יותר חלש ב $\frac{1}{c}$ מ- $\vec{E}$

ב c.g.s אבל הפקטור הוא $\frac{v}{c}$ # רק אחד.

רוב הגלאים בעולם לא יודעים להבדיל בין $\vec{E}$ ל- $-\vec{E}$, יש

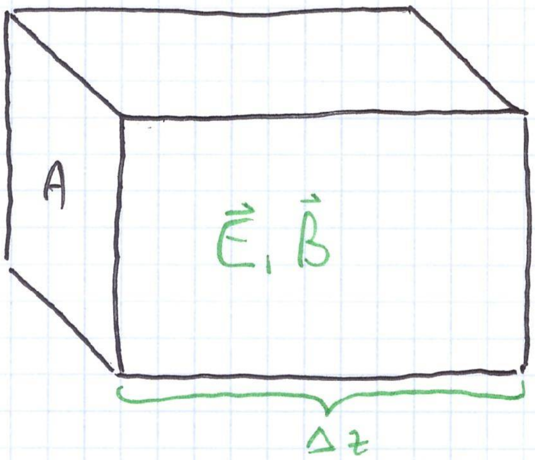
סרט צילום רגיש אליו לפי האנרגיה של הקרינה האלקטרו-מגנטית

אז בואו ונדבר על:

## שטף האנרגיה של קרינה א"מ:

אז אני רוצה לקשר את שטף האנרגיה לגלים:

נניח תיבה בחלל (ב- M.K.S)




(אנחנו רק צריכים להאמין לו)

$$W = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{\mu_0}\right) A \cdot \Delta z$$

ב c.g.s: (כמו שעשינו ב ג'ל - לא צפיפות, אנרגיה לא להתבלבל):

$$W = \frac{1}{8\pi}\int_{\text{כל המרחב}} (E^2 + B^2)\, dV \cong \frac{1}{8\pi}(E^2 + B^2) A \cdot \Delta z$$

ואני רוצה לשאול מה ההספק (שינוי האנרגיה)

(עבור גלים מישוריים - קיטוב לינארי)

ב M.K.S

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \Delta z \cdot A \left(\varepsilon_0 E_x \frac{\partial E_x}{\partial t} + \frac{1}{\mu_0} B_y \frac{\partial B_y}{\partial t}\right)$$

נציב את מקסוול-היחסים שלנו:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \Delta z \cdot A \left(\varepsilon_0 E_x \left(-c^2 \frac{\partial B_y}{\partial z}\right) + \frac{1}{\mu_0} B_y \left(-\frac{\partial E_x}{\partial z}\right)\right) = (*)$$

ההצבות. ההצבה

$$(*_1) = \frac{\Delta z \cdot A}{\mu_0}\left(c^2 \cancel{\varepsilon_0 \mu_0} E_x \left(\frac{\partial B_y}{\partial z}\right) + B_y \frac{\partial E_x}{\partial z}\right) =$$

מפתוח כקודם למעלה

כי: $c^2 = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0}$

$$= -\frac{\Delta z \cdot A}{\mu_0}\frac{\partial}{\partial z}\left(E_x \cdot B_y\right) = \frac{\partial W}{\partial t} = (*_1)$$

כזכור

ואם הקופסה קטנה אז נוכל לרשום ש:

$$(*_2) = \frac{\Delta z \cdot A}{\mu_0} \cdot \frac{\left(E_x B_y\big|_z - E_x B_y\big|_{z+\Delta z}\right)}{\Delta z}$$

ונקבל ש:

של אנרגיה בכניסה

של אנרגיה ביציאה מהקופסה

$$\frac{1}{A} \cdot \frac{\partial W}{\partial t} = \frac{E_x B_y\big|_z - E_x B_y\big|_{z+\Delta z}}{\Delta z}$$

ואנחנו נוכל להגדיר וקטור $\vec{S}$ כ: (וקטור פויינטינג יקרא שמו)

$$S = \frac{1}{\mu_0} E_x(z,t) \cdot B_y(z,t)$$

סקלרי

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E}(z,t) \times \vec{B}(z,t)$$

וקטורי

המכפלה של $E_x$ ו-$B_y$ ברגע הכניסה פחות המכפלה שלהם ביציאה

וזה כמה אנרגיה נצטרך לספק ליחידת שטח. וזה בעצם $\vec{S}$.

והרי ראינו שמבחינה סקלרית

$$|B| = \frac{|E|}{c}$$

(בתחילת העמוד הקודם הבא [illegible] לטובה)

אז נקבל -וזה בכל הכח לקרוא הזה שקוראים לו עכשיו $\vec{S}$:

$$S = \frac{1}{\mu_0} \cdot \frac{1}{c} E_x^2 = \frac{1}{\mu_0}\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0} \cdot E_x^2 = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} E_x^2$$

ודבר הזה קוראים וקטור פוינטינג

וזה האימפדנס

כך $Z = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}$

האור משתנה בתדירויות של סדר הרץ ויותר ולכן "$\tau$" הוא מהירה יחסית גדול והעין בעצם יודעת למצע על פני זמן גדול ולכן העין תהיה רגישה לממוצע על פני הזמן של $\vec{S}$

$$\langle S\rangle = \frac{1}{\tau}\int_0^{\tau} \varepsilon E^2\, d\tau$$

יעני העין רגישה לו

היא לא יודעת להבדיל את $\vec{E}$ כרגע במינימום או במקסימום...

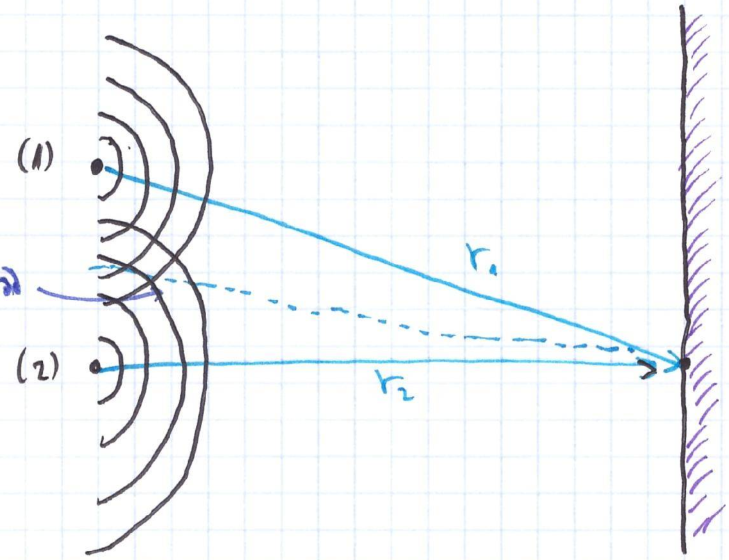
(אם הבנתי נכון)

ואני מזכיר של-$\vec{S}$ קוראים וקטור פוינטינג.

אז הוא קופץ עכשיו לנושא חדש בשם (זה בעצם משנה את הצבע):

## התאבכות ועקיפה:

יש 2 מקורות שוצרים שדה מהצורה:




$$E_1 = \frac{E^0}{r_1}\cos(kr_1-\omega t+\varphi_1)$$

של מקור (1)

ו-$E_2$ בצורה שלו יהיה:

$$E_2 = \frac{E^0}{r_2}\cos(kr_2-\omega t+\varphi_2)$$

כאשר $E$ זה וקטור שיוצא מהדף... (כפתור את הגלים)

נניח אפילו שיהיה להם פאזה שונה אבל אני מבחינתי מדבר רק על מצב שיש להם מקור עם תדר אחד.

כשביל למצוא את השדה נעשה כמה קירובים שיעזרו לנו את הפיתוח ואז נדבר על זה:

קירוב ראשון $r_1\sim r_2\sim r$ יעני כל ה-r-ים וזה דבר בערך...

$$\Rightarrow \frac{E^0}{r_2}\sim\frac{E^0}{r_1}\sim\frac{E^0}{r}\sim E_r^0$$

הנה החלקים הקירובים שמעכשיו נכתוב

אם $E_1$ ו-$E_2$ פותרים את משוואת הגלים אז מלינאריות גם הסכום פותר לכן:

$$E = E_1+E_2 = E_r\left(\cos(kr_1-\omega t+\varphi_1)+\cos(kr_2-\omega t+\varphi_2)\right) \overset{?}{=} (*_3)$$

זהות של חיבור והחסרת זווית

(ג)

$$(*_3) = 2E_r \cos\left(\frac{k(r_1+r_2)}{2} - wt + \frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}\right)\cos\left(\frac{k(r_1-r_2)}{2} + \frac{\varphi_2-\varphi_1}{2}\right)$$

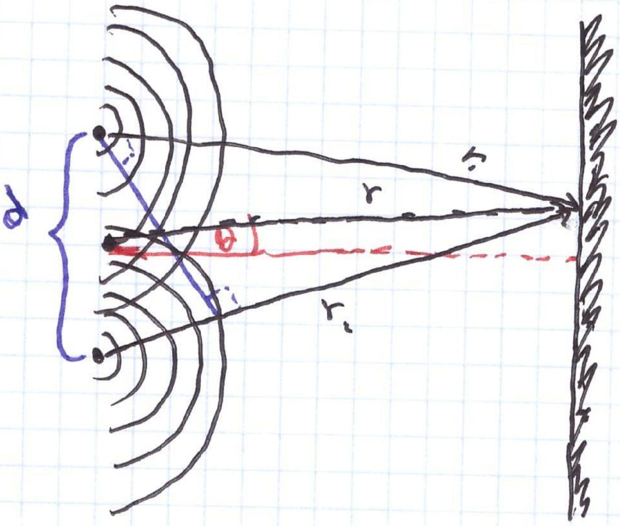
ועכשיו בואו נעבד אותה עם הקירוב הבא:

$$\frac{r_1+r_2}{2} \sim r \quad (**)$$

ומה שבגלל אמור לעצמך אותו זה שאמרו ש (**) נאמרה על ידי

אינו אומר ש $\frac{r_1-r_2}{2}=0$ ונכון מי אומר לי לומר דברים כאלה:

עבור $r_1, r_2 >> d$




$\Rightarrow r_2 - r_1 = d\sin\theta$

מהציור

ועכשיו נבין למה $r_1 - r_2 \neq 0$

נראה קודם את הניסוי ואז נבין בצורה...

מתקבל קלו

$$E = 2E_r \cos(kr - wt + \varphi_{AV})\cos\left(k\frac{d\sin\theta}{2} + \frac{\Delta\varphi}{2}\right)$$

$$\varphi_{AV} = \frac{\varphi_1+\varphi_2}{2} \qquad \Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$$

מה שהעין רגישה אליו לפי מה שאמרנו זה כפי

$$I = \frac{\text{אנרגיה}}{\text{שטח}\cdot\text{זמן}} = \frac{1}{t}\int_0^t S\,dt = 4E_r^2 Z\Big[\underbrace{\frac{1}{\tau}\int_0^\tau \cos^2(kr - wt + \varphi_{AV})\,dt}_{\frac{1}{2}}\Big]\cdot$$

מה שהעין רגישה אליו

$$\cdot\cos^2\left(\frac{kd\sin\theta}{2} + \frac{\Delta\varphi}{2}\right) =$$

הישרה...

כמוכן

$$= 4E_r^2 \cdot Z \cdot \frac{1}{2} \cdot \cos^2\left(\frac{kd\sin\theta}{2} + \frac{\Delta\varphi}{2}\right)$$

כאינטגרל זה חצי

נסתכל על מקרה פרטי $\Delta\varphi=0$ :

$$I = I_{max}\cos^2\left(\frac{kd\sin\theta}{2}\right)$$

כאשר $$I_{max}=2ZE_r^2$$

ועכשיו נוכל להגדיר לעצמנו התאבכות בונה והתאבכות הורסת במקרה הזה:

התאבכות בונה: כאשר:

$$\frac{kd\sin\theta}{2}=m\pi \qquad m=0,\pm1,\dots$$

$$\overset{\text{והרי}}{\Rightarrow} k=\frac{2\pi}{\lambda}$$ (לפי הגדרה)

$$\Downarrow$$

$$\frac{\cancel{\pi}d\sin\theta}{\lambda}=m\cancel{\pi} \Rightarrow \boxed{d\sin\theta=\lambda m}$$

וזה קשר מהמעבדה בספקטרוסקופיה

וידוע שבקירוב: $\sin\theta\cong\theta \Rightarrow \theta=\frac{\lambda}{d}m$

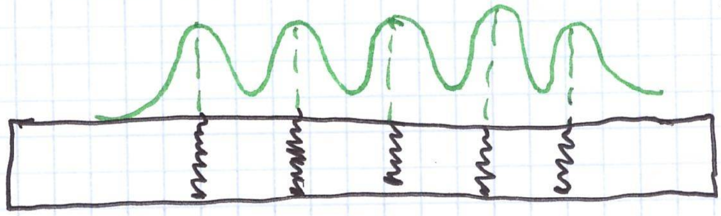
ואם נסתכל על המיקומים המדויקים שבהם יש התאבכות בונה (נצייר זאת אחרי שנגדיר הורסת):

התאבכות הורסת:

$$\frac{kd\sin\theta}{2}=\left(m+\frac{1}{2}\right)\pi$$

$$\Rightarrow \boxed{d\sin\theta=\left(m+\frac{1}{2}\right)\lambda}$$

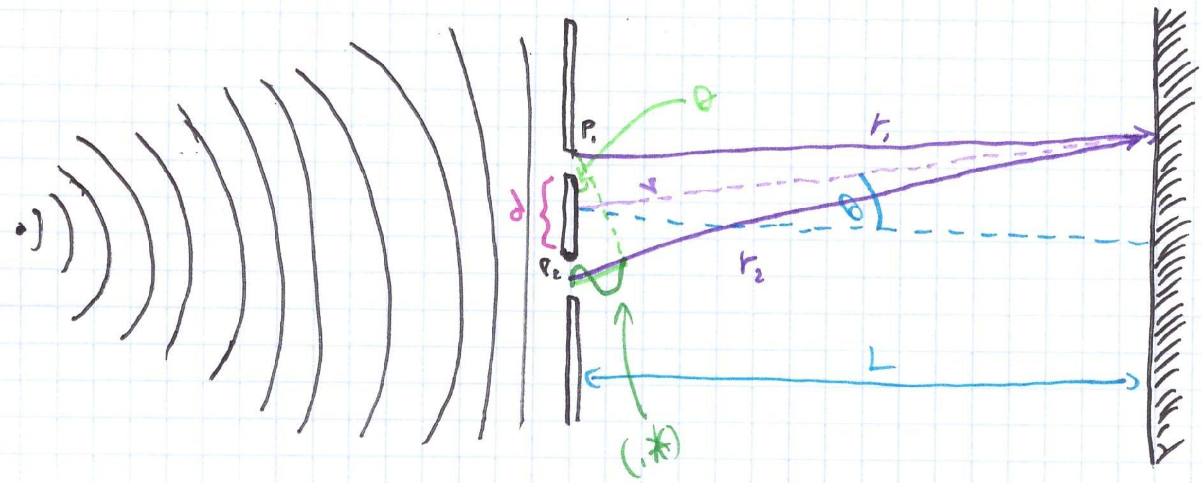
נצייר:



כ"ט

# המשך להתאבכות ועקיפה: (הלמים)

כדי ליצור 2 מקורות עם אותה פאזה מספיק לי שאפריד את
המסך שלי בצורה המצוירת הבאה:




הפרינציפ של שיעור שעבר:

בשיעור הקודם קיבלנו כי: $E = E_r\cos(kr_1-\omega t)+E_r\cos(kr_2-\omega t)$

כאשר נשים לב שמה שמעניין אותנו זה הפרש הפאזה בין
2 הגלים במידה ועד הגל שיוצא מ- $P_1$ ל $r_2$
עובר לי בדיוק גל שלם אזי הפאזה (2 הגלים) ינועו בדיוק
באותה פאזה ולכן תהיה התאבכות בונה. (גל שלם זה הפרש האורכים)

$$E = 2\cos(kr-\omega t)\cos\left(\frac{r_2-r_1}{2}k\right)E_r$$

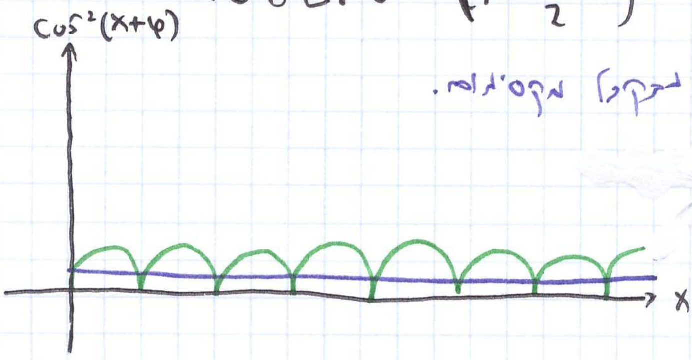
כאשר:

$$r = \frac{r_1+r_2}{2}\quad , \quad kr = \frac{kd\sin\theta}{2}$$

ונקבל הפוינטינג: (בממוצע על הזמן)

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{\tau}\int_0^\tau S\,d\tau = \frac{\varepsilon}{\tau}\int_0^\tau 4E_r^2\cos^2(kr-\omega t)\cos^2\left(\frac{kd\sin\theta}{2}\right)d\tau =$$

$$= 2\varepsilon E_r^2\cos^2\left(k\frac{d\sin\theta}{2}\right)$$




וכן- $m\pi = \frac{kd\sin\theta}{2}$ נקבל מקסימום.

ונזכיר כי

מקסימום מתקבל ב- ומינימום מתקבל ב-

$$\frac{\cancel{k} d\sin\theta}{\cancel{2}} = m\cancel{\pi} \qquad \frac{kd\sin\theta}{2} = \left(m+\frac{1}{2}\right)\pi$$

$$\Downarrow$$

$$d\sin\theta = m\lambda \qquad \Rightarrow r_2 - r_1 = d\sin\theta = \left(m+\frac{1}{2}\right)\lambda$$

עכשיו מה זאת אומרת המסך רחוק? המקורות קרובים? מי גדול או קטן ביחס למי כאן?

נשים לב ל-$\theta$ סמך בציור בעמוד הקודם:

$$L^2 + d^2 = r_2^2 \underset{\text{אחרי מתמטיקה מסורתית}}{\Longrightarrow} r_2^2 - L^2 = d^2 \underset{\text{נסתמך הכבר המקוצר}}{\Longrightarrow} (\underbrace{r_2 - L}_{\lambda})(\underbrace{r_2 + L}_{2L}) = d^2$$

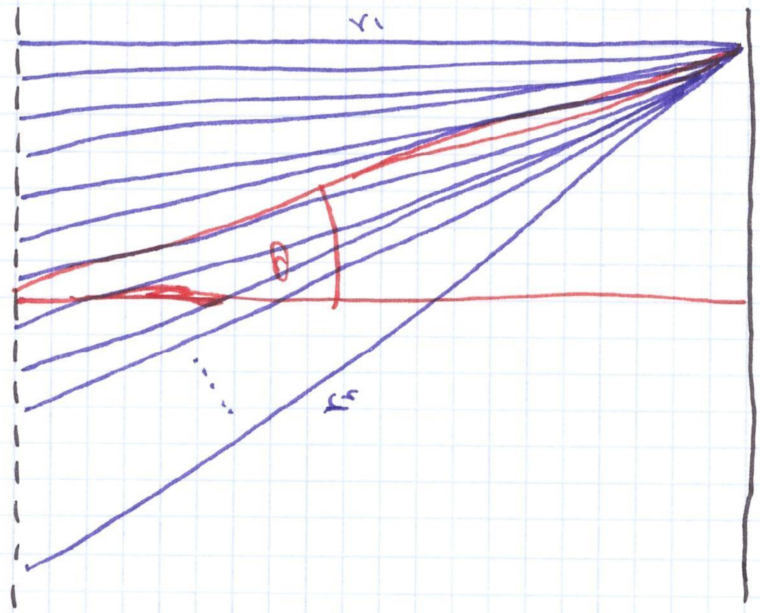
$$\Rightarrow 2\lambda L = d^2 \Rightarrow L = \frac{d^2}{2\lambda}$$

וקירוב השדה הרחוק שלנו יהיה $L \gg \frac{d^2}{2\lambda}$ (מיקום המסך)

מה-L הזה ואילך ההנחות שלי יתקיימו

אז אם הבנו עבור 2 מקורות, נרצה לראות מה קורה עם N מקורות

נסתכל בצורה גרפית:



כר״

כעת בסכום על כל המקורות נקבל:

$$E=E_r\sum_{j=1}^{N}\cos(kr_j-wt)\underset{\substack{\uparrow\\ \text{נעבור}\\ \text{להצגה מרוכבת}}}{=}E_r\,\mathrm{Real}\sum_{j=1}^{N}e^{i(kr_j-wt)}=$$

$$=E_r e^{-iwt}\sum_{j=1}^{N}e^{ikr_j}=E_r e^{i(kr_1-wt)}\cdot\left(e^{ik(r_2-r_1)}+e^{ik(r_3-r_1)}+\dots\right)$$

קיצר הבנים את הרעיון?!

אז נחזור ונסתכל מה שעשינו עבור 2 מקורות, עם האנכים נקבל ש הפרש המהלכים

$$\Delta\varphi=k(r_j-r_{j-1})=kd\sin\theta$$

וזה טור הנדסי וטור הנדסי מאפשר לסכם בתיכון:

$$E=E_r e^{i(kr_1-wt)}\left(1+e^{i\Delta\varphi}+e^{i2\Delta\varphi}+\dots+e^{iN\Delta\varphi}\right)\overset{\downarrow}{=}E_r e^{i(kr_1-wt)}\left(\frac{1-e^{iN\Delta\varphi}}{1-e^{i\Delta\varphi}}\right)=$$

נוציא מהשבר וקיבלנו אקספוננטות:

$$=\mathrm{Re}\left\{E_r e^{i(kr_1-wt)}\cdot\underbrace{\frac{e^{i\frac{\Delta\varphi}{2}N}}{e^{i\frac{\Delta\varphi}{2}}}}_{\text{(מה שהוצאנו)}}\cdot\left(\frac{e^{-i\frac{\Delta\varphi N}{2}}-e^{i\frac{\Delta\varphi N}{2}}}{e^{-i\frac{\Delta\varphi}{2}}-e^{i\frac{\Delta\varphi}{2}}}\right)\right\}=$$

$$=\mathrm{Re}\left\{E_r e^{i(kr_1-wt)}e^{i\frac{\Delta\varphi}{2}(N-1)}\cdot\frac{\sin\left(\frac{N\Delta\varphi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right)}\right\}$$

ולפי איך שהגדרנו את הפוינטינג הזה:

$$\frac{1}{\tau}\int_0^{\tau}S\,dt=\frac{1}{\tau}\int_0^{\tau}zE_r^2\underbrace{\cos^2\left(kr_1-wt+\frac{\Delta\varphi(N-1)}{2}\right)}_{\frac{1}{2}}\cdot\frac{\sin^2\left(\frac{kd\sin\theta}{2}N\right)}{\sin^2\left(\frac{kd\sin\theta}{2}\right)}dt=$$

בס״ד

$$= \frac{ZE_r^2}{2}\cdot\frac{\sin^2\left(\frac{kd\sin\theta}{2}N\right)}{\sin^2\left(\frac{kd\sin\theta}{2}\right)} \Rightarrow$$

ובשביל להבין מה אני באמת כותב ותשובה הגיונית נציב $N=2$

ונראה מה קיבלנו — מה שקיבלנו בפעם הקודמת...

$$\Rightarrow \frac{ZE_r^2}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{4}^{\,2}\cancel{\sin^2\left(\frac{kd\sin\theta}{2}\right)}\cos^2\left(\frac{kd\sin\theta}{2}\right)}{\cancel{\sin^2\left(\frac{kd\sin\theta}{2}\right)}} =$$

מה שקיבלנו עבור $N=2$

פאזה ליניארי

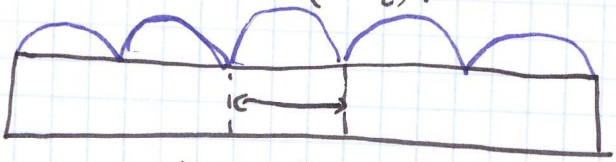
נקרא למיצוע הזה מתיבני $I$ כי זה יותר נוח:

ראינו עבור $N=2$

$$I = \underbrace{2ZE_r^2}_{I_{max}}\cos^2\left(\frac{kd\sin\theta}{2}\right)$$

המקסימום מתקבל ב- $d\sin\theta = m\lambda$

והמינימום מתקבל ב- $d\sin\theta = \left(m+\frac{1}{2}\right)\lambda$



$$\Delta\theta = \frac{\lambda}{d},\quad L\cdot\frac{\lambda}{d}$$

עבור $N>2$:

$$I = \frac{I_{max}}{4}\,\frac{\sin^2\left(\frac{kd\sin\theta}{2}N\right)}{\sin^2\left(\frac{kd\sin\theta}{2}\right)}$$

$$\frac{kd\sin\theta}{2}\cdot N = m\pi$$

וכאן יוסיף את זה בשיעור הבא...

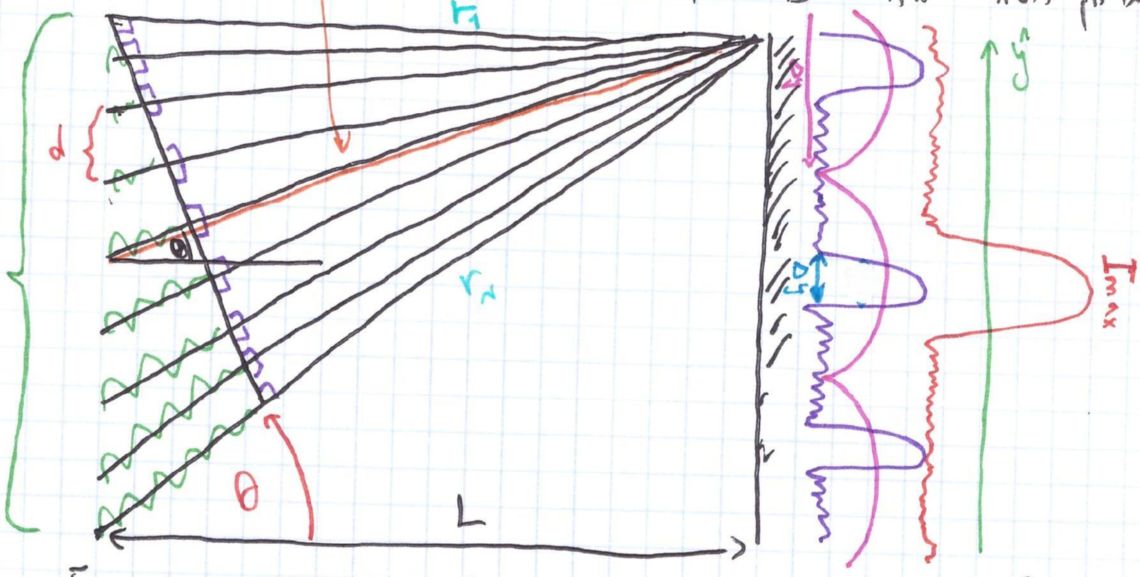
## התאבכות מ-N מקורות המשך:

אז העניין של N מקורות, גם כמו העניין של 2 מקורות רק קצת יותר

למרחק בין 2 מקורות נקרא d קטן.

המרחק הכללי יהיה D גדול

r - המקטע את האורך המרכזי




בשביל לעשות את החישוב אני אקח θ קירובים. הקירובים אלה הם קירובים מהצורה של זוויות קטנות ובאמת זוויות של המשולשים האלה הם סוג של שווי שוקיים (שוקיים - כמו הדוגמה) והזוויות A בבסיס שלהן הן זוויות של 90.

$$E = E_r \mathrm{Re}\{e^{i(kr_1 - wt)} + \dots + e^{i(kr_N - wt)}\} =$$

$$= E_r \mathrm{Re}\{e^{i(kr_1 - wt)}[1 + e^{i(r_2 - r_1)} + \dots + e^{ik(r_N - r_1)}]\}$$

ונקרא ל-$k(r_i - r_{i-1})$ בשם בשביל שיהיה קל לסכם:

$$\Delta\varphi = k(r_i - r_{i-1}) = kd\sin\theta$$

ונזכור כי $k = \frac{2\pi}{\lambda}$

$$\Rightarrow E_r = E_r e^{i(kr_1 - wt)} \cdot \frac{1 - e^{iN\Delta\varphi}}{1 - e^{i\Delta\varphi}}$$

ו-אז כמו שראינו בשיעור שעבר

$$\Rightarrow E = \mathrm{Re}\left\{E_r e^{i(kr_1 - wt)} \frac{e^{iN\frac{\Delta\varphi}{2}}}{e^{i\frac{\Delta\varphi}{2}}} \cdot \frac{\left(e^{-iN\frac{\Delta\varphi}{2}} - e^{iN\frac{\Delta\varphi}{2}}\right)}{\left(e^{-i\frac{\Delta\varphi}{2}} - e^{i\frac{\Delta\varphi}{2}}\right)}\right\} = (*_1)$$

$$(*_1) = Re\left\{E_r e^{i\left(kr_1+(N-1)\frac{\Delta\varphi}{2}-\omega t\right)} \frac{\sin\frac{N\Delta\varphi}{2}}{\sin\frac{\Delta\varphi}{2}}\right\}$$

$$\boxed{kr_1+\frac{(N-1)}{2}kd\sin\theta = k\underbrace{\left(r_1+\frac{(N-1)}{2}d\sin\theta\right)}_{\text{כאשר זה } r \text{ - בשרטוט בעמוד הקודם}} = kr}$$

$$\Rightarrow E = Re\left\{E_r e^{i(kr-\omega t)}\left(\frac{\sin\frac{N\Delta\varphi}{2}}{\sin\frac{\Delta\varphi}{2}}\right)\right.$$

וכל הריל (Real) הזה גם שהוא עושה זה נותן לי את העוצמה:

$$\Rightarrow I = I_0\cdot\frac{\sin^2\left(\frac{Nkd\sin\theta}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{kd\sin\theta}{2}\right)}$$

נשים לב שהמכנה הזה מתאפס מדי פעם וזה קורה שהארגומנט הזה שווה לכפולות של π - ואז כמובן מתאפס, ובכל פעם שהארגומנט מתאפס את הסינוס אנחנו נקבל מקסימום ראשי. (בעצם נעשה כבר של "$\frac{0}{0}$") - אחרי הצבה של $k=\frac{2\pi}{\lambda}$:

נקבל מקסימום ראשי עבור:

$$\frac{\pi d\sin\theta}{\lambda} = m\pi$$

ובמקרה כזה: $I = I_0\cdot N^2$ (אחרי שימוש בלופיטל)

ונקבל מקסימום משני עבור:

$$\frac{N\pi d\sin\theta}{\lambda} = \left(m+\frac{1}{2}\right)\pi$$

$$\underset{\text{לכן}}{\Rightarrow} d\sin\theta = \frac{\left(m+\frac{1}{2}\right)\lambda}{N}$$

ונשים לב שכשמשנים את θ הסינוסים יגבירו את עצמם עדיין בצורה כלי אוסילציות מהירות וה-I הזה (עניים שונו) יקבל מקסימום פה ושם ונצייר את הדבר הזה כשראינו בעמוד הקודם בדבש הזה.

ובאפס הראשון יתקבל כאשר: (נקודת המינימום הראשון כי המונה בריבוע אז היא חיובית)

$$\frac{\pi N d\sin\theta}{\lambda} = \pm\pi \Rightarrow D\sin\theta = \pm\lambda$$

$$\Rightarrow \sin\theta = \pm\frac{\lambda}{D}$$

וקירובים יהיו:

$$\Rightarrow \sin\theta \approx \theta = \pm\frac{\lambda}{D}$$

ונסמן על הגרף את רוחב ה חבילה (באזור בסדר הראשון):

N מקורות $\Delta y = \frac{2L\lambda}{D}$ $\xrightarrow[\text{מקורות}]{\text{בהשוואה ל-2}}$ $\Delta y = \frac{2L\lambda}{d}$ 2 מקורות

מספר יותר קטן עם יותר גדול.

ונלביש את הגרף בסדר בסדר הראשון את הגרף שהתקבל עבור 2 מקורות

ככל שיש יותר מקורות בהפרש שיתקבלו ויזואלית יהיו יותר ברורים וחדים והתמונה הזאת של אור תתקבל מתוך החישוב הבא.
אני רוצה לראות מה באמת יקרה כשאני יקח את מספר הסדקים לאינסוף (כשאני יקטין את מרחק בין 2 מקורות בשביל לכסות את הכעולה הפרטית הבאה).

$$\lim_{\substack{N\to\infty \\ d\to 0}} N\cdot d = D$$

אבל אז השדה שיתקבל יהיה שדה אינסופי כי מספר המקורות יגדל ואני חייב להקטין את העוצמה כביכול כי אחרת אני יקבל יותר מדי אור לכן נגדיר:

$$E_r' = \frac{E}{N}$$

$$I'_{max} = \frac{I_{max}}{N^2}$$

$I_{max}$ - אמור לציין את עוצמת השדה בציר "0".

לפני כיווץ הסדק (כאשר לא כן:)

$$\lim \frac{N\Delta\varphi}{2} = \lim \frac{\pi N d\sin\theta}{\lambda} \Rightarrow \frac{\pi D\sin\theta}{\lambda}$$

כאשר:

$$\frac{\Delta\varphi}{2} = \frac{N\Delta\varphi}{2N} = \frac{\pi D\sin\theta}{\lambda N}$$

$$I = I_0\,\frac{\sin^2\left(\frac{\pi D\sin\theta}{\lambda}\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi D\sin\theta}{N\lambda}\right)} \xrightarrow{N\text{-ל}\infty}$$

ברגע אלה ממש N הולך לאינסוף...

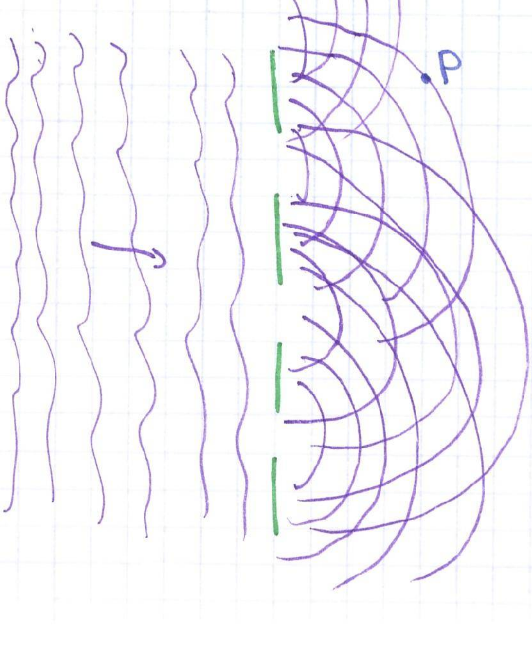
נשים לב שבגבול את הארגומנטים, כשN הולך לאינסוף היה זה d ב-D שיאפס לו את הצורה אבל במקום של הפרמטר d אחד לא מאפס את N.

$$= \underbrace{I_0 N^2}_{I_{max}}\,\frac{\sin^2\left(\frac{\pi D\sin\theta}{\lambda}\right)}{\left(\frac{\pi D\sin\theta}{\lambda}\right)^2}$$

עקב העובדה שאחרי אלפי קידוחים של חורים אני אומנם יוצר גבב בגבול שלקחתי של אינסוף נקודות בערך שלכל אחד מהם יש אנרגיה אבל בגלל שהקטנתי את האנרגיה של כל נקודה בלקחת בגבול הזה אני מרשה לעצמי לקרוא ל-$I_0 N^2$ בשם $I_{max}$.

ונציין בצבע הזה את העובדה בציור הראשון בסגור הראשון משום שזה מבחינה היסטורית החליטו לקרוא לדבר הזה "עקיפה"
- כשיש סדק רחב - נוהגים לקרוא לזה עקיפה
- כשיש שריג מפוצל בחורים נוהגים לקרוא לזה התאבכות.
אבל ב הדברים האלה הם סוגים שונים של התאבכות...

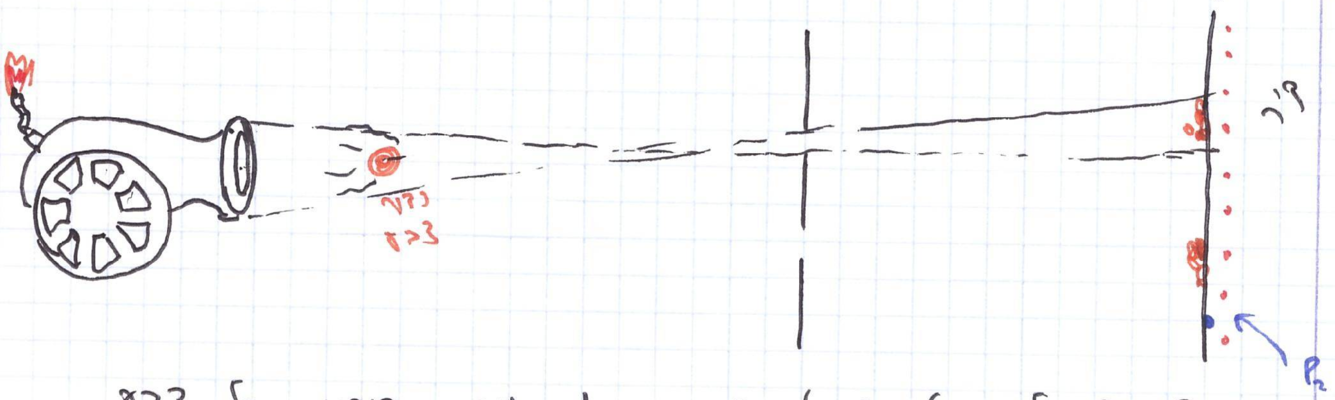
ולמה קוראים לדבר הזה עקיפה, נניח שיש לנו בחוף שבכר




גלים שמצוירים בירוק
ויש איזה מישהו שעומד
לו כסבבה בתוך המים
בנקודה P שמסומנת בכחול
והוא אומר לעצמו - איזה
סבבה - עכשיו לא יגיעו אלי
גלים - ואז הוא מגלה שהגלים
מגיעים אליו בכל זאת מגיעים
בצבע הזה ולכן קוראים לזה
עקיפה

וניוטון שכח את הראש וניסה לחבר אחרי הייגנס את החשבון הדיפרנציאלי - כמו זה אור.

הבעיה העקרונית היא שצריך לקחת תותח שיורה כדורים באופן אקראי ויש לו קיר עם חריצים




מנק' $P_2$ לא נוכל לקבל צבע אם נירה כדורים של צבע בתותח שיורה כדורים - להבדיל מאור באור נקבל נק' בכל היקף הדומה. ואז הבינו שלאור יש תכונות גליות.

ומקסוול הוא זה שהסיק שאור זה גלים אלקטרומגנטיים. אז הוא קבע להרץ עבודה ובדקו אותו ונתנו מגנטים כבד אחד לכיוון. אם הם מנפיצים במקום אחר וזה ניסוי יאנג בעצם.

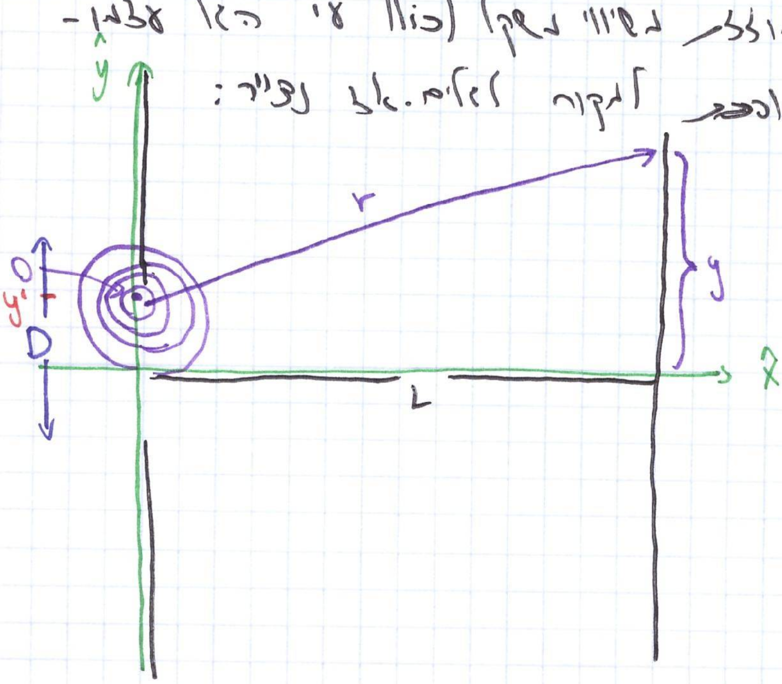
ואז אמרו אם אור זה גל - גל צריך תווך - אז המציאו את האתר.

ואז ביטלו אותו כי הוא לא היה קשור לחיים.

ואז באו הייגנס והביאו לנו את

## עקרון הויגנס:

שאומר שכל נק' הנמצאת בשיווי משקל (כולל ע"י הגל עצמו - נניח נק' במ"ח) הופכת למקור לגלים. אז נצייר:




כאשר התרומה של הנק' O בעזרת המספרים המרוכבים היא:

$$Re\{Ere^{i(kr-wt)}\} = (*_2)$$

$$(*_2) = Re\left\{ E_r e^{i(k((y-y')^2+L^2)^{\frac{1}{2}} - wt)} \right\}.$$

כאשר $y'$ זה המיקום של המקור הזה...

$$E = Re\left\{ \frac{E_r}{D} \int_{-\frac{D}{2}}^{\frac{D}{2}} dy' \cdot e^{i[k((y-y')^2+L^2)^{\frac{1}{2}} - wt]} \right\} = (*_3)$$

לסידור יחידות

נסכור להצגה
מאה אחוז נכונה

וזה עיקרון הויגנס - אבל זה אינטגרל מה זה מעצבן וקשה
ורק אם אתם צריכים לפתור...

$$(*_3) = Re\left\{ \frac{1}{D} \int_{-\frac{D}{2}}^{\frac{D}{2}} dy' \cdot e^{i[k((y-y')^2+L^2)^{\frac{1}{2}} - wt]} \right\} \frac{E_0 \cdot L}{\sqrt{(y-y')^2+L^2}}$$

$E_r$ שהולך כמו $\frac{1}{r}$

ומי שיתקע את המשוואה הזאת במחשב
יקבל את השדה באופן מדויק.
ונחזור לבנייה הקודמת (המשוואה השנייה בעמוד)


אם $L$ הוא מאוד מאוד גדול כמעט אז אני יודע את התשובה.
כי אני רוצה לקרב את האינטגרל הזה:

$$(*_3) = E \cong Re\frac{E_r e^{-iwt}}{D} \int_{-\frac{D}{2}}^{\frac{D}{2}} e^{ikL\left(1+\frac{(y-y')^2}{2L^2}\right)^{\frac{1}{2}}} dy' =$$

[illegible]

אז ביחס ל-$L$ גם $y$ וגם $y'$ קטנים מאוד.
וזה סוג של פיתוח טיילור... ונמצא את ה"בריבוע"...

$$= Re\left\{\frac{E_r e^{-i\omega t}}{D}\int_{-\frac{D}{2}}^{\frac{D}{2}} e^{ikL\left(1+\frac{y^2}{2L^2}-\frac{yy'}{L^2}+\cancel{\frac{y'^2}{2L^2}}\right)}\,dy'\right\} \cong$$

קבוע באינטגרציה -

ונשים לב כי קיבלנו בביטוי משהו כזה (שמסומן באדום)

$$e^{i\frac{kLy'^2}{2L^2}} = e^{i\frac{kD^2}{8L}}$$

ואם $\frac{D^2}{\lambda L} << 1$ (כאשר הפרמטרים קבועים כגון $\lambda$ וכאלה כי הם בגדול לא מעניינים את הדיון הזה.)

אז אפשר להזניח את האיבר הזה כי הוא כמו קבוע באינטגרל.

ולכן נשארנו עם:

$$\cong Re\left\{E_r \frac{e^{-i\omega t}}{D}\cancel{e^{i\frac{ky^2}{2L^2}}}\int_{-\frac{D}{2}}^{\frac{D}{2}} e^{ikL\left(1-\frac{yy'}{L^2}\right)}dy'\right\} \cong$$

כאשר עוד קירוב יפה: $\frac{y}{L} = \tan\theta \cong \sin\theta$

וזה נכון בקירוב בזוויות קטנות ויש לנו 2 סיבות להוריד את האיבר הזה - זה זוויות קטנות ולא מעניין אותנו זוויות קטנות בריבוע וגם כשנעשה ממוצע על הזמן הדבר הזה ייעלם.

ובשביל להדגיש את כולם הוא עדיין לא מעלים אותו...

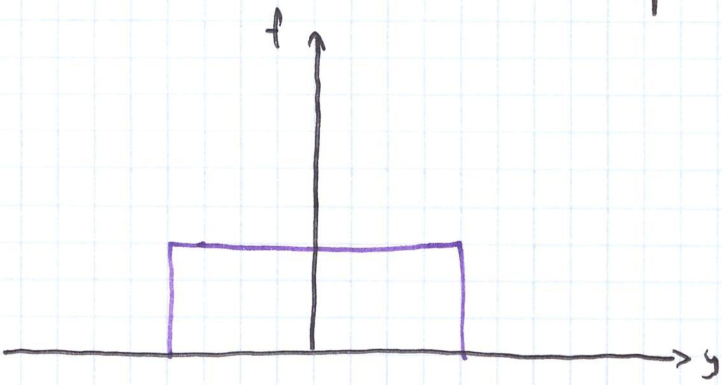
$$\cong Re\left\{E_r\frac{e^{-i\omega t}}{D}\cdot e^{\frac{ikL\sin^2\theta}{2}}e^{ikL}\int_{-\frac{D}{2}}^{\frac{D}{2}} e^{-i\frac{kLyy'}{L^2}}dy'\right\} =$$

$$= Re\left\{E_r e^{-i\omega t}e^{i\frac{kL\sin^2\theta}{2}}e^{+ikL}\int_{-\frac{D}{2}}^{\frac{D}{2}} e^{-i\overbrace{k\sin\theta}^{q}y'}dy'\right.$$

☆ מה זה הדבר הזה? התמרת פוריה של מה? של קופסה באורך D.

פין

כאשר f את העצם קטנה q במרכז הזה:




$$f=\begin{cases}\frac{1}{D} & -\frac{D}{2}<y<\frac{D}{2}\\ 0 & \text{else}\end{cases}$$

כאשר

$$\int_{-\frac{D}{2}}^{\frac{D}{2}} e^{-iqy'}dy'=\frac{\sin\left(\frac{qD}{2}\right)}{\frac{q}{2}}$$

ולכן קיבלנו

$$=Re\left\{E_r e^{-i\omega t}e^{ikL\sin^2\theta}e^{ikL}\cdot\frac{\sin\left(\frac{k\sin\theta}{2}D\right)}{\left(\frac{k\sin\theta D}{2}\right)}\right\}=$$

אחרי חישוב הפאזה, הפאזה בריבוע (כמה מוצאים את וקטור פוינטינג)
נקבל את וקטור פוינטינג

$$\Rightarrow \quad S=\#\cos^2\left(\omega t-kL-\frac{kL\sin^2\theta}{2}\right)$$

מספרים
מספרים
מספרים

והעוצמה θ כפונ' תהיה:

$$I=I_{max}\frac{\sin^2\left(\frac{kD\sin\theta}{2}\right)}{\left(\frac{k\sin\theta D}{2}\right)^2}$$

כאשר בקירוב השדה הרחוק:

$I=($ ____ בראשית הגל מעבר $\Pi$ הנוכחית ____ הפתוח $)^2$

(א)

# הרצאה - גלים - סיום עונה:

**הדגמה 1:**

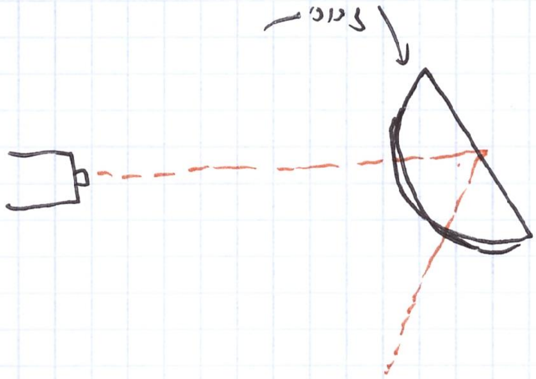
$$d\sin\theta = n\lambda$$

בניסוי הוא ירה לייזר בין סדקים וקיבל תמונה מהצורה:

ואז כשהוא החליף את הסריג לסריג עם מרחק בין הסדקים (d) יותר קטן ולכן המרחק בין הנק' ההתאבכות גדל כי אורך הגל λ (וכמובן גם n) קבוע ב-2 המקרים ובשביל לקיים את המשוואה סינוס θ גדל עקב הקטנת d.

החומר היום לא למבחן!!!

**הדגמה 2:**



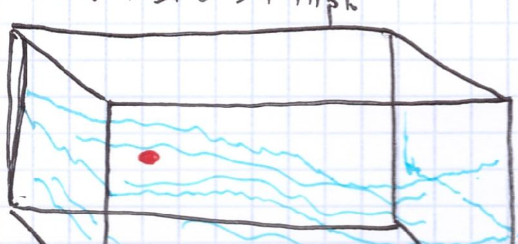

$$n_1\sin\theta_1 = n_2\sin\theta_2$$

ראינו שהאור נשבר בתווך שונה בגלל $n_i$ שונה.

**הדגמה 3:**

בגלי מים תנודות הגל אינן מעלה מטה או ימינה שמאלה אלא גם וגם - בגלי מים כל נק' מבצעת תנועה מעגלית.

אקווריום שבתוכו מים ונקודה • שנע עם הגלים



הקשר יחס הנפיצה של גלי מים הוא מהצורה הבאה:

h - גובה המים

$$\omega^2 = gk\left(\frac{1-e^{-2kh}}{1+e^{-2kh}}\right)$$

כאשר במים עמוקים:

$$\omega = \sqrt{gk}$$

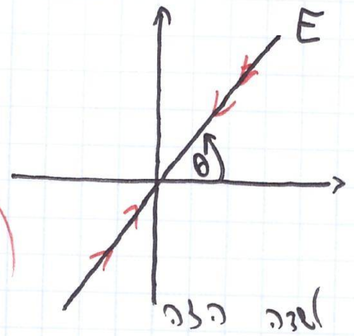
ובמים רדודים:

$$\omega = \sqrt{gh}\,k$$

## קיטובים:

נתבונן בשדה כללי ומבוטא: $(z=0)$

$$\vec{E}(0,t) = \hat{x} A_1 \cos(wt) + \hat{y} A_2 \cos(wt)$$




(קיטוב לינארי)

כאשר

$$|E| = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}$$

$$\tan\theta = \frac{A_2}{A_1}$$

מכיוון שהשדה מסומן בגודל ניתן להסיק כי לשדה הזה יש קיטוב לינארי - השדה נע בקו ישר לינארי.
תארו לעצמכם שלקחנו שדה שנראה כך:

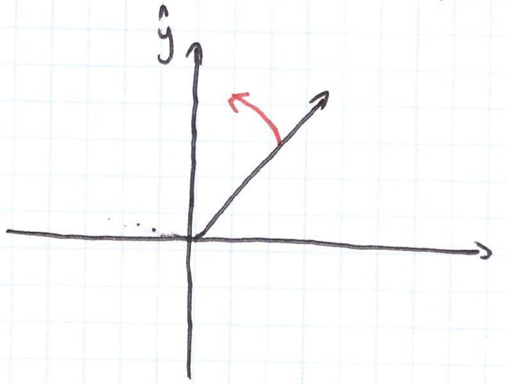
$$\vec{E}(0,t) = \hat{x} A \cos(wt) + \hat{y} A \cos\left(wt - \frac{\pi}{2}\right)$$

נשים לב שאם $wt = \frac{\pi}{2}$ נקבל רק רכיב ב $\hat{y}$ ומשם השדה תסובב בעיגול

$$t \to t - \frac{z}{c}$$

$$\vec{\nabla}\vec{E} = 0$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\vec{\nabla}\times\vec{E}$$



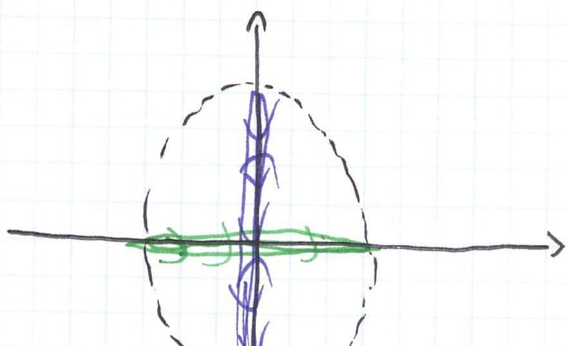

ולדבר הזה קוראים
(קיטוב מעגלי)

נתבונן במקרה הכללי:

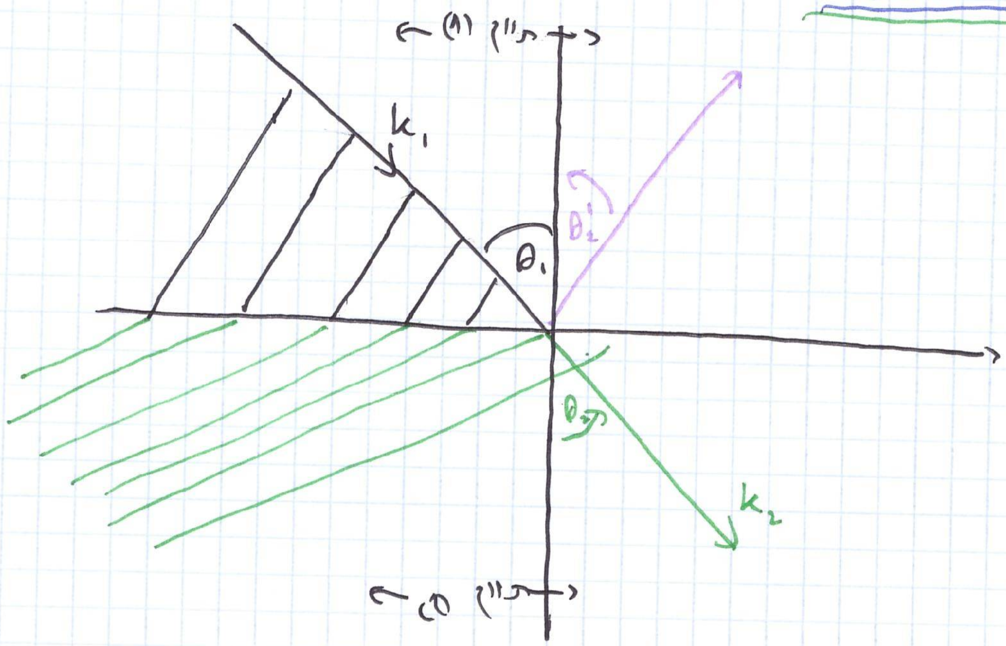
$$\vec{E}(0,t) = A_1 \cos(wt + \varphi_1)\hat{x} + A_2 \cos(wt + \varphi_2)\hat{y}$$

אחד נותן תנועה באמפליטודה $A_1$ והשני באמפליטודה $A_2$

ולדבר הזה קוראים:
(קיטוב אליפטי)



## החזרה מלאה:




$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2$$

תמונת מראה של מה שקורה בתווך התחתון

$$\Downarrow$$

$$\cancel{n}_1 \sin\theta_1 = \cancel{n}_1 \sin\theta_2$$

$$\Downarrow$$

$$\theta_1 = \theta_2$$

כאשר: $k_1, k_2$ - וקטורי התקדמות הגל בכל תווך.

נתבונן בוקטורי התקדמות הגל:

$$\vec{k}_1^2 = \frac{W^2}{c_1^2} \quad , \quad \vec{k}_2^2 = \frac{W^2}{c_2^2}$$

$$\text{I.} \quad \frac{W^2}{c_2^2} = k_{2x}^2 + k_{2y}^2$$

כאשר $k_{1x} = k_{2x}$

המשמעות של $k_x$ היא שכאשר מקפיאים את הזמן ובודקים בכיוון x $k_x$ אומר לי כמה אני צריך ללכת בשביל להגיע לאותו מקום. (אותה נקודה גובה)

$$k_{1x} = k \sin\theta \Rightarrow k_{1x} = k_{2x}$$

ונחזור - מה שקיבלנו נציב ב I

$$\Rightarrow k_{2y}^2 = \frac{W^2}{c_2^2} - k_1^2 \sin^2\theta_1 = \frac{W^2}{c_2^2} - \frac{W^2}{c_1^2}\sin^2\theta_1 =$$

$$= \frac{W^2}{c^2}\left(n_2^2 - n_1^2 \sin^2\theta_1\right)$$

קי

דגשים למבחן:

דף הנוסחאות צריך להיות ידני.

חובה להעתיק את התשובה הסופית לריבוע

שאלת הפקטור - יש שאלה קלה

החומר של רבקה בבחינה, ויהיה טורי פורייה רבים לאללה.